

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

64824 - разложить на простые множители

64824	3	вывод число должно состоять либо
21609	3	I) из 4х (7), 3х (3) и 1х (1), либо
7203	3	
2401	7	II) из 4х (7), 1х (9), 1х (3) и 2х (1)
543	7	
49	7	IV 1) Допустим у нас есть 8 мест
7	7	туда можно поставить 1
1	1	2) $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2}$ вариантов расположения зно $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

$$7 \cdot 5 = 35$$

3) ~~Сами~~ ~~занимает~~ ~~ост~~ ~~места~~
 $35 \cdot 8 = 280$ вариантов

IV 1) у нас 8 мест под 3

2) 4 места под 9

$$3) \frac{6!}{4! \cdot (2)!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15 \text{ вариантов под 4)}$$

4) 7 занимает ост места

$$8 \cdot 7 \cdot 15 = 840$$

$$S = 840 + 280 = 1120$$

Ответ: 1120 вариантов

N2

$$\cos 4x + \cos 5x + \sin 4x - \sin 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2\cos 5x \cos 2x + 2\cos 5x \sin 2x + \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) \cdot (2\cos 5x + \sqrt{2} - \sqrt{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$(\sqrt{2} \cos(2x - \frac{\pi}{4})) \cdot (2 \cdot (\cos 5x) + \cos(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$2\sqrt{2} \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{4}) \cdot 2 \cos(3,5x + \frac{\pi}{8}) \cos(1,5x - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$1) 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{4} + \pi k \Rightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

$$2) 3,5x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow \frac{3\pi}{8} + \pi k = 3,5x \Rightarrow x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{3,5}$$

$$3) 1,5x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow 1,5x = \frac{5\pi}{8} + \pi k \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{1,5}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \quad x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{3,5}, \quad x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{1,5}$$

N3

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^4}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{ОРЗ: } y < 0 \\ x > 0$$

$$\ln\left(-\frac{x^4}{y}\right) \cdot \ln(-y) = \ln(x^2) \cdot \ln(xy^2)$$

$$y^2 + y(2x+4) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (2x+4)^2 - 12x^2 - 48x = 4x^2 + 16x + 16 - 12x^2 - 48x = 16x^2 - 32x + 16 = \\ &= (4x-4)^2 \quad y = \frac{-2x-4 \pm 4x-4}{2} = -3x \quad y = \frac{-2x-4 \pm 4x-4}{2} = x-4 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = -3x$$

$$y = x - 4$$

$$\left(\frac{-x^4}{y} \right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

I $y = -3x$ ~~подставляем~~ в обе x и y в ОДЗ

$$\left(\frac{-x^4}{-3x} \right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(3x^5)}$$

$$\left(\frac{x^5}{3} \right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(3) + 3\ln(x)}$$

$$x^{6\ln(3x) - 4\ln 3 - 6\ln x} = 3^{6\ln(3x)}$$

$$x^{6\ln(3) + 6\ln x - 4\ln 3 - 6\ln x} = 3^{6\ln(3x)}$$

$$x^{2\ln(3)} = 3^{6\ln(3x)}$$

$$\ln(x) \cdot 2\ln(3) = \ln(3) \cdot 6\ln(3x)$$

$$\ln(x) = 3\ln(3x)$$

$$\ln(x) = \ln(27x^3) = 0$$

$$\ln\left(\frac{x}{27x^3}\right) = 0$$

$$\ln\left(\frac{1}{27x^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{27x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{27} \Rightarrow x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$y = -3x$$

$$y = x - 4$$

$$\ln\left(-\frac{x^4}{y}\right) = 0$$

$$\left(-\frac{x^4}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(x^4^2)} \quad | \quad y = -3x$$

$$\left(\frac{x^4}{3x}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}$$

$$x^{6\ln(3x)} = 3^{\ln 3x} \cdot x^{2\ln(9x^3)}$$

$$\ln(x) \cdot 6\ln(3x) = \ln(3^{\ln 3x} \cdot x^{2\ln(9x^3)})$$

$$\ln(x) \cdot 6\ln(3x) = \ln(3^{\ln 3x}) + \ln(x^{2\ln(9x^3)})$$

$$\ln(x) \cdot 6(\ln(3) + \ln(x)) = \ln 3x \cdot \ln(3) + \ln(x) \cdot 2\ln(9x^3)$$

$$\ln(x) \cdot 6(\ln(3) + \ln(x)) = (\ln(3) + \ln(x))\ln(3) + \ln(x) \cdot 2(\ln(9) + \ln(x^3))$$

$$\ln(x) \cdot 6(\ln(3) + \ln(x)) = (\ln(3) + \ln(x))\ln(3) + \ln(x) \cdot (4\ln(3) + 6\ln(x))$$

$$\ln(x) = t$$

$$\ln(3) = \alpha$$

$$t \cdot 6(\alpha + t) = (\alpha + t)\alpha + t(4\alpha + 6t)$$

$$6t\alpha + 6t^2 = \alpha^2 + \alpha t + 4t\alpha + 6t^2$$

$$2t\alpha = \alpha^2 + \alpha t$$

$$(\alpha^2 - \alpha t) = 0$$

$$\alpha(\alpha - t) = 0$$

$$\ln(x) = \ln(3) \quad x = 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$II \quad y = x - 4 \quad x \in (0; 4)$$

$$\ln\left(-\frac{x^4}{y}\right) \cdot \ln(-y) = \ln(x) \cdot 2 \ln(xy^2)$$

$$\ln\left(\frac{x^4}{4-x}\right) \cdot \ln(4-x) = \ln(x) \cdot 2 \ln(x \cdot (x-4)^2)$$

$$(\ln(x^4) - \ln(4-x)) \cdot \ln(4-x) = \ln(x) \cdot 2(\ln(x) + \ln(x-4)^2)$$

$$\ln(x) = t$$

$$\ln(4-x) = b$$

$$(4t - b)b = t \cdot 2(t + 2b)$$

$$4tb - b^2 = 2t^2 + 4bt$$

$$2t^2 - 3bt + b^2 = 0$$

$$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$$

$$t = \frac{3b - b}{4} = 0.5b$$

$$t = \frac{3b + b}{4} = b$$

$$\ln(x) = \ln(4-x)$$

$$\ln(x) - \ln(4-x) = 0$$

$$\ln\left(\frac{x}{4-x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{4-x} = 1$$

$$x = 4-x$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$0 < \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} < 4$$

$$-1 + \sqrt{17} < 8$$

$$\sqrt{17} < 9$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\ln(x) = 0.5 \ln(4-x)$$

$$\ln(x^2) - \ln(4-x) = 0$$

$$\ln\left(\frac{x^2}{4-x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4-x} = 1$$

$$x^2 = 4-x \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0$$

Ответ: $x=3$, $x=2$, $x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$

N 5

$$(x+8)^2 + (y-15)^2 = \alpha$$

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (x+8)^2 + (y-15)^2 = \alpha \end{cases}$$

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$1) |x+y+8| > 0 \Rightarrow y > -8-x$$

$$|x-y+8| > 0 \Rightarrow x+8 > y$$

$$x+y+8 + x-y+8 = 16$$

$$2x+16=16$$

$$2x=0$$

$$2) |x+y+8| > 0 \Rightarrow y > -8-x$$

$$x-y+8 < 0 \Rightarrow x+8 < y$$

$$x+y+8 = x+y-8 = 16$$

$$2y = 16 \Rightarrow y = 8$$

$$3) x+y+8 < 0 \Rightarrow y < -8-x$$

$$x-y+8 < 0 \Rightarrow x+8 < y$$

$$-x-y-8 + x-y-8 = 16$$

$$-32 = 2x$$

$$x = -16$$

$$4) x+y+8 < 0$$

$$x-y+8 > 0$$

$$y = -8$$

(2)

(3)

(1)

(4)

Есть два случая когда система имеет 2 решения

1) когда окружности касаются сторонами квадрата. тогда

по рисунку видно что $R=4 \Rightarrow$

$$\alpha = 49$$

2) а второй когда окружности из 2 четвертей касаются через точку

$$\{8;0\} \{0;0\}, \alpha \text{ из 3 четверти через точку } \{8;0\} \{0;0\} \quad R^2 = \alpha = 8^2 + 16^2 = 256 + 64 = 320$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Условие: $\alpha = 49$, $OL = 320$

1/6

$R = 14$, $\angle CAD = 90^\circ$, $B \in CO$

$BF = BD$

$CF = ?$

1) $BD \cdot DC = DE \cdot DA$

$CE = 2R$ т.к. хорда опирается на 90°

пусть $CB = x$ а $BD = BF = \alpha$

$$(x + \alpha) \alpha = DE \cdot AD$$

$$x\alpha + \alpha^2 = DE \cdot AD$$

2) Прямая BQ до 2-х пересечений с окружностью пусть это точки

Q , соединим AB тогда $\angle BAD = \angle BQD = \beta$

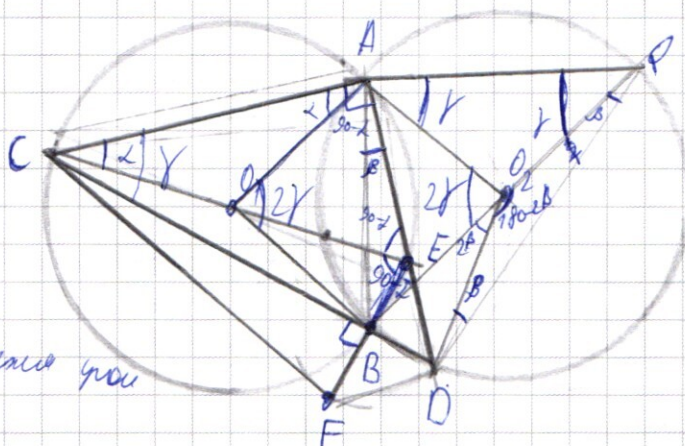
$$BE \cdot EQ = AE \cdot ED$$

$$\frac{BE}{ED} = \frac{AE}{EQ} \Rightarrow \triangle BEA \sim \triangle DEQ$$

3) $\angle ACB = \angle AQB$ т.к. хорды AB опираются на равные дуги

$$\angle Q_1 A Q = \angle Q_2 Q A = \gamma \angle A Q B = \angle A Q_2 B = 2\gamma$$

$$CF = CE = 2R = 28$$



N4

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{24} - 1)k = 93 + 3^{28} \cdot k - 3k \end{cases}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < y \leq 93 + 3k(3^{24} - 1)$$

$$f(k) = 93 + 3k(3^{24} - 1)$$

$$f'(x) = 3 \cdot (3^{24} - 1) = 3^{28} - 1$$

$$p(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$p'(x) = \ln 3 \cdot 3^x$$

~~$$u_1 = 4 \quad y = 3^{28} + 4 > 3 + 4 \cdot 3^{28}$$~~

~~$$y_1 = 4 \cdot 3^{28} + 4 \quad 4 \cdot 3^{28} \leq 93 + 3$$~~

$$u_1 = 4$$

$$y_1 = 4 \cdot 3^{28} + 82$$

$$4 \cdot 3^{28} + 82 > y > 81 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$4 \cdot 3^{28} + 82 = y \leq 81 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$k = 3$$

Ответа: Нет решения



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 64824 \overline{) 3} \\ -6 \\ \hline 3 \\ 18 \\ -18 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21609 \overline{) 3} \\ -21609 \\ \hline 504 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21609 \overline{) 3} \\ -21609 \\ \hline 64824 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21609 \overline{) 3} \\ -21 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4203 \overline{) 3} \\ -6 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64824 \overline{) 3} \\ -21609 \\ \hline 4203 \\ -2401 \\ \hline 345 \\ -40 \\ \hline 4 \\ -1 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \overline{) 4} \\ -21 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 \\ \hline 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} I \\ \hline 44773351 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} II \\ \hline 44779311 \end{array}$$

3332

3.2

44443331

3.3.3.3 5.5.5.5

2333
3233
3323
3332

4.1

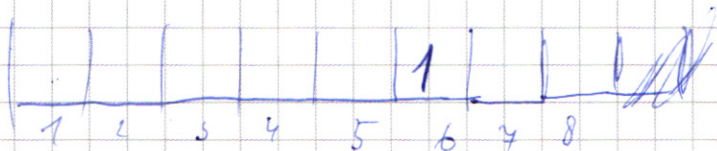
3331
3313
3133
1333

8. 2.2.2.2.2.2.2

$$\begin{array}{r} 8. \quad 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \\ \hline 4 \cdot 5 \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4! \\ \hline 3!(4!) \end{array}$$

$$8 = 4 \cdot 6 \cdot 5$$



$$8 \cdot \left(\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} \right) \cdot$$

$$8 \cdot 70 = 860$$

$$\frac{4 \cdot 6 \cdot 5}{3}$$

$$\frac{7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)! k!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2}$$

$$\frac{n!}{k!}$$

$$3000$$

$$00000000$$

$$00030000$$

$$00500000$$

$$03000000$$

$$30000000$$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\cos(4n) + \cos(5n) = 2 \cos(5n) \cos(2n)$$

$$\sin(4n) - \sin(5n) = 2 \cos(5n) \sin(2n)$$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$8 \cdot 4 \cdot 15$$

$$56 \cdot 10 + 280$$

$$560 + 280$$

$$840$$

$$840$$

$$\sin^2 n + \cos^2 n = 1$$

$$\cos^2 n - 1 = -\sin^2 n$$

$$\cos 4n + \cos 3n + \sin 4n = \sin 3n + \sqrt{2} \cos 4n = 0$$

$$2 \cos(5n) \left(\cos n + \sin 2n \right) + 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4n = 0$$

$$2 \cos(5n) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos n + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin n \right) + \sqrt{2} \cos 4n$$

$$2 \cos 5n \sqrt{2} \left(\cos \left(2n - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos 4n \right) = 0$$

$$2 \cos 5n + \sqrt{2} \sqrt{2} \left(\cos 2n + \frac{\pi}{4} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\ln\left(-\frac{x^4}{y}\right) \cdot \ln(-y) = \ln(x^4) \cdot \ln(y^2)$$

1) $y = -3x$ верно при любых x

$$\ln\left(\frac{x^4}{3x}\right) \ln(3x) = \ln(x^2) \cdot \ln(x \cdot 9x^2)$$

$$\ln\left(\frac{x^6}{3}\right) \ln(3x) = 2\ln(x) \cdot \ln(9x^3)$$

$$(\ln(x^6) - \ln(3))(\ln(x) + \ln(3)) = 2\ln(x) \cdot (\ln(9) + \ln(x^3))$$

$$(\ln(x^6) - \ln(3))(\ln(x) + \ln(3)) = 2\ln(x) \cdot (2\ln(3) + 2\ln(x))$$

$$\left(-\frac{x^4}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(x^4)}$$

$$y = -3x$$

$$\left(\frac{-x^4}{-3x}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}$$

$$6\ln(3x) - 2\ln(9x^3)$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}$$

$$6(\ln(3) + \ln(x)) - (2(\ln(9) + \ln(x^3)))$$

$$6\ln(3) + 6\ln(x) - 4\ln(3) - 6\ln(x)$$

$$(x^6)^{\ln(3x)} = 3^{\ln(3x)} \cdot x^{2\ln(9x^3)}$$

$$2\ln(3)$$

$$x^{6\ln(3x) - 2\ln(9x^3)} = 3^{\ln(3x)}$$

$$y^2 + 2xy +$$

$$y^2 + 2xy$$

$$y < 0$$

$$x > 0$$

$$2y^2 + 4xy - 6x^2 + 24x + 8y = 0$$

$$(y^2 + 4xy + 4x^2) + (y^2 + 8y + 16) - 10x^2 + 24x = 16$$

$$y^2 + 2xy + 4y$$

$$y(y + 2x + 4) - 3x(x + 4)$$

$$y^2 + 2xy + 4y - 3x^2 + 12x$$

$$y^2 + y(2x + 4) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$D = (2x + 4)^2 + 12x^2 - 48x = 0$$

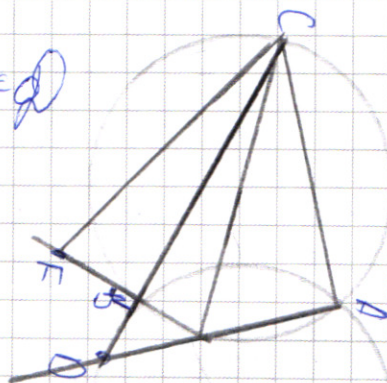
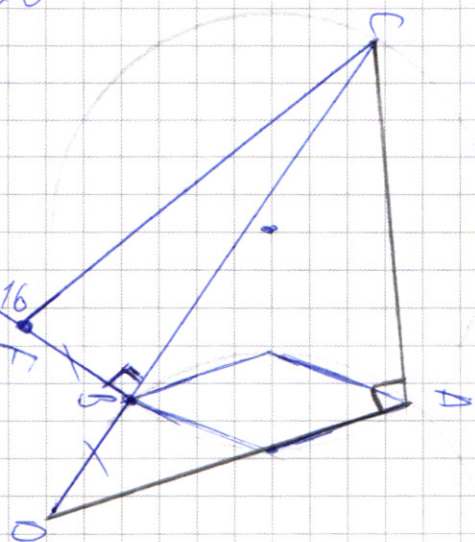
$$4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x = 16x^2 - 32x + 16 = 0$$

$$(4x - 4)^2 = 0$$

$$y = \frac{-2x - 4 + 4x + 4}{2}$$

BE

AE B A C D



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \sin 4x + \cos 3x - \sin 6x + \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sqrt{2}(\cos(7x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x \quad \sin 4x - \sin 6x = 2 \cos 5x \sin(x)$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \cos 5x \sin 2x + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)) = 0$$

или

$$\begin{cases} y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \\ \left(-\frac{x^4}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(y^2)} \end{cases}$$

$$0 \leq y < 0$$

$$x > 0$$

$$\ln\left(-\frac{x^4}{y}\right)^{\ln(-y)} = \ln(x^{2 \ln(y^2)})$$

$$\ln(-y) \ln\left(-\frac{x^4}{y}\right) = 2 \ln x$$

$$x^{6 \ln(5x) - 2 \ln(9x^3)}$$

$$x^{6 \ln(5x) - 2(\ln 9) + \ln(x^3)}$$

