

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

N7 (проверка) (проверка):

$$x = 37 : 3^{37} + 4 \cdot 3^{37} + 93 - 93 - 37 \cdot 3^{37} = 3^{37} - 3^{37} = 0 - \text{верно}$$

Планка образна, поэтому равномерно распределенным значением $x \in \{5 \dots 30\}$.

Можно считать, что число пар распределенных значений

$$\text{вероятность: } \sum_{i=5}^{30} f(i) = 3^{28} \cdot \left(\frac{37 \cdot 30}{2} - \frac{5 \cdot 4}{2} \right) + 93 \cdot (30 - 5 + 1) -$$

$$- 3 \cdot \left(\frac{37 \cdot 30}{2} - \frac{5 \cdot 4}{2} \right) + \frac{3^5 \cdot (3 - 1)}{3 - 1} = 3^{28} \cdot 455 + 93 \cdot 26 - 3 \cdot 455 + \frac{3^7 - 3^5}{2} =$$

$$= 3^{28} \cdot 455 - 1053 + \frac{3^{37} - 3^{26}}{2} = \frac{3^{37} - 243 - 2106 + 3^{28} \cdot 970}{2} =$$

$$= \frac{3^{28} \cdot 970 - 2349 - 3^{28} \cdot 93 - 2349}{2}$$

$$\text{Orblem: } \frac{3^{28} \cdot 970 - 2349}{2} = \frac{3^{28} \cdot 970 - 2349}{2} \quad \text{Orblem: } \frac{3^{28} \cdot 1145 - 2349}{2}$$

$$N2. \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$1) \cos 7x + \cos 3x = 2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x$$

$$2) \sin 7x - \sin 3x = 2 \cdot \cos 5x \cdot \sin 2x$$

$$2 \cdot \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$(\sin 2x + \cos 2x) \cdot (2 \cdot \cos 5x + \sqrt{2} \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cdot \sin 2x) = 0$$

$$I) \sin 2x + \cos 2x = 0 \quad | : \sin 2x \neq 0, \text{ т.к. } \sin 2x = 0 - \text{не реш.}$$

$$\tan 2x = -1$$

$$2x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$II) 2 \cdot \cos 5x + \sqrt{2} \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cdot \sin 2x = 0 \quad | : 2$$

$$\cos 5x + \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \cdot \cos \left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8} \right) \cdot \cos \left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 7. $64827 = 3^3 \cdot 7^4$ - это число можно разложить, как произведение 8 цифр 2 способами: 1/ $64827 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$
2/ $64827 = 1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$.

II. Попробуем n_1 и n_2 :

$$1/ n_1 = 8 \cdot C_7^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 270$$

$$2/ n_2 = 8 \cdot 7 \cdot C_6^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 840$$

$$n_1 + n_2 = 270 + 840 = 1110$$

Ответ: число способов = 1110. - это n_1 и n_2 - количество чисел, у которых...

$$N 7. \begin{cases} x \geq 3^x + 4 \cdot 3^{-8} \\ x \leq 93 + 3 \cdot (3^{27} - 1) \cdot x \end{cases}$$

Чтобы решить систему неравенств, нужно рассмотреть
каждое из них:

$$93 + 3^{28} \cdot x - 3x > 3^x + 4 \cdot 3^{-8}$$

$$f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{-8} + 3x - 93 - 3^{28} \cdot x < 0$$

$$f'(x) = \frac{3^x}{\ln(3)} + 3 - 3^{28} - \text{это монотонно возрастающая ф-ция} \Rightarrow$$

Функция $f(x)$ имеет 1 корень $\Rightarrow$ если у ф-ции $f(x)$ есть
корень, то он и есть корень 2; проверим догадку, что

$$\text{этот корень: } \begin{cases} x = 4 \\ x = 37 \end{cases}$$

$$\text{Проверка: } x = 4: 81 + 4 \cdot 3^{-8} + 12 - 93 - 3^{28} \cdot 4 = 0 - \text{верно}$$

$$2 \cdot \cos 3x \cdot \cos 2x + 2 \cdot \cos 3x \cdot \sin 2x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$\cos(3x+2x) = \cos 3x \cdot \cos 2x - \sin 3x \cdot \sin 2x$$

$$2 \cos 3x (\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0 \quad | : \sin 2x + \cos 2x \neq 0$$

$$2 \cos 3x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$2 \cdot (\cos 3x \cdot (\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2} \cdot (\sin 2x + \cos 2x) / (\cos 2x - \sin 2x)) = 0$$

$$(\sin 2x + \cos 2x) (2 \cos 3x + \sqrt{2} \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cdot \sin 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} / \sqrt{2} \cdot \cos 2x + \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cdot \sin 2x + (\cos 1x - \sin 1x) = 0$$

$$\cos 2x (\sqrt{2} \cdot \cos 3x + 1) - \sin 2x (\sqrt{2} \cdot \sin 3x + 1) = 0$$

$$64 + 225 = 289$$

$$64 + 23^2 = 65 + 519 = 594$$

$$215 + 2 =$$

$$23^2 + 225 + 25^2 = 785 + 5 + 6 = 801$$

$$576 + 529 = 1105$$

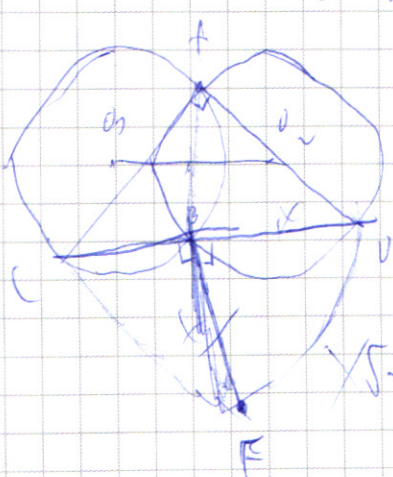


$$3x + 4x =$$

$$7x = 2l$$

$$l = 7,5 \text{ km}$$

$$R = 17$$



$$(F_{-1})$$

$$(F_{-1})$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 23 \\ \hline + 69 \\ \hline 46 \\ 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 24 \\ \hline + 96 \\ \hline 48 \\ 576 \end{array}$$

$$\frac{x \ln(-y)}{-y \ln(-y)} = x \frac{\ln(x^2 y^4)}{\ln(-y)}$$

$$\frac{\ln(-y)}{\ln(-y)} = \frac{\ln(x^2 y^4)}{\ln(-y)}$$

$$\frac{\ln(-y^2) - \ln(x^2 y^4)}{\ln(-y)}$$

$$\frac{x}{y \ln(-y)} = x \frac{\ln(-\frac{y^3}{x^2})}{\ln(-y)}$$

$$y = -x \frac{\ln \frac{y^3}{x^2}}{\ln(-y)} = -x \frac{\ln y - \frac{2}{3} \ln x}{\ln(-y)} = -x^{\frac{2}{3}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cdot (\cos 3x \cdot \cos 2x + 2 \cdot \cos 3x \cdot \sin 2x + \sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)) = 0.$$

$$\sqrt{2}(\cos 2x + (\cos 2x + \sqrt{2} \cdot \cos 2x) + \sin 2x(\cos 2x - \sin 2x)) = 0$$

$$\cos x = v, \quad \sin x = v, \quad \sinh v = w, \quad 3 \cdot x - 3 \cdot x + 93 - 3 - 4 \cdot 3 =$$

$$2uv + 2vw + \sqrt{2}(v^2 - w^2) = 0$$

$$2UV + 2VW + \sqrt{2}V^2 - \sqrt{2}W^2$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{\ln(x y^2)}$$

$$-\frac{x^{17} \ln(x)}{27 \ln(x)^2} - \frac{x^{2 \ln(x)^2}}{50}$$

$$y^2 + 4y = 0$$

$$y(y+4)=0.$$

$$\frac{x \ln(-y)}{x} - x \ln(x^2)$$

$$v \ln(-1/y) + v \ln(4y)$$

$$\int x^2 \ln(x^4) dx = \frac{1}{3} x^3 \ln(x^4) - \frac{4}{9} x^3 + C$$

$$L_{X^{\ln(-y)}} (\cancel{x} \cdot f \cdot \cancel{y})$$

$$x - x^{\ln\left(\frac{x^2}{-y^3}\right)} = -7$$

$$2x^2 - 4x$$

$$\sum_{i=0}^8 = 3 \cdot 455 + 3 \cdot 26 - 3 \cdot 455$$

$$q=3. \quad \frac{q^3-1}{q-1} = (q+1) \cdot b$$

$$\begin{array}{r} 2478 \\ 1365 \\ \hline 1053 \end{array}$$

cf 3: $y < 0$; $x > 0$, ≤ 5

$$6 \quad 6q \quad 6q^2 \quad \dots \quad S = \frac{6 \cdot (1 - 9^7)}{1 - 9}$$

$$= 0 \quad (x \neq 0) \quad x > 0, y < 0. \quad q-1$$

$$\ln K \cdot 100 \rightarrow K = 1 - \text{percent} \quad 77.5 =$$

26. -mev. $b = 3$ $q = 3$ $n = 26.75$

$$-y \nabla_x y$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad -4 \quad 3 \quad 2$$

$$|x| - y > 0 \quad |y > x^2$$

$\partial_{\alpha} \rightarrow \text{differ}$

$$y/x = 0. \quad y + x \ln\left(\frac{1}{x^2 y^2}\right) = y + x \ln\frac{1}{x^2}$$

$$\ln\left(\frac{x^3}{\sqrt{3}}\right) = 0 \quad y = -x^{-1/2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$\frac{1}{10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{10} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

$$1. \dots 4 = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

50. $\underline{31 \cdot 30} = 31 \cdot 29 = 310 + 795 = 1105$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 4 \overline{) 55} \end{array} \times \begin{array}{r} 11 \\ 4 \overline{) 55} \end{array} = 9$$

$$\Sigma = 6 \cdot 3^5 \cdot 7 = 1365$$

$$\begin{array}{r} 186 \\ 241 \end{array}$$

$$N2. 2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \cos 5x \cdot \sin 2x = 2 \cos 5x \cdot (\cos 2x + \sin 2x) \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$x = 5 \rightarrow 5 + 4 \cdot 3^8 \quad x = 5: y = 3^5 + 4 \cdot 2^8 = 4 \cdot 3^8 + 2 \cdot 43$$

$$y \leq 93 + 3^8 \cdot 5 - 75 \quad x \in (5; 30)$$

$$\frac{2^8}{3} x + 4 \cdot 3^8 = \frac{2^8}{3} x (2 + 4 \cdot 2)$$

$$N4. |x+y+8| + |x-y+8| = 16. \quad x+y+8 \geq 0; \quad x-y+8 \geq 0.$$

$$2x+16=0$$

$$x=0; \quad y \in [0; 8]$$

$$x=0.$$

$$x+y+8 \leq 0; \quad x-y+8 \leq 0.$$

$$N6. -8 - x - y - 8 + y - x = 16.$$

$$-2x = 16 = 16$$

$$y - 8 \leq 0. \quad y \leq 8.$$

$$-y - \frac{8}{x} \leq 0.$$

$$y \geq -\frac{8}{x}$$

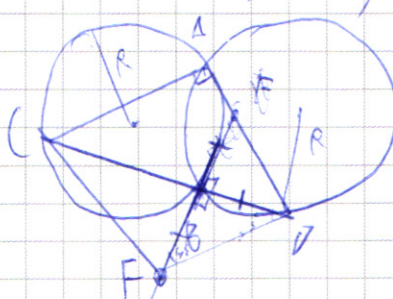
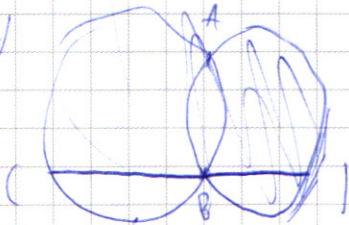
$$-2x = 32$$

$$x = -16$$

$$|x-8| + |y-15| = 16 \quad x = -16 \quad y \in [-8; 8].$$

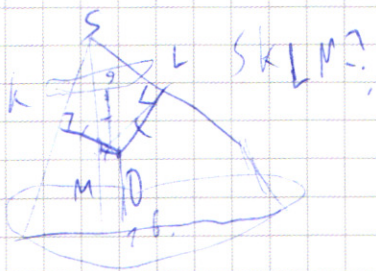
$$+ 75; 8; 19; 8; 16.$$

N 6. d)



(F -)

$$49 + 64 = 113$$



$$x+y+8 \geq 0 \quad x-y+8 \leq 0.$$

$$x+y-18 \quad x+y-8 = 16$$

$$y=8.$$

$$x+y+8 \leq 0.$$

$$x \leq 0.$$

$$x-y+8 \geq 1.$$

$$-x-y-8 + x-y+8 = 16$$

$$-2y = 16. \quad y = -8.$$

$$a < 49 - 64 \text{ или}$$

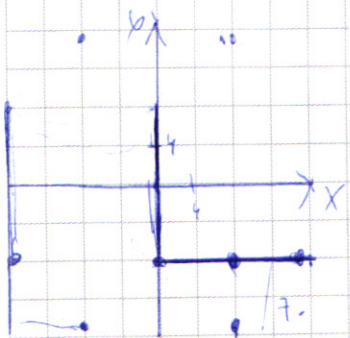
$$a = 49 - 70 \text{ или}$$

$$x > 0.$$

$$x \leq 16.$$

$$a \in (\pm 8; \pm 19) \text{ и } R = \sqrt{a}$$

$$a \in (5; 16) \cup (49; 64).$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1. В равно. $\begin{array}{r|l} 6 & 48 \\ 2 & 1609 \\ 7 & 203 \\ 2 & 407 \\ 3 & 43 \\ 4 & 9 \\ 7 & 7 \end{array}$

$7^4 \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot 704 = 2 \cdot 704 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7^2 + 2 \cdot 704 \cdot 3^3$

7-значное число: $8 \cdot 7 \cdot \binom{2}{8} \cdot \binom{7}{1} =$

$(7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 8 \cdot 8 \cdot 5 =$

$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

В равно. upper bound 1

$1 \cdot 8 \cdot 8 = 35 - 8 = 270$

$4 \cdot 110 = 1080$

$x, y \in \mathbb{Z}$

N2. $y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

$y \leq 93 + 3^{28} - 3x$

возможны, когда $x=37$

$93 + 3^{28} - 3x > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

$3^x + 3^{28} - 3x - 93 < 0$

N3. $\cos 7x + \cos 3x =$

$\cos(5x+2x) + \cos(5x-2x) =$

$= \cos 5x \cdot \cos 2x - \sin 5x \cdot \sin 2x +$

$\cos 5x \cdot \cos 2x + \sin 5x \cdot \sin 2x = 2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x$

$\sin 7x - \sin 3x = \sin(5x+2x) - \sin(5x-2x) = \sin 5x \cdot \cos 2x + \sin 2x \cdot \cos 5x$

$\cos 5x - \sin 5x \cdot \cos 2x + \sin 2x \cdot \cos 5x = 2 \sin 2x \cdot \cos 5x$

$2 \cos 5x + \cos 2x + 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$2 \cos 5x - \cos 2x + \sqrt{2} \cdot \cos^2 2x + 1 \cdot \sin^2 2x - \cos 5x - \sqrt{2} \cdot \sin^2 2x = 0$

$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

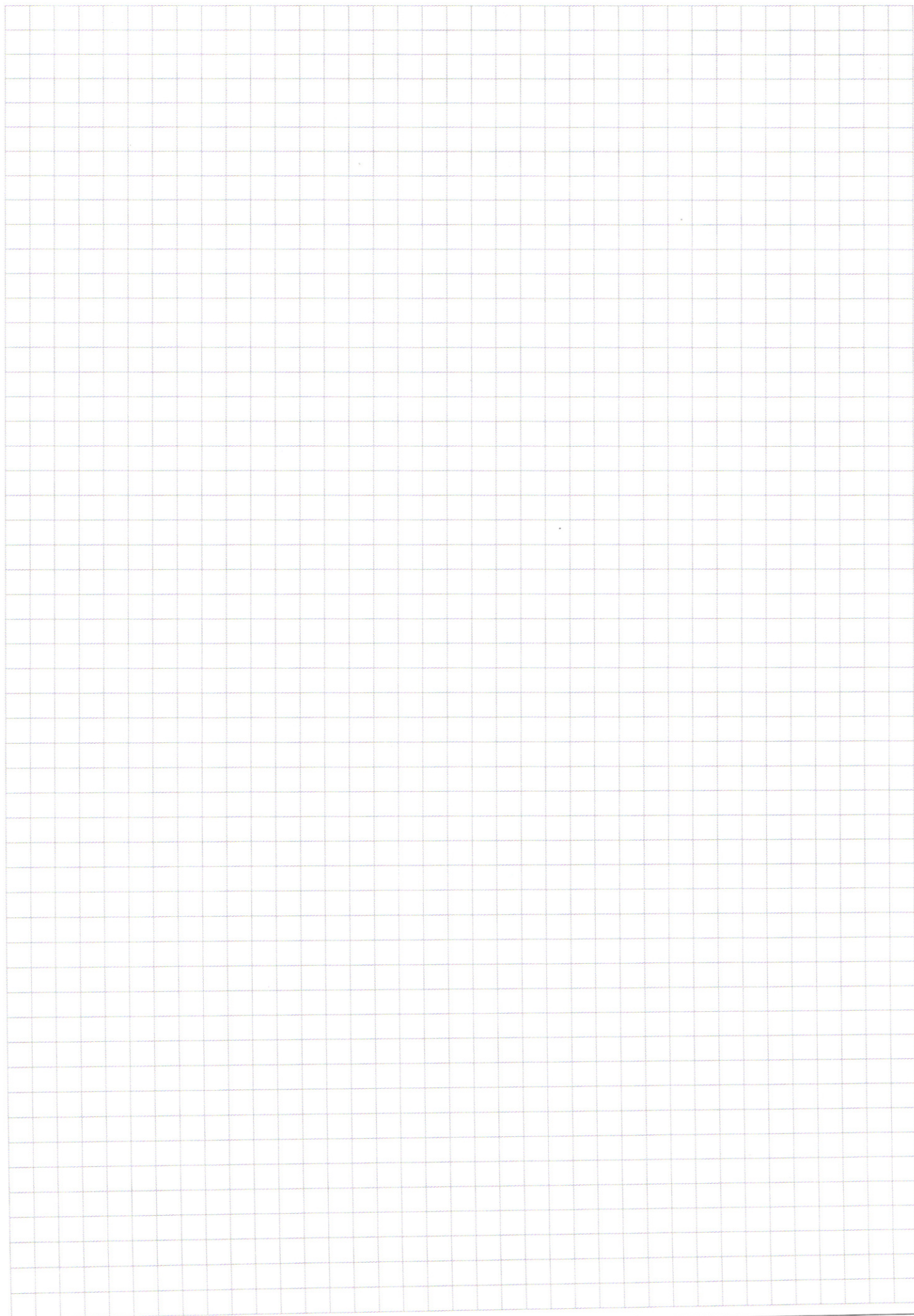
$y \leq 93 + 3^{28} - 3x$

$93 + 3^{28} - 3x > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

$3^x + 3^{28} - 3x - 93 < 0$

$f(x) = 3^x + 3^{28} - 3x - 93 < 0$

$f'(x) = \frac{3^x}{\ln(3)} - 3^{28} + 3 \ln 3 \cdot 3^x - 3 \cdot \ln(3)$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (прозрачные): 9) Если $a \in (599; 801)$, то $\exists$ 4 решения.

10) Если $a = 801$, то $\exists$ 3 решения

11) Если $a \in (801; 1105)$, то $\exists$ 4 решения.

12) Если $a = 1105$, то $\exists$ 2 решения - интервал $(-16; -8)$, $(-16; 8)$.

13) Если $a > 1105$, то решений не будет.

Ответ: $a \in \{599^*, 1105\}$.

№5 (продолжим) 2) $x+y+8 \leq 0$; ~~$x-y+8 \leq 0$~~ :

$$-x-y-8 - x+y-8 = 16$$

$$-2x = 32$$

$$x = -16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -16 \\ y \leq 8 \\ y \geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -16 \\ y \in [-8; 8] \end{cases}$$

3) $x+y+8 \geq 0$; $x-y+8 \leq 0$:

$$x+y+8 - x+y-8 = 16$$

$$y = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -16 \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x \in [-16; 0] \end{cases}$$

4) $x+y+8 \leq 0$; $x-y+8 \geq 0$:

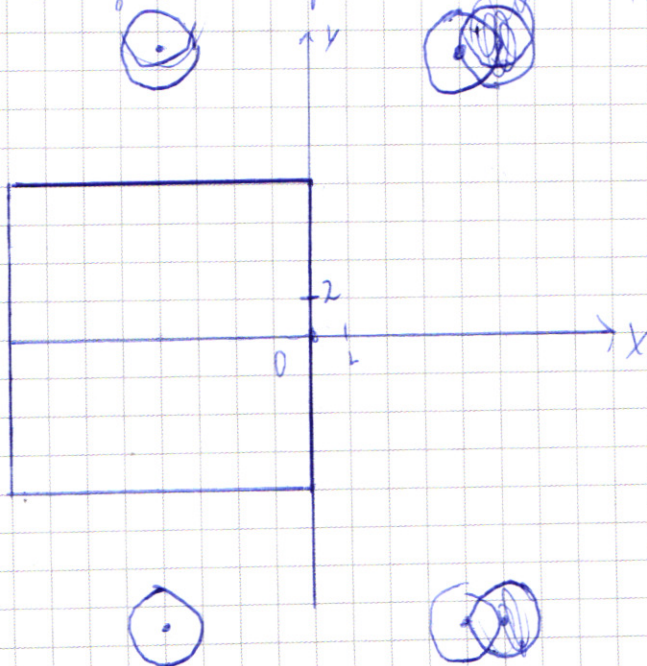
$$x-y-8 + x-y+8 = 16$$

$$y = -8 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -8 \\ x \in [-16; 0] \end{cases}$$

II Решением ур-я $(x-8)^2 + (y-15)^2 = 9$ являются 4

~~точки~~ окружности (центры в точках $(8; 15)$, $(8; -15)$, $(-8; 15)$, $(-8; -15)$). И радиус $\sqrt{9}$

III Изобразим решение на графике:



1) Если $a \in (-8; 49)$, то решение не имеет

2) Если $a = 49$, то $\exists 2$ решения: $(-8; 8)$

3) Если $a \in (49; 173)$, то $\exists 4$ решения

4) Если $a = 173$, то $\exists 4$ решения

5) Если $a \in (173; 289)$, то $\exists 6$ решений

6) Если $a = 289$, то $\exists 4$ решения

7) Если $a \in (289; 594)$, то $\exists 6$ решений

8) Если $a = 594$, то $\exists 4$ решения

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение):

$$\begin{cases} (0) \left(\frac{7}{2}x + \frac{\pi}{8} \right) = 0 \\ (1) \left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{2}x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi q, q \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{2}x = \frac{3\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{2}x = \frac{5\pi}{8} + \pi q, q \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi q, q \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi q, q \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

№5. $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x| \neq 8) \vee (|y| \neq 8) \end{cases}$

I $|x+y+8| + |x-y+8| = 16$

~~1) $x+y+8 \geq 0$; $x-y+8 \geq 0$:~~

~~$x=8$; $y+16 \geq 0 \Rightarrow y \geq -16$ $\Rightarrow$ $x=8$
 $y \leq 16 \Rightarrow y \in [-16, 16]$~~

1) $x+y+8 \geq 0$; $x-y+8 \leq 0$:

$x=0$

$x=0$; $\begin{cases} y \geq -8 \\ y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y \in [-8, 8] \end{cases}$