

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2) \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$7x = \alpha + \beta$$

$$3x = \beta - \alpha$$

$$\beta = 2x$$

$$\alpha = 5x$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\Rightarrow \cos 7x + \cos 3x = 2 \cos(5x) \cos(2x)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin 7x - \sin 3x = 2 \sin 2x \cos 5x$$

$$\cos 7x + \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\cos(7x - \frac{\pi}{4}) \right) + \sqrt{2} \left(\cos(3x + \frac{\pi}{4}) \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad : \sqrt{2}$$

$$\cos(7x - \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$7x - \frac{\pi}{4} = \alpha + \beta$$

$$3x + \frac{\pi}{4} = \alpha - \beta$$

$$2 \cos\left(\frac{10x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cos\left(\frac{4x}{2}\right) + \cos 4x = 0$$

$$2 \cos(5x - \frac{\pi}{4}) \cos(2x) + \cos 4x = 0$$

$$2 \cos(5x - \frac{\pi}{4}) \cos 2x + 2 \cos^2 2x - 1 = 0$$

$$2 \cos 2x \left(\cos(5x - \frac{\pi}{4}) + \cos 2x \right) = 1$$

$$2 \cos 2x \cdot 2 \cos\left(\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 1$$

$$\cos 2x \cos\left(\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$3. \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{y}\right)^{\ln y} = x^2 \ln(xy^2) & (1) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ п.1.1):

$$\begin{cases} -\frac{x^2}{y} > 0 \\ -y > 0 \\ xy^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

~~$$y^2 + 2xy + 4 - 12 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$~~

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 4(3x + y) = 0$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 4(3x + y) = 0$$

$$y(y + 3x) - x(y + 3x) + 4(3x + y) = 0$$

$$(3x + y)(y - x + 4) = 0$$

либо

$$3x = -y$$

$$-3x = y, \quad x > 0$$

подставим в (1)

$$\left(1 - \frac{x^2}{-3x}\right)^{\ln 3x} = x^2 \ln(x \cdot 3x^2)$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln 3x} = x^2 \ln(3x^3)$$

$$3^{-\ln 3x} \cdot x^{6 \ln 3x} = x^2 \ln(3x^3)$$

$$3^{-\ln 3x} = x^{2 \ln(3x^3) - 6 \ln 3x} = x^{2(\ln(3x^3) - \ln(27x^3))} =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение 3:

$$3^{-\ln 3x} = x^{2 \ln(\frac{1}{3})} = x^{\ln(\frac{1}{3})} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\ln x}$$

$$3^{-\ln 3x} = 3^{-2 \ln x}$$

$$-\ln 3x = -2 \ln x$$

$$\ln 3x = 2 \ln x$$

$$3x = x^2$$

$$(x-3)x = 0 \Rightarrow (x=3 : y=9)$$

мод
 $y = x-4$
 $0 < x < 4$

$$\left(\frac{x}{4-x}\right)^{7 \ln 4-x} = x^{2 \ln(x(x-4)^2)}$$

$$(4-x)^{-\ln(4-x)} \cdot 7 \ln 4-x = x^{2 \ln x + 4 \ln(x-4)}$$

$$(4-x)^{-\ln(4-x)} \cdot 7 \ln 4-x = x^{2 \ln x} \cdot x^{4 \ln 4-x}$$

$$(4-x)^{-\ln(4-x)} \cdot 7 \ln 4-x = x^{2 \ln x} (4-x)^{4 \ln x}$$

$$(4-x)^{-(\ln(4-x) + 4 \ln x)} = x^{2 \ln x - 7 \ln(4-x)}$$

1. 6 4 8 2 7 - число переставляем $\Rightarrow$
 такие все значения числа
 не сортирует 2, 4, 8, 6

6 4 8 2 7 / 3
 2 1 6 0 9 / 3
 7 2 0 3 / 3
 2 4 0 1 / 7
 3 4 3 / 7
 4 8 / 7
 7 / 7

возможные перестановки чисел.

$\Rightarrow$ 3 3 3 7 7 7 7 1 - их перестановки.

$$\frac{8!}{3!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 7 \cdot 40 = 280$$

9 3 7 7 7 7 1 1

$$\frac{8!}{4!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 40 \cdot 7 \cdot 3 = 280 \cdot 3 =$$

$$= 840$$

Ответ: 1120

$$5. \begin{cases} |x+y-8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-5)^2 = 9 & (2) \end{cases}$$



$$\begin{aligned} x+y-8 > 0 & \quad x > 8-y \\ x-y+8 > 0 & \quad x > y-8 \\ y > 0 & \quad x > 0 \\ x=0 & \quad 0 \leq y \leq 8 \\ y < 8 & \end{aligned}$$

$$|x+y-8| + |x-y+8| = 16$$

$$|x+8+y| + |x+8-y| = 16$$

При $y \rightarrow -y$ уравнение не меняется само
 виден $\Rightarrow$ Если (x, y) решение, то
 $(x, -y)$ тоже решение.

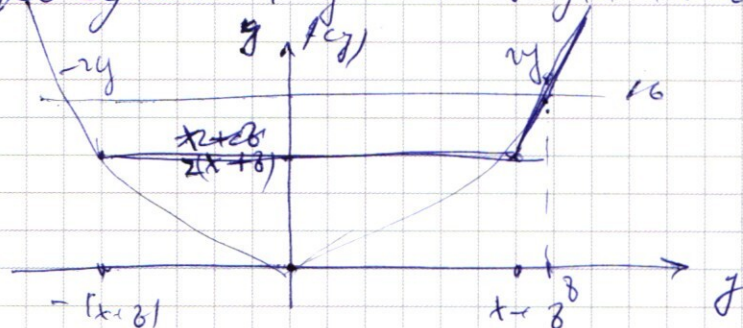
Поскольку решений должно быть ровно 4, то
 это и будут единственные решения.

Покажем, что $|x+8+y| + |x+8-y| = 2|x+8|$
 $|x+8+y| + |x+8-y| = 2|x+8|$
 $|x+8+y| + |x+8-y| = 2|x+8|$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение 5

Корнемеем $f(y) = |x-3-y| + |x-3+y| = |x-3+y| + |y-x-3|$



$$x-3 \geq 0$$

если $f(y) = 16$

$$\text{или } 2(x-3) \geq 16$$

$x \geq 0$ решение нет.

$$x < 0 \quad y \in [-3, 3]$$

$-3 < x < 0$ Ето два решения

$$x-3+y+y-x-3$$

$$y = \pm 8$$

$$2y = 16$$

или $-16 < x < -3$ 3 решения

$x < -16$ нет решений.

Рассмотрим

$$x = 0$$

$$-3 < x < 0 \Rightarrow (x-3)^2 +$$

$$-16 < x < -3$$

$$y^2 - 15 = \sqrt{a-64}$$

$$|y| = 15 \pm \sqrt{a-64} < 8$$

$$\sqrt{a-64} < -7$$

$$\sqrt{a-64} > 7$$

$$a-64 > 49$$

$$a > 113$$

$$15 - \sqrt{a-64} > 0$$

$$15 > \sqrt{a-64}$$

$$a < 15^2 + 64 = 289$$

$$2 < 289$$

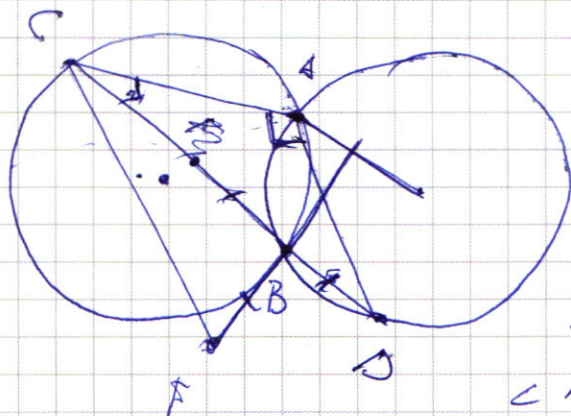
$$x = -16$$

$$(0, y)$$

$$\sqrt{289} < a < 113$$

Ответ: $a \in (113, 289)$

№6



Дано: Две окружности
 $R=17$
 $\angle CAD = 50^\circ$

Найти: CF?

Решение:

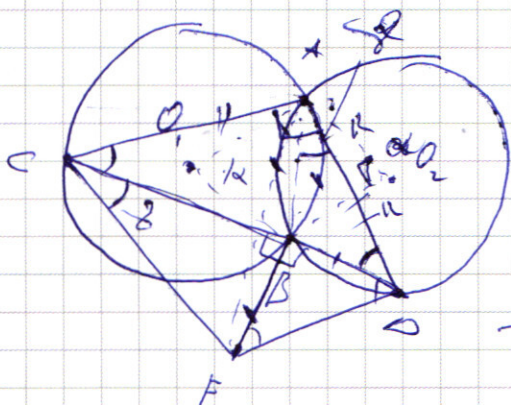
1. Покажем, что

$$\angle ACD = \angle ADC$$

Они оба опираются на хорду AB;
 в равных кругах.

$$\triangle O_1AB \cong \triangle O_2AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AO_2B = \angle AO_1B \Rightarrow$$



$\Rightarrow$ меньшая дуга AB у той окруж. радиус, а

$\Rightarrow$ и углы опирающиеся на эту дугу равны

$$\triangle ACD \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ \Rightarrow \triangle CAD \cong \triangle FBD$$

(две углы равны) $\Rightarrow$ $\frac{BD}{AD} = \frac{CF}{AC}$ $CA = AD$

$$\Rightarrow \triangle CAD \cong \triangle FBD \Rightarrow \angle AFD = 50^\circ = 45^\circ + 45^\circ$$

Решение

$$\Rightarrow FD \parallel CA$$

$$\text{пусть } \angle BAD = \gamma$$

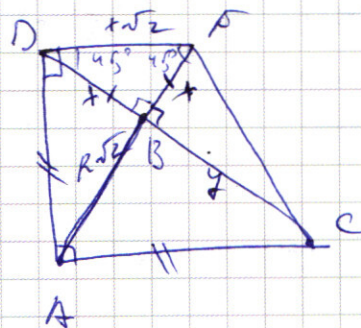
по теореме синусов:

$$\frac{BD}{\sin \gamma} = 2R \quad BD = 2R \sin \gamma$$

$$CB = 2R \sin(\frac{\pi}{2} - \gamma) = 2R \cos \gamma$$

$$\Rightarrow CF = 2R = 34$$

а) Ответ: 34



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение №6:

б) $BC = 16$; $S_{ACB} = ?$

$$\Rightarrow \frac{16}{34} = \cos 8 = \frac{2}{17} \Rightarrow \sin 8 = \frac{15}{17}$$

$$AD = 2R \sin\left(\pi - 8 - \frac{\pi}{4}\right) = 2R \sin\left(8 + \frac{\pi}{4}\right) = 34 \left(\frac{15}{17} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{8}{17} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \cdot 23.52$$

(по теореме
синусов)

$$S_{ACB} = \frac{1}{2} AC \cdot CB \sin\left(8 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot 23.52 \cdot 34 \left(\frac{15}{17} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{8}{17} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 23^2 = 529$$

б) Ответ: 529

7.
$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{2x} \\ y \leq 93 + 3(3^{2x} - 1)/x \end{cases}$$

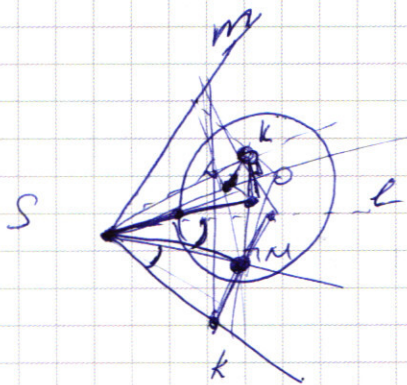
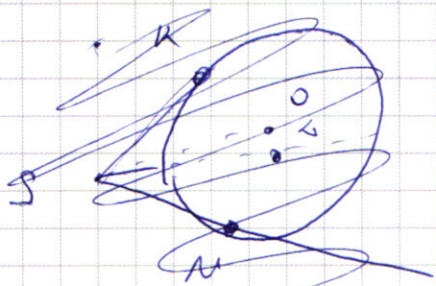
Найдем такое x , при
котором равенство не
выполняется.

$$3^x + 4 \cdot 3^{2x} < 93 + 3(3^{2x} - 1)/x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{2x} < 3 \cdot 31 + 3^{2x} - 3/x$$



27:



Дано:

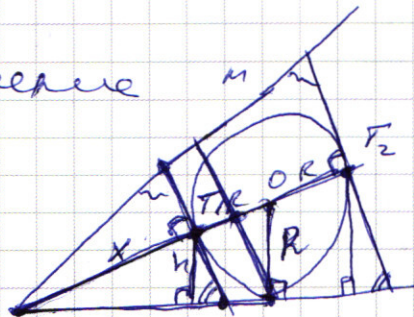
Сфера с
центром O.
Плоскость
касания S

Решение:

Рассмотрим сечение
Mm

Найти:
∠KSO?
S KM?

~~Важное утверждение.
Рассмотрим поворот
плоскости S относительно~~



~~сечения S~~

1. Даны сечение хордальной дуги

дуги $\Rightarrow$ в сечении есть две дуги плоскости
дуги равны хордально плоскости $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ сечение хордальное.

$$K^2 = \frac{S_1}{S_2} = \frac{16}{9}$$

$$K = \frac{4}{3} = \frac{x + 2R}{x} = 1 + \frac{2R}{x}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2R}{x} \Rightarrow x = 6R \text{ — радиус от } S \text{ до}$$

плоскости сечения. $\Rightarrow |OS| = 7R$.

$$\text{Тогда из подобия} \Rightarrow \frac{h}{R} = \frac{6R}{7R} \Rightarrow h = \frac{6}{7}R$$

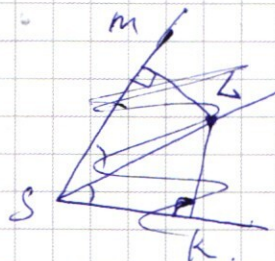
$$\Rightarrow \sin(\angle KSO) = \frac{R}{7R} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{7}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4 Продолжение: Основу $\triangle KLM$ равнобедрен.
от вершины SO $SO \perp KM$ в точке O вышесовой
определенности.

В $\triangle KLM$ SO — высота
и медиана. $SO \perp KM$ в точке O .
В $\triangle KLM$ SO — высота
и медиана. $SO \perp KM$ в точке O .
В $\triangle KLM$ SO — высота
и медиана. $SO \perp KM$ в точке O .



$SO \perp KM$ в точке O

$SO \perp KM$ в точке O

$$\frac{h}{R} = \frac{4\sqrt{3}R}{7R}$$

$$h = \frac{4\sqrt{3}}{7}R$$

$$\frac{4\sqrt{3}R}{7R} = \frac{4\sqrt{3}}{7}R$$

$$\frac{S_x}{S_0} = \left(\frac{4\sqrt{3}}{7} \right)^2 = \left(\frac{8}{7} \right)^2 \Rightarrow S_x = \left(\frac{8}{7} \right)^2 \cdot S_0 = \frac{64}{49} \cdot \frac{576}{49}$$

Ответ: $\triangle KSO$ равнобедренный
 $S = \frac{576}{49}$

2. Упрощение

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos(3x+4x)/2 \cos 3x \cos 4x - \sin 3x \sin 4x$$

$$\sin 3x \cos 4x + \sin 4x \cos 3x + \sin 3x \cos 4x$$

$$\cos 3x \cos 4x - \sin 3x \sin 4x + \sin 4x \cos 3x + \sin 3x \cos 4x - \cos 3x + \sqrt{2} \cos 4x - \sin 3x = 0$$

$$\cos 7x + (\cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x) + \sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x - \sin 3x = 0$$

$$\cos 5x \cos 4x - \sin 3x \sin 4x - \sin 4x \cos 3x + \sin 5x \cos 4x + \cos 3x + \sqrt{2} \cos 4x - \sin 3x = 0$$

$$\cos 4x (\cos 3x + \sin 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}) - \sin 3x \sin 4x + \sin 4x \cos 3x + \cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x - \sin 3x = 0$$

$$\cos 4x (\cos 3x + \sin 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}) + \sin 4x / \cos 3x - \sin 3x / + \cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x - \sin 3x = 0$$

$$\cos 4x (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) + (\sin 4x + 1) / (\cos 3x - \sin 3x) = 0$$

$$\cos 4x (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) - (\sin 4x + 1) (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2} - \sqrt{2} - 2 \sin 3x) = 0$$

$$(\cos 4x - \sin 4x - 1) (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) + (\sin 4x + 1) \sqrt{2} + 2 \sin 3x (\sin 4x + 1) = 0$$

$$(\cos 4x - \sin 4x - 1) (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) + \sqrt{2} (\sin 4x + 1) + \sqrt{2} \sin 3x = 0$$

$$(\cos 4x - \sin 4x - 1) (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) + \sqrt{2} (\sin 4x + 1) + \sqrt{2} \sin 3x = 0$$

$$(\sin(\frac{5}{4} - 4x) - \sin(\frac{5}{4})) / (\sin(3x + \frac{5}{4}) + \sin(\frac{5}{4})) + (\sin 4x + \sin \frac{5}{4}) / \sin \frac{5}{4} + \sin 3x = 0$$

$$\sin(-2x) \cos(\frac{5}{2} - 4x) \sin(\frac{3x + \frac{5}{4}}{2} / \cos(\frac{5x - \frac{5}{4}}{2}) + \sin(2x + \frac{5}{4}) \cos(2x - \frac{5}{4})$$

$$- \sin(2x) \cos(2x + \frac{5}{4}) \sin(\frac{3x + \frac{5}{4}}{2} / \cos(\frac{5x - \frac{5}{4}}{2}) + \sin(\frac{3x + \frac{5}{4}}{2}) \cos(\frac{5x - \frac{5}{4}}{2}) = 0$$

$$+ \sin(2x + \frac{5}{4}) \cos(2x - \frac{5}{4})$$

$$- \sin(\frac{3x + \frac{5}{4}}{2}) \cos(\frac{5x - \frac{5}{4}}{2}) = 0$$

$$\cos(2x - \frac{5}{4}) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. Продолжаем.

Исходное уравнение ϕ . $f(x) = 3^{x+4} \cdot 3^{28} - 93 - 3(3^{27} - 1)x =$

$$= 3^{x+4} \cdot 3^{28} - 93 - 3^{28}x + 3x.$$

$$f'(x) = 3^x \ln 3 - 3/3^{27} - 1 = 0$$

$$3^x \ln 3 = 3/3^{27} - 1$$

$$x = \log_3 \left(\frac{3/3^{27} - 1}{\ln 3} \right)$$

$$\frac{3/3^{27} - 1}{\ln 3} - 3/3^{27} - 1 \cdot \log_3 \left(\frac{3/3^{27} - 1}{\ln 3} \right) + 4 \cdot 3^{28}$$

$$3(1 + 4 \cdot 3^{27}) \neq 93 + 3/3^{27} - 1$$

$$1 + 4 \cdot 3^{27} \neq 31 - 3^{27} - 1 \quad x = 31?$$

$$3^{27} \neq 29$$

$$3^{31} + 4 \cdot 3^{28} \neq 3^{28}(27 + 4)$$

$$3^{27} \cdot 31 \neq 3(31 + 3^{27} - 1) \cdot 3 \cdot 31 / (1 + 3^{27} - 1) \cdot 3^{27} \cdot 31$$

т.е. при $x = 31$ значения совпадают

$$x = 32?$$

2. Продолжение

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{5\pi}{8} + \pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k$$

$$-\sin(2x) \sin(\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{8}) / \cos(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}) +$$

$$+ \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \cancel{\cos(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4})} \sin(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8})$$

$$\cos(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$-\sin(2x) \sin(\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{8}) +$$

$$+ \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \sin(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) + \cos(x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2} + 1) \cos(x)$$

$$= \cos(\frac{\pi}{4} - x)$$

$$2\sin(2x + \frac{\pi}{4}) \sin(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8}) - \sin(2x) \sin(\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{8}) = 0$$

$$\cos(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{8}) - \cos(\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{8}) = \cos(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{8}) + \cos(\frac{3}{2}x - \frac{3\pi}{8}) = 0$$

$$\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}) = \cos(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{8})$$

$$\cos(y) = \cos(1-y)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} = -\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{8} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

Ответ:

$$\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k,$$

$$\frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k,$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k,$$

$$k \in \mathbb{Z}$$