

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) Разобьем число 64827 на простые множители.

Тогда $64827 = 3^3 \cdot 7^4$ т.е. цифра в составе числа делится либо на 7 либо на 3, либо цифра -1. (в прот. случае появится новое пр. дел.)

Число может состоять из 1, 3, 7 и 9 (примеч. не делится на 5, т.е. в прот. случае кол-во 3, больше 3). Другие цифры не вст. ($7 \cdot 7 > 9$, $3 \cdot 7 > 9$) Состав числа: два варианта.

6. Число

три тройки
чет. семерки
одна единица.

одна дев.
одна тройка
две ед.
чет. сем.

Вариантов расш-ия

Тройки C_7^3 (тройка три, одна)

Тогда семерки можно расш-ить в состав-ке 5 месток т.е.

C_5^4 , а ед. в одной месте.

$$h_1 = C_8^3 \cdot C_5^4 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280$$

$$N = h_1 + h_2 = 280 + 840 = 1120$$

Ответ: 1120 чисел.

Семерку можно расш-ить в 8 м., или всего 4. C_8^4

2 Единицы в оставш-их 4 места C_4^2 , а девятку и тройку в 2 и 1 соот-но

$$h_2 = C_8^4 + C_4^2 + 2 = 70 + 6 + 2 = 78$$

$$= \frac{8!}{4! \cdot 4!} + \frac{4!}{2! \cdot 2!} + 2 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2} + 2 = 840$$

$$2) \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$4x = 7x - 3x \rightarrow \cos 4x = \cos(7x - 3x) = \cos 4x \quad \cos 7x = \cos(5x + 2x), \cos 3x = \cos(5x - 2x)$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x, \quad \sin 7x - \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 5x \cos 2x + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

cos 4x

$$\sqrt{2} \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(\sqrt{2} \cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$\cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x = 0$$

$$\tan 2x = -1$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2x = \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right\} \rightarrow x = \left\{ -\frac{\pi}{8} + \pi k \right\}$$

$$\cos 5x + \cos 2x \cos \frac{\pi}{4} - \sin 2x \sin \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

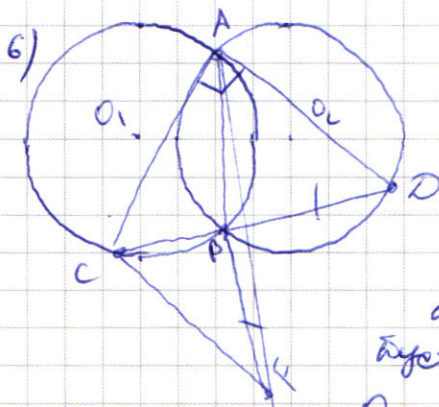
$\cos 5x = -\cos(2x + \frac{\pi}{4})$, Заметим, ~~что~~ ^{кон} на трисом.-ом не имеет точки с прот.-ым по знаку кос.-ом.



~~Будет~~ $5x = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$
 $x = \frac{3\pi}{24} + \frac{2\pi k}{4}$

$5x = \pi + 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k$
 $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; $x = \frac{3\pi}{24} + \frac{2\pi k}{4}$, $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$.



Зам. Т.к. радиусы равны, то дуги, на кот-ые отрезаны т. С и D равны (дуги отдел. областью пересечения равны) $\rightarrow \angle ACP = \angle ADP$, т.е. А $\in$ CD - перпен.-ой, а т. В $\in$ CD, $\angle ACB + \angle ADB = 90^\circ$

$\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$ Будет $AC = AD = \frac{CD}{\sqrt{2}}$
 Будет $\angle CAB = \alpha$, а $\angle BAD = 90^\circ + \alpha$.

O и O2 - центры окр.-ей. Тогда $\angle O1B = 2\alpha$, а $\angle BO2D = 180^\circ - 2\alpha$

$BC = R \sqrt{2 - 2\cos 2\alpha}$ (по т. кос.-ой для $\triangle BO1C$) Аналогично $BD = R \sqrt{2 - 2\cos(180^\circ - 2\alpha)} = R \sqrt{2 + 2\cos 2\alpha}$, Т.к. $BF = BD = R \sqrt{2 + 2\cos 2\alpha}$

$\angle FBC = 90^\circ$ (FB - перпен.) $CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = R \sqrt{2 - 2\cos 2\alpha + 2 + 2\cos 2\alpha} = 2R = 34$

$BC = 16 = 17 \sqrt{2 - 2\cos 2\alpha} \rightarrow \cos 2\alpha = \frac{161}{289} \rightarrow BD = 17 \sqrt{2 + \frac{2 \cdot 161}{289}} = 30$

~~AC~~ $CD = 46$, а $AC = \frac{46}{\sqrt{2}} = 23\sqrt{2}$

$\sin \angle BCF = \frac{BC}{CF} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$ $\sin \angle BCF = \frac{15}{17}$ (по окр. трисом. танг-у)

$S = \frac{AC \cdot CF \sin \angle ACF}{2} = \frac{AC \cdot CF}{2} \cdot \sin(45^\circ + \angle BCF) = \frac{23\sqrt{2} \cdot 34}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{8}{17} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{15}{17} \right) =$

$= 23^2 = 529$

Ответ: $S = 529$, $CF = 34$

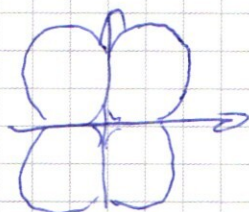
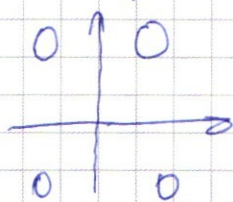
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$ — ~~не задает значения~~ при ~~каждом~~ ~~значении~~ при ~~каждом~~ ~~значении~~ ~~паре~~
 (x_0, y_0) подп. ~~пара~~ $(-x_0, -y_0)$, $(-x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$ (модули).

Тогда при $x \geq 0$ и $y \geq 0$ — это окр-ть с радиусом 15 и центр. в $(8; 15)$.

Тогда в IV четв. ~~рис~~ график симм. отн-о Ox , во II Oy , а в III от O .
Примеры:

(Если окр. попадает в другую четверть, то
эта часть не рисуется)



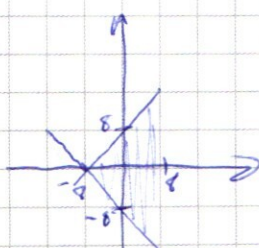
$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

1) $x+y \geq -8$

$$x-y \geq -8$$

$$y \geq -8-x$$

$$y \leq x+8$$



$$x+y+8+x-y+8=16$$

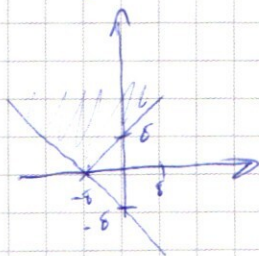
$$x=0$$

2) $x+y \geq -8$

$$x-y \leq -8$$

$$y \geq -8-x$$

$$y \geq x+8$$



$$x+y+8-x+y-8=16$$

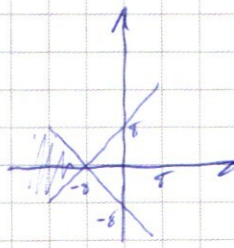
$$y=8$$

3) $x+y \leq -8$

$$x-y \leq -8$$

$$y \leq -8-x$$

$$y \geq x+8$$



$$-x-y-8-x-y-8=16$$

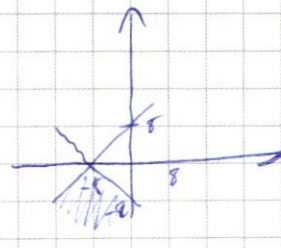
$$x=-16$$

4) $x+y \leq -8$

$$x-y \geq -8$$

$$y \leq -8-x$$

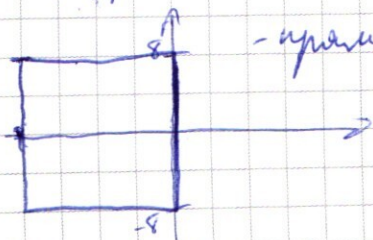
$$y \leq x+8$$



$$-x-y-8+x-y+8=16$$

$$y=-8$$

График:



— прям-ки.

Заметим что он симметр. отн. Ox . Тогда
если одна из 4 окруж. пересекает прям-ки,
то ~~ни одна~~ ~~тогда~~ симм-ная ей отн-о Ox тоже.

Восстаем от окр. центров окр. II и III чет. I , а IV и II

Значит если I и IV сфер. пересекут прям.-ые SO и III там же (на расстояниях меньше). Y II и IV сфер. по одной точке пересечения (т.е. точка-точка касания). $R = d$ (где R - радиус сфер, а d - расстояние до прямой), $d = \frac{y}{2}$ $d = 7$ ($y = 14$) $\rightarrow a = 49$ $R^2 = d^2 = 49$

Ответ: $a = 49$ Ответ: $a = 49$

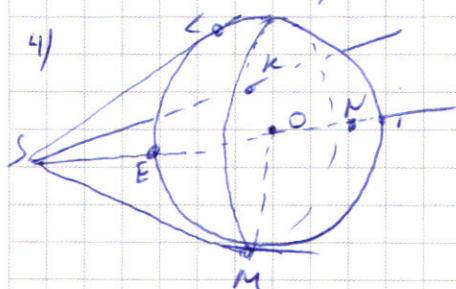
Р5.Р5. Возможно, что окружности будут симметричны SO и не будут. Прям.-ые будут иметь SO и III , но с I и IV сфер. не пересекаются. Т.е. они на графике a полностью, а линия SO и, как-то полагается в соответ. четверти. Если у двух сфер. общая точка пересечения, то у каждой по отдельности есть еще одна, либо их вообще. Тогда решений либо 1, либо 3. Есть вариант, когда обе окружности проходят через $(0, 0)$.

Тогда эта точка также будет принадлежать. $(x-0)^2 + (y-0)^2 = a$

А тогда $a = (\sqrt{25+64})^2 = 289$. Для I и IV сфер. это будет единственная точка пересечения. Для II и III будет еще одна, а именно $(0, -16)$ и $(-16, 0)$ - общие на обе из них.

Т.е. есть еще точка с двумя решениями, при $a = 289$

Ответ: $a = \{49, 289\}$



$\angle LSO = \angle KSO = \angle MSO$ (рассмотрим прям.-ые SO и KSO , ESO и MSO , $OL = OK = OM$ - радиусы, SO - общ., они равны.)
 $\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO}$. Пусть $OK = 2R$, E, N - т. пересечения прямой SO со сферой; $EN = 2R$ (диаметр)

Заметим что плоскости сечения касаются сферы в центре и перпендикулярны SO . Прям.-ые SE и SN перпендикулярны этим плоскостям сечения - а значит, и SO перпендикулярна им. Т.е. $SE \perp SO$ и $SN \perp SO$.

Значит $\angle SEN = 90^\circ$. Коэффициент подобия $\frac{SN}{SE} = \sqrt{\frac{SO}{SE}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \rightarrow SE = \frac{3}{4} SN$

Тогда если $SN = x$, то $SE = \frac{3}{4}x$, то $EN = \frac{x}{4}$. То $EN = 2R \rightarrow 2R = \frac{x}{4}$, $\frac{R}{x} = \frac{1}{8} \rightarrow \frac{EN}{OK} = \frac{1}{8}$ $SO = SE + \frac{EN}{2} = \frac{3}{4}x + \frac{x}{8} = \frac{7}{8}x$

$\rightarrow \sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{2R}{\frac{7}{8}x} = \frac{2}{7} \frac{R}{x} = \frac{1}{7} \rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$

Ответ: $\sin \angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{2x} \\ y \leq 55 + 3 \cdot 3^{2x} - 1 \end{cases}$ - если здесь $x \neq 2$

$x+y > -8$ $y > -8-x$
 $x-y > 8$ $y < x+8$

$x+y < -8$ $x < -8-y$
 $x-y < -8$ $y > x+8$

$-x-y-8+x-y+8=16$
 $-2y=16$ $y=-8$
 $-x-y-8-x+y-8=16$
 $y=-16$

$SM \sin \alpha$
 $SM \sin \alpha$

$SM = R \sin \alpha$

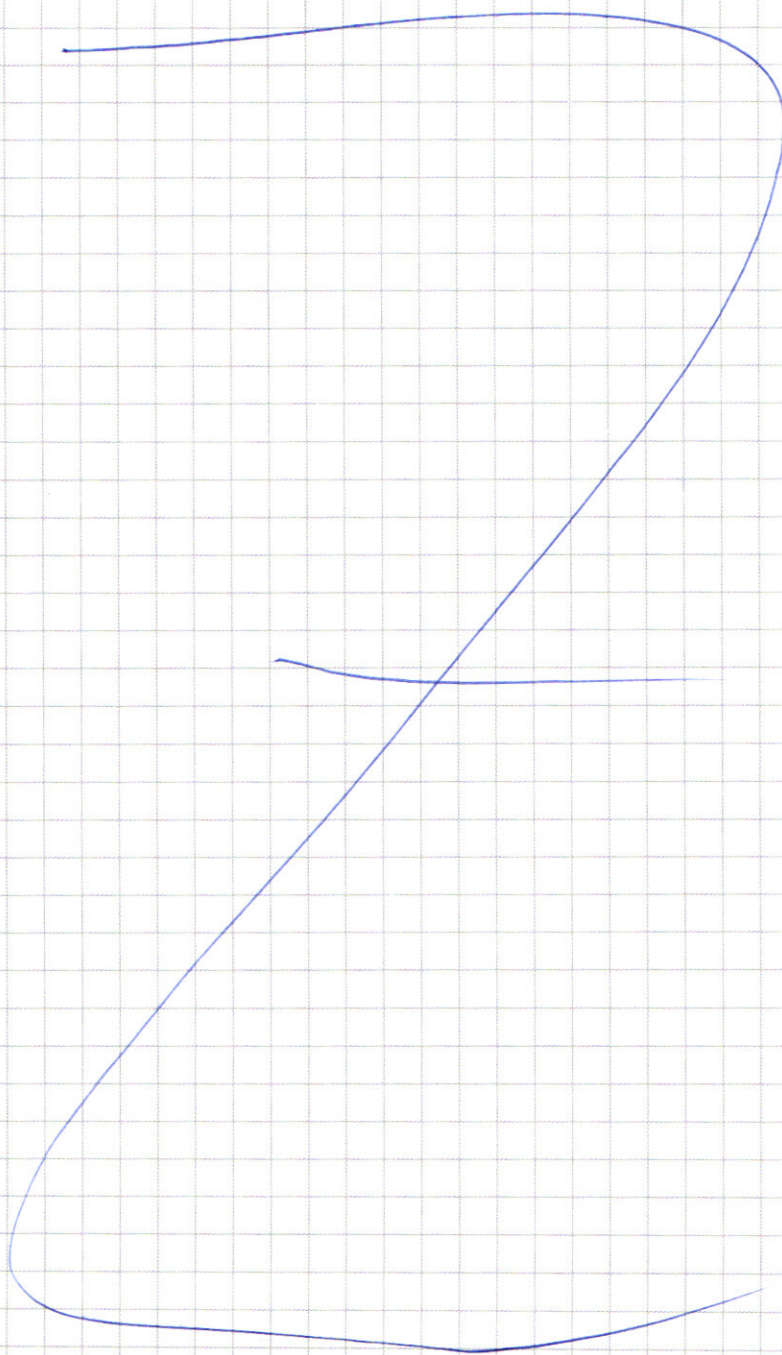
$3^x + 4 \cdot 3^{2x} = 55 + 3 \cdot 3^{2x} - 3x$
 $3^x + 4 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^{2x} = 55 - 3x$
 $3^x + 3^{2x} = 55 - 3x$
 $x=2$

$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$
 $y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$
 $2x(y+6) + y(1+y) -$
 $(-\frac{x^2}{y}) \ln(1+y) = x^2 \ln(1+y)$
 $(-\frac{x^2}{y}) \ln(1+y) = x^2 \ln(1+y)$

$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$
 $y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$
 $(y+x)^2 - 4x^2$

$\frac{1}{2+3x}$
 $I = \sin \alpha$
 $\sin \alpha = \frac{1}{6}$

$3(3^{2x} - 1) = 3^x \ln 3$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6 4 8 2 3
2 | 6 0 9 | 3
7 2 0 3 | 5
2 4 0 1 | 4
3 4 3 | 7
4 9 | 7
6 7 | 7
1 | 10

27 · 49 · 49
(3 3 3 7 7 7 7) 1
вместе 5+2

$C_8^3 \cdot C_5^4$
 $\frac{8! \cdot 5!}{3! \cdot 4! \cdot 3!}$

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x$
 $\cos 7x + \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x + \cos 3x + \sin 7x + \sqrt{2} \sin 7x \cos 3x - \sin 3x$
 $\cos(5+2)x + \cos(5-2)x = \cos 5x \cos 2x \cos 3x + \cos 5x \cos 2x \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$
 $\sin(5+2)x - \sin(5-2)x = 2 \cos 2x \cos 3x$
 $4 \cos 2x \cos 5x$

$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$
 $(|x|-6)^2 + (|y|-15)^2 = a$
 $|x+y+8| + |x-y+8| = 16$
 $-16 \leq x+y+8 \leq 16$
 $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4})$
 $\sin \frac{x+\pi}{2} + \cos \frac{x-\pi}{2} = \sin x$
 $(-\frac{x+y}{y})^{\ln y} = x^{2 \ln(xy)}$

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x$
 $2 \cos 5x \cos 3x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$
 $2 \cos 5x (\cos 3x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0$
 $\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x \sin 2x = 0$
 $\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x = \sin 2x$
 $2 \cos^2 5x + 2 \sin 5x \cos 5x \cos 2x =$

89 221 22113 224 22113
21 21 6

$C_3^1 \cdot C_1^1 = \frac{3!}{2!} + \frac{2!}{1!} = 3+2=5$

$\cos(7x-3x) =$
 $= \cos 4x \cos 3x + \sin 7x \sin 3x$
 $a+b$
 $5x \quad 2x - \frac{\pi}{4}$
 $4x \quad \frac{\pi}{2}$
 $2 \cos 5x$
 $5x + \frac{\pi}{4}$
 $3x + \frac{\pi}{4}$
 $5x + \frac{\pi}{4}$
 $5 \cdot 7 \cdot 8$
 $\frac{8!}{4! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 3!}$

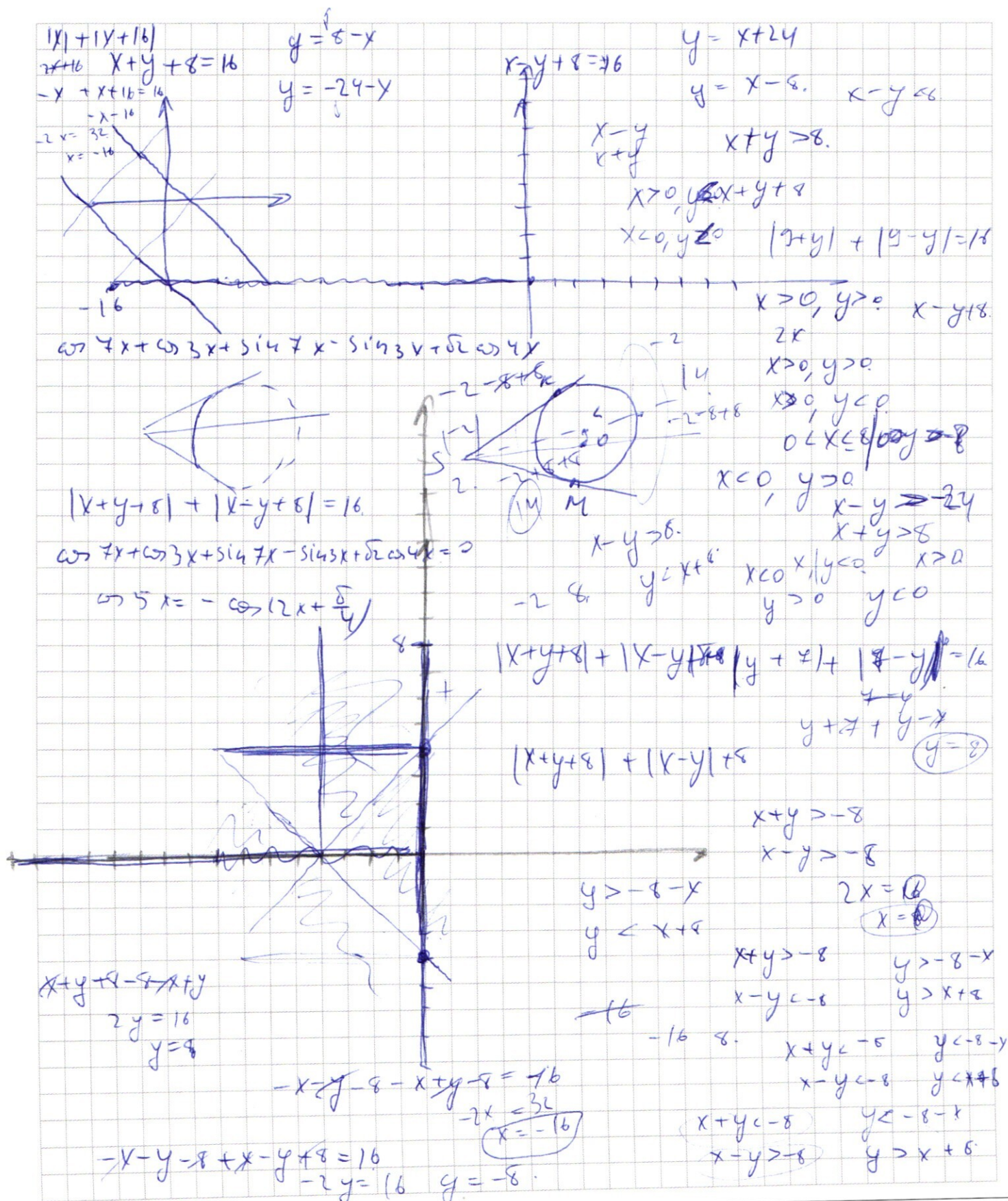
$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$
 $\sin(7x - \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$

$(y+2)^2 - 4$
 $\ln(-y) \ln(\frac{x}{y}) = 2 \ln xy / \ln x$

$\cos x - \sin x - 2 \cos x \sin x$
 $2x = \{-\frac{\pi}{4} + \pi k$

$\cos 2x = -\sin 2x \quad \tan 2x = -1$
 $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$
 $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$
 $5x = 2x + \frac{\pi}{4} + \pi k$
 $3x = \frac{\pi}{4} + \pi k$
 $5x = -2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$
 $7x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$3^x = 93 - 3x$$

(21)
(9)

$$3(x+2)$$

(24)

$$4+20 = 24$$

$$(4+3 \cdot 2) \cdot 12$$

$$43.12 - 30$$

$$y < a, x > 20$$

$$x - 21$$

$$-20$$

$$\frac{3+3+3 \cdot 2}{2} \cdot 24$$

$$\frac{23 \cdot 3 + 6}{2} \cdot 24$$

$$\left(-\frac{x^4}{y}\right)^{\ln y} = x^{2 \ln(xy)}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 + 12x = 3x^2 - 2xy - 4y - 12x$$

$$(3x+a)(x+y)$$

$$(3x^2+a)(x+y)$$

$$3x^2 + 3x$$

$$3 \cdot 2 \neq 8$$

$$(3x^2+a)(x+y)$$

$$3x^2 + (a+3y)x + ay$$

$$ab = -4$$

$$a+3b = -2$$

$$3b = -2$$

$$b = -\frac{2}{3}$$

$$a = 0$$

$$\left(-\frac{x^5}{y}\right)^{\ln y} = x^{2 \ln(xy) - \ln(-y)}$$

$$y + 2x = (3x+6)/(x+\frac{2}{3}y)$$

$$-\frac{x^5}{y} = x^{2 \ln(-xy)}$$

$$-y \ln -y = x \ln -\frac{y}{x^3}$$

$$-y \ln -y = x \ln -\frac{y}{x^3}$$

$$x^5 \ln(-y) - 2 \ln(xy)$$

$$\frac{-y}{x^2 y^4}$$

$$\ln -\frac{y}{x^2}$$

$$\ln^2 y = \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) \ln x$$

$$-y \frac{\ln -y}{\ln -\frac{y}{x^3}} = x$$

$$-y = x^{\frac{\log -y}{\log -\frac{y}{x^3}}}$$

$$\log\left(-\frac{y}{x^3}\right) = \log\left(\frac{y}{x^3}\right) 3 - \log y x^2$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 4x - \sin 3x + \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x = -\cos(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$0 < 5x < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$$

$$5x = 2x + \frac{\pi}{5} \quad 5-2x$$



$$3x/4 > 3$$

