МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

© МФТИ, 2020

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Разложим число 64827 на множители: $64827 = 3^3 \cdot 7^4$, т.е. чтобы произведение цифр числа равнялось 64827, нужно, чтобы число состояло либо из 4 семёрок, 3 троек и 1 единицы, либо из 4 семёрок, 1 тройки, 1 девятки и 2 единиц. В первом случае количество возможных вариантов из данного набора $= \frac{8!}{4!\cdot 3!\cdot 1!} = 5\cdot 7\cdot 8$; во 2 случае: $\frac{8!}{4!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8$. В итоге сложим эти варианты и получим $5\cdot 7\cdot 8 + 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 5\cdot 7\cdot 7\cdot 8 = 1960$ вариантов (~~всех~~ необходимых восьмизначных чисел)

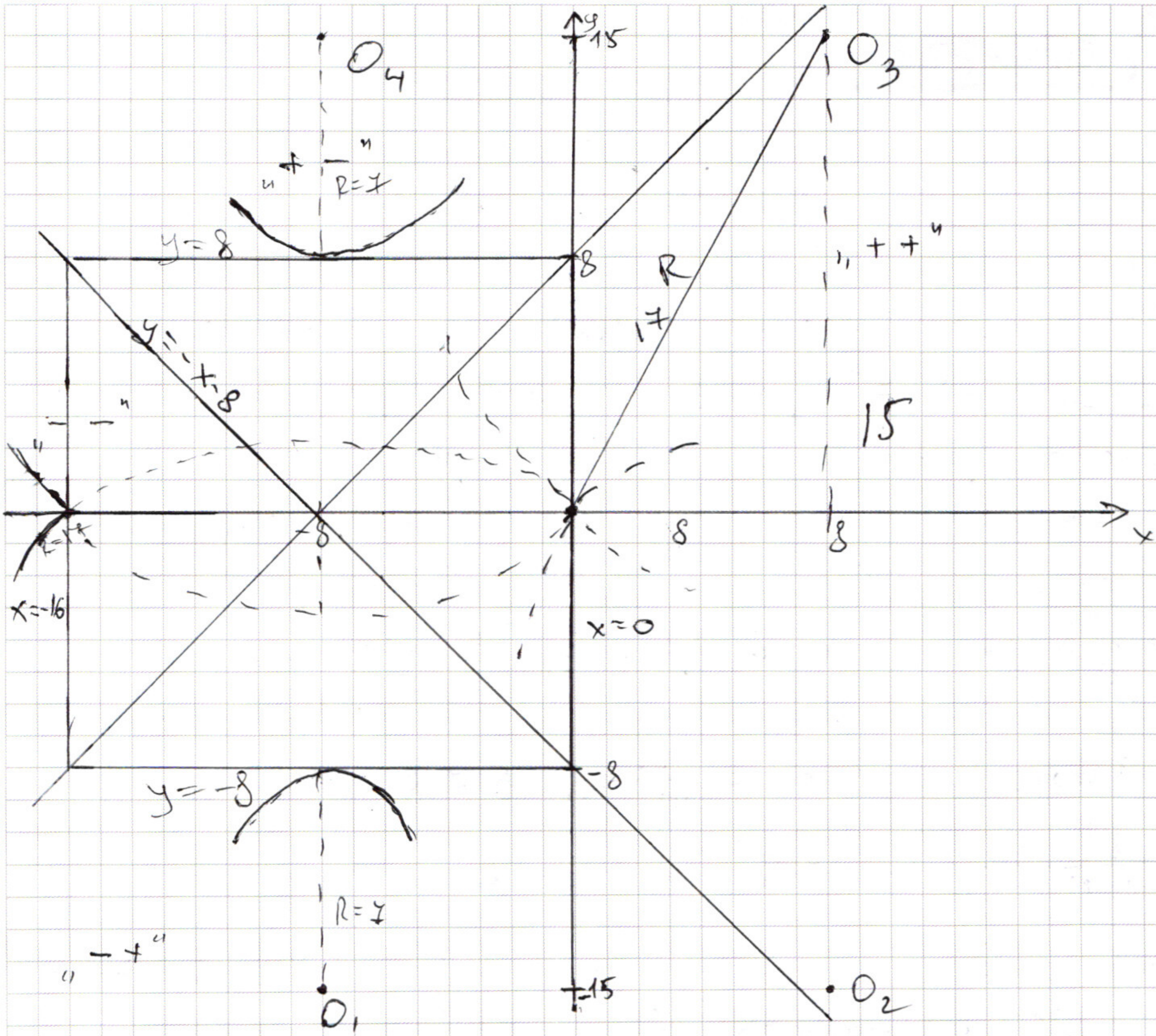
Ответ: 1960

№5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

Второе уравнение представляет собой на координатной плоскости совокупность частей 4-х окружностей в четвертях. Окружности с центрами $(8;15)$; $(-8;15)$; $(-8;-15)$; $(8;-15)$. с радиусом $\sqrt{a}$,

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)



I ур-е системы раскроем на координатной плоскости. Построим прямые, при которых модули обнуляются: $y=-x-8$ и $y=x+8$.
В каждой из 4 получившихся частей раскроем модули; „++": $x+16=16 \Rightarrow x=0$

„−−": $-x-\cancel{y}-8-x+\cancel{y}-8=16 \Rightarrow x=-16$

„+−": $x+y+8-x+y-8=16 \Rightarrow y=8$

„−+": $-x-y-8+x-y+8=16 \Rightarrow y=-8$

Для того, чтобы понять в какой „четверти" какой знак, можно подставить точку из данной „четверти"

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Таким образом 1 ур-е системы задаёт квадрат со стороной 16

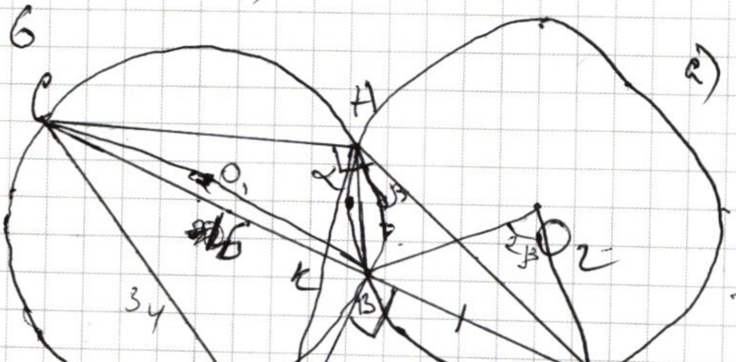
При $R=7$ (т.е. $a=49$) 2 окружности касаются квадрата, а 2 другие не имеют общих точек.

(При $R<7$ окружности не имеют общих точек с квадратом); При $7<R<17$ ~~2~~ те же окружности имеют по 2 общие точки, что уже >2 решений. При $R=17$ ($a=289$) все окружности имеют общую точку $(0;0)$, а также 2 окружности из II и III четвертей имеют ещё 1 общую точку $(0;-16)$, т.е. всего 2 решения

При $R>17$ окружности не имеют общих точек с квадратом

Ответ: 49; 289

№6



2) Проведём отрезок AB, обозначим $\angle CAB=\alpha$; $\angle BAD=\beta$, тогда $\alpha+\beta=90^\circ$, но $\angle CO_1B$ – центральный, опирающийся на ту же дугу.

Тогда $\angle CO_1B = 2\alpha$, Аналогично $\angle BO_2D = 2\beta$,

Тогда $\angle CO_1B + \angle BO_2D = 180^\circ$

Неизвестно какой из углов больше, но по т. косинусов в $\triangle CO_1B$ и $\triangle BO_2D$; квадраты сторона CB^2 и BD^2 равны $2R^2 - 2R^2\cos\gamma$; $2R^2 - 2R^2\cos(180-\gamma)$, где φ - меньший из углов $\angle CO_1B$ и $\angle BO_2D$. Неважно, какая из сторон чему равна, т.к. по условию $FB = BD$, то по т. Пифагора в $\triangle CFB$:

$$CF^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\gamma + 2R^2 - 2R^2\cos(180-\gamma) =$$
$$= 4R^2 - 2R^2\cos\gamma + 2R^2\cos\gamma = 4R^2$$

$CF = 2R = 34$

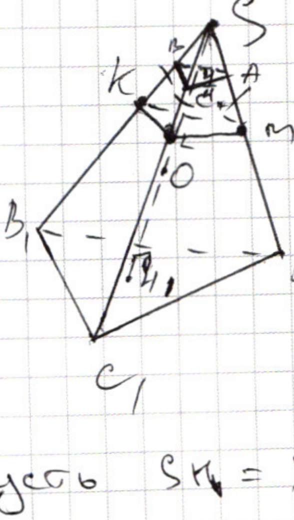
б) По т. Пифагора в $\triangle CDF$: $BF^2 + 16^2 = 34^2 \Rightarrow$

$BF^2 = 34^2 - 16^2 = 18\cdot 50 = 9\cdot 100$; $BF = 30$

$\triangle CKF$ и $\triangle CDF$; $\triangle CKA$ и $\triangle CAD$ имеют равные высоты значит их площади соотносятся, как $\frac{CK}{CD}$

Ответ: а) 34

№4



По условию $S_{\triangle ABC} = 9$; $S_{\triangle A_1B_1C_1} = 16$ т.к. SO пер-на плоскостям, то SO — высота пирамиды. Тогда A_1 из подобия $\triangle SHA$ и $\triangle SH_1A_1$:

$$\frac{SH_1}{SH} = \sqrt{\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}}} = \frac{3}{4}, \quad SH_1 = SH + 2R,$$

Пусть $SH = x$, тогда $\frac{x}{x+2R} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 6R$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

По т. о касательной и секущей:

$SH_0 \cdot SH_1 = SK^2 \Rightarrow SK = \sqrt{6R \cdot 8R} = 4\sqrt{3}R$

Отсюда в $\triangle SKO$ имеем: $SK = 4\sqrt{3}R$; $SO = 7R$; $OK = R$; По т. косинусов:

$OK^2 = SK^2 + SO^2 - 2SK \cdot SO \cdot \cos\angle KSO$

$\cos\angle KSO = \frac{\cancel{2} \cdot 48 R^2}{\cancel{2} \cdot 7 \cdot 4\sqrt{3} R^2} = \frac{12\sqrt{3}}{21} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$

$\angle KSO = \arccos \frac{4\sqrt{3}}{7}$

Ответ: $\arccos \frac{4\sqrt{3}}{7}$

№3

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

Условие: $y < 0$

Решим 2 ур-е системы:

$y^2 + (2x+4)y - 3x^2 + 12x = 0$

$D = 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x = 16x^2 - 32x + 16 = (4x-4)^2$

$y_{1,2} = \frac{-2x - 4 \pm (4x-4)}{2}$; $y_1 = x - 4$; $y_2 = -3x$

1 ур-е:

$\frac{x^{7\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} = x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln(-y)}$

№2

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0 \mid : \sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x\right) + \cos 4x = 0$

$\cancel{\cos}\ \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$

$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\cos 5x + \cos 4x = 0$

№7

$\begin{cases} y > 3^x + 4\cdot 3^{28} \\ y \le 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$ Чтобы система имела решения;

нужно, чтобы $3^x + 4\cdot 3^{28} < 3^4 + 4\cdot 3 + 3^{28}x - 3x$

$3^x - 3^4 < 3^{28}(x-4) - 3(x-4)$

$81(3^{x-4} - 1) < (x-4)(3^{28} - 3)$

$27(3^{x-4} - 1) < (x-4)(3^{27} - 1)$

При $x = 4$ левая и правая части $=$;

при $x = 31$; они также равны

Всё что между ними ~~являют~~ могут иметь решение $31 - 4 - 1 = 26$ (чисел для x)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$$\begin{cases} y > 3^x + 4\cdot 3^{28} \\ y \geq 3^4 + 4\cdot 3 + 3^{28}x - 3x \end{cases}$$

$3^x + 4\cdot 3^{28}$

$3^4 + 3^{28}x + 3(4-x)$

$3^x + 4\cdot 3^{28} < 3^4 + 4\cdot 3 + 3^{28}x - 3x$

$x=4$: $81 < 81 + 12 - 12$

$x=4$: равенство

$3^x < 3^4 + 3^{28}(x-4) - 3(x-4)$

$3^x - 3^4 < (x-4)(3^{28}-3)$

$3^4\cdot 3^{(x-4)} \to 3^4$

$3^3 \quad 3^x(3^{x-4}-1) < (x-4)(3^{28}-3)$ const

равенство при 4^+

< 4

№2

$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\cos 5x = \cos(4x + x) = \cos 4x\cos x - \sin 4x \sin x$

~~$\cos 7x + \cos(\frac{\pi}{2} - 7x)$~~

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0 \quad |:\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x + \cos 4x = 0$

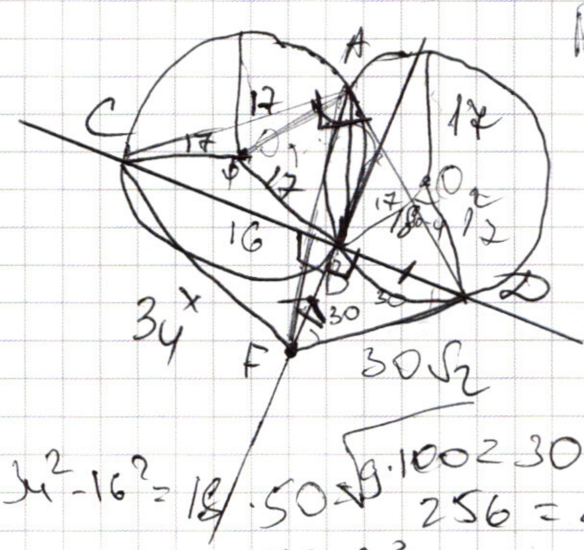
$\sin(\frac{\pi}{4} + 7x) + \sin(3x - \frac{\pi}{4}) = -\cos 4x$

$2\sin(2x + \frac{\pi}{4})\cos 5x = -\cos 4x$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№6



Пт. косинусов

$\cancel{BB}^2 = 17^2 + 17^2 - 2\cdot 17^2 \cos\varphi$

$w^2 = 17^2 + 17^2 + 2\cdot 17^2 \cos\varphi$

$x^2 = z^2 + w^2 = 4\cdot 17^2$

$x = 2\cdot 17 = 34$

$34^2 - 16^2 = 18\cdot 50 = \sqrt{9\cdot 100} = 30$

$256 = 289 + 289 - 2\cdot 289\cos\varphi$

$\frac{289+33}{289\cdot 2} = \cos\varphi$

$34^2 +$

$\cos\varphi = \frac{322}{576} = \frac{161}{289}$ $16 : \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2\cdot 17$

$\sin\frac{\varphi}{2} =$

№3

$y<0\ ;\ x>0$

$(y+x)^2 + 4y = 4x^2 + 12x + 36 - 36$

$4(y+9)$ $\qquad (2x+6)^2$

$(y+x)^2 + 4(y+9) = 4(x+3)^2$

$a^{\log_b a} = b^{\log_a b}$

$\log_a \qquad \log_a$

$(y+x)^2 - (2x+6)^2 = -4(y+9)$

$\log_b a = \log_a b \cdot \log_a b$

$(y-x-6)(y+3x+6) = -4(y+9)$

$\frac{x^{7\ln(-y)}}{-y^{\ln(-y)}} = x^{2\ln x} \cdot x^{2\ln y^2}$

a

$a^{\ln a}$

$\cancel{7\ln(-y)\ln x}$

2401 | 7, 21, 30; 343 | 7, 49

$y = \frac{-2x-4 \pm 4x-4}{2}$; $y = x-4$; $y = -3x$

$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln 3x} = x$ $\qquad 2\ln^2 x - 3\ln 3x + \ln^2 3x = 0$

6482 | 27, 54, 108, 108; 2401 | 49, 196, 441

$7^4 \cdot 3^3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$648279 : 9 = 72031$ (3), 2401 (7)

$343 = 7^3$ $3^3 \cdot 7^4$

$9 \cdot 3 \cdot 7^4$ $9^4, 3^4, 4 \cdot 7^7$ и 21^4

3 тройки (4 семерки)

1 случай $\frac{8!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ 1 ед. + 2 сл. $\frac{8!}{4! \cdot 3!} = 5 \cdot 7 \cdot 8$

№2

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 5x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x(\cos 2x + \underset{\cos(\frac{\pi}{2} - 2x)}{\sin 2x}) + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x \cancel{2\cos\frac{\pi}{4}}\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}\cos 4x$

$(\cos 2x \cos\frac{\pi}{4} + \sin 2x \sin\frac{\pi}{4})$

№3

Условие $y < 0$

$\left(-\frac{x^7}{y^4}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$

Это пол. при $x > 0$

$x^{7\ln(-y)} = x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln(-y)}$

$(-y)^{\ln(-y)}$

2) $y^2 + 2xy + x^2 + 4y = 4x^2 - 12x$

$7\ln(-y)\ln x = 2\ln^2 x + 4\ln(-y)\ln x + \ln^2(-y)$

$\ln -y^{\ln(-y)}$ $\ln^2(-y)$

№5

~~$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$~~

$\begin{cases} 2\ln^2 x - 3\ln(-y)\ln x + \ln^2(-y) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$

$4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x$

$16x^2 - 32x + 16 = (4x - 4)^2$

$y^2 + (2x+4)y - 3x^2 + 12x = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$49 \cdot 40 = 1960$

Плоскости пар-ны

$S_1 = 9$

$S_2 = 16$

$\frac{x}{x+2R} = \frac{3}{4}$

R; $x+R$; $7R$

$4x = 3x + 6R$

$x = 6R$

$SK^2 = 6R \cdot 8R = 48R^2$ $\quad SK = 4\sqrt{3}R$

R; $7R$; $4\sqrt{3}R$ пр-к.

Т. косинусов:

$R^2 = 48R^2 + 49R^2 - 2 \cdot 28\sqrt{3}R^2 \cos\alpha$

$96\cancel{R^2} = 56\sqrt{3}\cancel{R^2}\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{96}{56\sqrt{3}}$

$\frac{4\sqrt{3}}{7}$

$\boxed{\alpha = \arccos\frac{4\sqrt{3}}{7}}$

№5

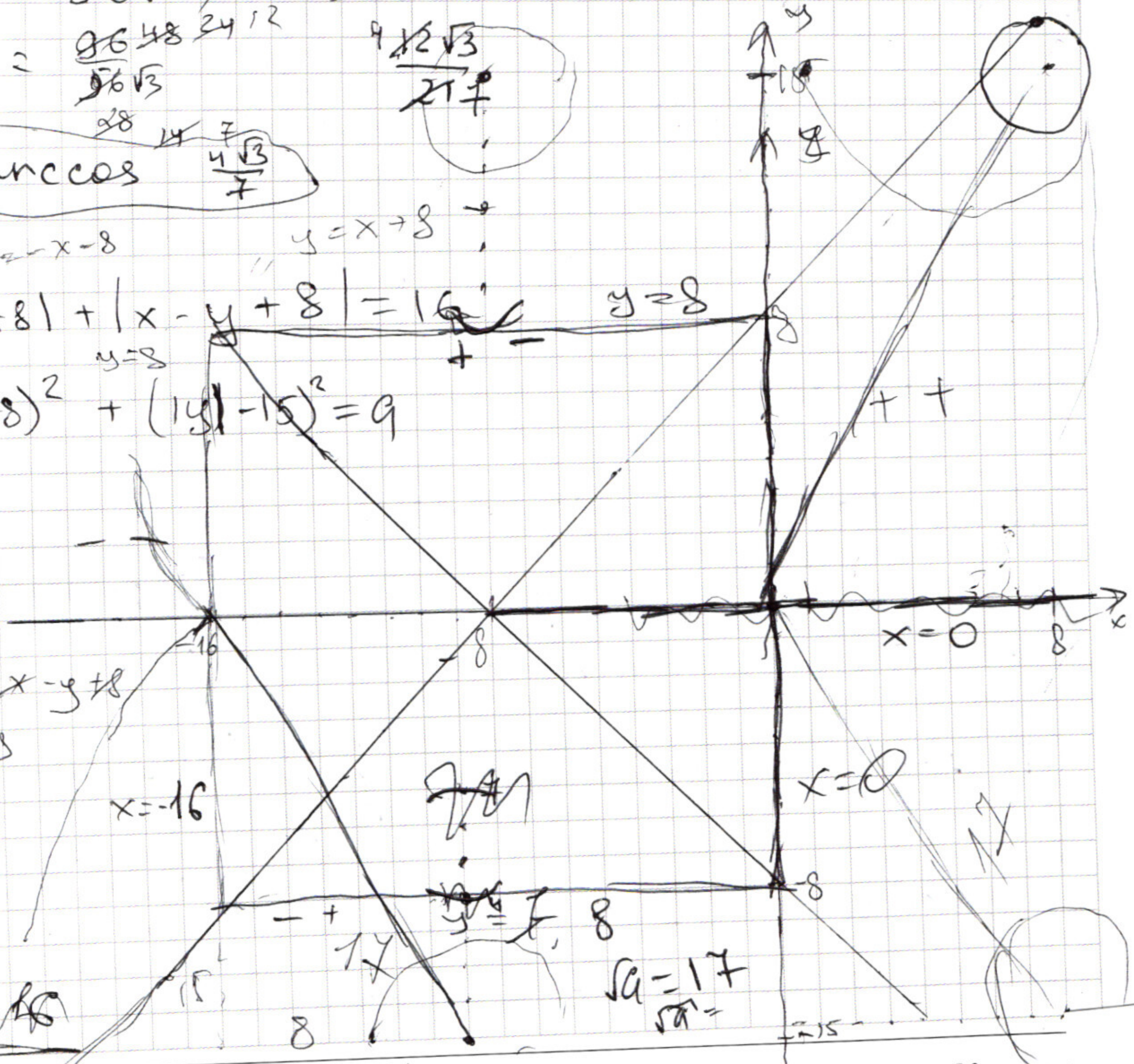
$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 9 \end{cases}$$

$-2x = 32$

$x = -16$

$-x-y-8+x-y+8$

$y = -8$



$\sqrt{a} = 17$