

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 1

$64827 = 7^4 \cdot 3^3 = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_8$, где a_i - i -тая цифра 8-знач. числа

$\Rightarrow$ 1) $a_i \neq 0$. 2) $1 \leq a_i \leq 9 \Rightarrow$ 3) если $a_i : 7$ то $a_i = 7$
сум 1 до 9 только 7:7

$$7^4 \cdot 3^3 = a_1 \cdot \dots \cdot a_8$$

$$\begin{matrix} :7 \\ :7 \end{matrix} \Rightarrow \frac{a_1 \cdot \dots \cdot a_8}{:7} \Rightarrow \exists a_i : 7, \text{ назовем ее } b_1$$

$$7^3 \cdot 3^3 = \frac{a_1 \cdot \dots \cdot a_8}{b_1} \Rightarrow \exists a_j, j \neq i, \text{ где } a_j : 7, \text{ назовем } b_2$$

$$7^2 \cdot 3^3 = \frac{a_1 \cdot \dots \cdot a_8}{b_1 b_2} \Rightarrow \exists a_k, k \neq j, k \neq i, a_k : 7, \text{ назовем } b_3$$

$$7 \cdot 3^3 = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_8}{b_1 b_2 b_3} \Rightarrow \exists a_e, e \neq j, e \neq k, e \neq i, a_e : 7, \text{ назовем } b_4$$

$\Rightarrow$ 4 из 8 цифр искомого числа = 7, ост. 4 в произв. дают $3^3 \Rightarrow$ среди них могут быть только степени 3
 $\Rightarrow 1, 3, 9 \Rightarrow$ либо 1 3 3 3, либо 1 1 3 9.
(девяток нет) (одна девятка)

(больше 1 девятки быть не может, т.к. иначе их $\geq 2 \Rightarrow$ произв. $\geq 9 \cdot 9 = 81$)

$$C_8^4 \left(C_4^1 + C_4^1 \cdot C_3^1 \right) = 140 (4 + 4 \cdot 3) = 140 \cdot 16$$

выберем семерки $\uparrow$ случай 1, 1 3 3 9, выберем где 3, а ост.,
покажем где 9 на ост. 3

случай 1 3 3 3, выберем, где на ост. местах
стоит 1, вст. 3

$$140 \cdot 16 = 2240. \text{ Ответ: } 2240 \text{ числа.}$$

Задача 13

$$-y = t$$

$$-\frac{x^2}{y} = \frac{x^2}{-y} = \frac{x^2}{t}$$

$$y^2 = (-y)^2 = t^2$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = y^2 + 2xy + x^2 - 4x^2 + 8x - 4 + 4x + 4y + 4 =$$

$$= (y+x)^2 - 4(x-1)^2 + 4(x+y) + 4 = (y+x+2)^2 - (2x-2)^2 =$$

$$= (y+3x)(y-x+4) = 0$$

$$\left(\frac{x^2}{t} \right)^{\ln t} = x^{2 \ln(xt^2)}$$

$$\boxed{003^*} \quad \begin{array}{l} \ln t \text{ onp.} \Rightarrow t > 0 \\ \ln xt^2 \text{ onp.} \Rightarrow xt^2 > 0 \Rightarrow x > 0 \end{array}$$

$$(3x-t)(4-(x+t)) = 0 \Rightarrow t \text{ и } x \text{ одновременно не } = 1$$

$$x^{7 \ln t} \cdot t^{-\ln t} = x^{2 \ln(xt^2)}$$

$$\ln(xt^2) = \ln x + \ln t^2 = \ln x + 2 \ln t$$

$$x^{7 \ln t} \cdot t^{-\ln t} = x^{2 \ln x + 4 \ln t}$$

$$x^{3 \ln t} \cdot t^{-\ln t} = x^{2 \ln x}$$

$$1) x \neq 1 \quad t = x^{\log_x t}$$

$$3 \ln t - \ln t \cdot \log_x t = 2 \ln x$$

$$\boxed{\ln x \neq 0 (x \neq e)} \quad \text{г. 2 - попоп.}$$

$$3 \frac{\ln t}{\ln x} - \frac{\ln t}{\ln x} \cdot \log_x t = 2$$

$$\frac{\ln t}{\ln x} = \log_x t = m$$

$$3m - m^2 = 2$$

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

$$(m-1)(m-2) = 0$$

$$m = 1$$

$$\Rightarrow \log_x t = 1 \text{ или } \log_x t = 2$$

$$\begin{array}{l} x = t \\ x^2 = t \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x - t = 0 \\ x = t \\ 4 - (x+t) = 0 \\ x = t \\ 3x - t = 0 \\ x^2 = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = t \Rightarrow \cancel{x=0} \Rightarrow t=0 \text{ или } 003^* \\ x = t \\ 4 = 2x \Rightarrow x=2, t=2 \Rightarrow (x; y) = (2; -2) \\ x = t \\ 3x = t \Rightarrow 3x = x^2 \quad x \neq 0 \Rightarrow x=3, t=9 \\ x^2 = t \Rightarrow (x; y) = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{\sqrt{17}+9}{2} \right) \end{cases}$$

$$x^2 + x - 4 = 0 \quad D = 1^2 + 4 \cdot 4 \cdot 1 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} > 0 \Rightarrow t = \frac{17 + 1 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $x = 1$

$$t^{-\text{ent}} = 1 \Rightarrow \begin{cases} t=1, \text{ marga } (3x-t)(4-(x+t)) = 2 \cdot 2 \neq 0 \\ \text{ent}=0, \text{ marga } t=e, \text{ marga } (3x-t)(4-(x+t)) \neq 0 \end{cases}$$

Q.2. $x=e$ ($\ln x=0$)

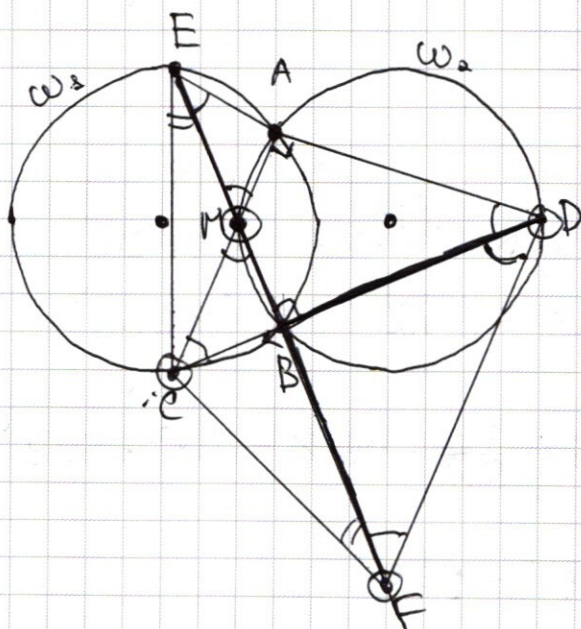
$$e^{3\text{ent}} \cdot f^{\text{ent}} = e^{2\text{en}} e$$

$$t^3 \cdot t^{-\ln t} = 1$$

$$t(3-ent) = 1 \Rightarrow \begin{cases} t=1, \text{ maka } (3x-t)(4-(x+t)) \neq 0 \\ 3-ent=0, \text{ maka } ent=3 \Rightarrow \\ \Rightarrow t=e^3 \\ 3e \neq e^3 \quad 4 \neq e^3+e \\ (3x-t)(4-(x+t)) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Ombem:}} \quad (x; y) = \begin{pmatrix} 2; -2 \\ 3; -9 \end{pmatrix};$$

Задача № 6



Demo: $R_{w_1} = R_{w_2} = 17$

$B \in CD, \angle CAD = 90^\circ$

$$BF \perp CD \quad BF = BD$$

Hauptide: a) CF
b) S (ACF)

Решение: окр. ω_1 и ω_2 симм.
Опн. $AB \Rightarrow$ на глуп. AB опнр.
равные впис. углы или
 $\angle ACB = \angle ADB \Rightarrow \angle ACD = \angle ADE$
 $B \triangle ACD \quad \angle ACD = \angle ADE$ и $\angle CAD = 90^\circ =$
 $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$ и $\triangle$ равнос.
 $CA = AD$
 $M = BF \cap AC \quad \angle ADB$ вписан, м.т.
 $\angle MBD = \angle MAD = 90^\circ \Rightarrow$

- 1) M центр на опис. окр. ABD $\Rightarrow M \in \omega_2$
 2) $\angle MAD = 90^\circ = \angle MAD$ diam.

$BM \perp AD = E \Rightarrow \angle CBE = \angle CAE = 90^\circ \Rightarrow CBAE$ впис. $\Rightarrow$

1) $E \in \omega_1$, т.к. опис. окр. CBA

2) EC - диаметр $\omega_1 = 34$ 3) $\angle DEB = \angle AEB = \angle ACB = 45^\circ$

$\triangle BDF$: $BD = DF$ и $\angle DBF = 90^\circ \Rightarrow \angle BDF = \angle BFD = 45^\circ$
 треуг. равнос.

$\Rightarrow \triangle DEF$: $\angle DEF = \angle DEB = 45^\circ = \angle BFD = \angle EFD$

$\Rightarrow \angle EDF = 90^\circ$, треуг. равнос. $DF = DE$, б
 к-м DB высота к основ. $\Rightarrow$ медиана и
 бисс. $\Rightarrow DC$ - серед к EF $\Rightarrow CF = CE = 34$

Ответ: а) $CF = 34$

б) $CM \cdot CA = CB \cdot CD$ (степенная теорема или просто
 CMFD - впис. $\angle MCD = \angle MFD = 45^\circ$
 $\Rightarrow \triangle BMC$ равнос. $BC = BM \Rightarrow$
 $\Rightarrow CD = FM$

$BC = 16$
 $BE = BF = BD$ $CA = AD$

$\frac{S(ACF)}{S(CMF)} = \frac{CA}{CM}$

$\frac{1}{2} CB \cdot FM = \frac{1}{2} CB \cdot CD = S(FCM) = 4$

б $\triangle CBE$

$CE = 34$

$BC = 16$

$\angle CBE = 90^\circ$

$\Rightarrow BE^2 = 34^2 - 16^2 = 50 \cdot 18 = 900$

$\Rightarrow BE = 30 = BF = BD$

$BC + BD = CD = 30 + 16 = 46$

$\Rightarrow CB \cdot CD = 46 \cdot 16$

$\Rightarrow S(FCM) = \frac{1}{2} \cdot 46 \cdot 16 = 46 \cdot 8$

~~$S(ACF)$~~ $S(ACF) = \frac{CA}{CM} \cdot S(FCM)$

~~CA~~ $CA = \sin 45^\circ \cdot CD = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 46$ ($\triangle ACD$)

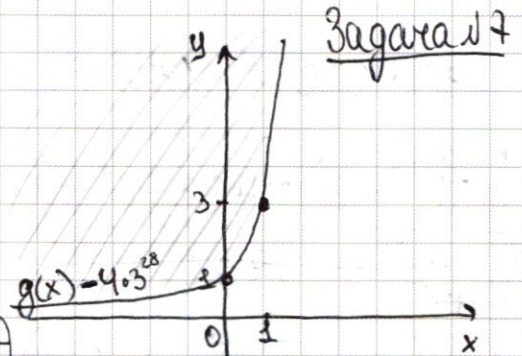
~~CM~~ $CM = \frac{BC}{\sin 45^\circ} = 16\sqrt{2}$ ($\triangle BCM$)

$S(ACF) = \frac{CA}{CM} \cdot S(FCM) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 46}{2 \cdot 16\sqrt{2}} \cdot 46 \cdot 8 = 23^2 = 529$

Ответ: б) $S(ACF) = 529$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} = g(x) \\ y \leq 93 + 3(3^{28} - 1)x = f(x) \end{cases}$$



~~$$93 + 3(3^{28} - 1)x \leq 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3^{28} - 3x \leq 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3^{28}(x-4) - 3x \leq 3^x$$~~

возр. ф-ция
линейная

возр. ф-ция

производная = const.

$$f'(x) = 3^{28} - 3$$

$$g'(x) = \ln 3 \cdot 3^x$$

$$f(28) = 93 + 3^{28}$$

пара $\begin{cases} y > g(x) \\ y \leq f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' > G(x) \\ y' \leq F(x) \end{cases}$ $y' = y - 4 \cdot 3^{28}$

$$F(x) = f(x) - 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3^{28}x - 3x - 4 \cdot 3^{28} =$$

$= 3^{28}(x-4) - 3x + 93$ — прямая (линейная ф-ция), под ф. y

$$G(x) = g(x) - 4 \cdot 3^{28} = 3^x$$
 — эксп., над графиком y

$$F(1) = 93 + 3^{28} - 3 - 4 \cdot 3^{28} < 0$$

$$F(4) = 93 - 12 = 81 \quad G(4) = 81$$

$$F(3) = 93 + 3^{28} \cdot 3 - 9 - 4 \cdot 3^{28} < 0$$

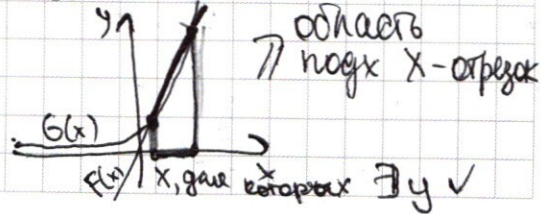
F возр. $\Rightarrow$ при $x \leq 3$ $F(x) < 0$, $G(x) > 0$

$y > 81$
 $y \leq 81$ нет.

$$\begin{aligned} F'(x) &= 3^{28} - 3 \\ G'(x) &= \ln 3 \cdot 3^x \end{aligned} \Rightarrow x > 28 \quad G(x) \text{ растет быстрее } F(x)$$

$x < 28$ $F(x)$ растет быстрее $G(x)$

схематично:



$$h(x) = 93 + 3(3^{28} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{28} \quad \text{если } \exists y, \text{ удовл. усл., то}$$

$$h(x) > 0$$

$$h'(x) = 3(3^{28} - 1) - 3^x \ln 3$$

$$\begin{aligned} x \leq 28 & \quad h'(x) > 0 \\ x > 28 & \quad h'(x) < 0 \end{aligned}$$

~~$$x = 28 + x'$$~~

$$\Rightarrow \text{максимум } h'(x) \in [27, 28]$$

~~$$x = 28 + x'$$~~

и 2) область ~~ген.~~ ген. x - отрезок.

~~$$\begin{aligned} & (3^{28} - 3)x + 93 - 3^x - 4 \cdot 3^{28} \\ & h(28) = 3^{28} \cdot 3 \cdot 29 + 93 - 3^{29} - 4 \cdot 3^{28} = -2 \cdot 3^{28} - 3 \cdot 29 + 93 - 4 \cdot 3^{28} \end{aligned}$$~~

~~$$h(28) = 3^{28} \cdot 3 \cdot 29 + 93 - 3^{29} - 4 \cdot 3^{28}$$~~

$$h(x) = 3^{28}(28 + x' - 3^{x'} - 4) + 93 - 3(28 + x') < 0, \quad x = 28 + x'$$

$$x' \geq 4 \quad \text{но учту. } 32 - 81 - 4 < 0$$

$$28 + x' - 3^{x'} - 4 \rightarrow 28 + x' - 3^{x'} - 4 + 1 - 2 \cdot 3^{x'} < 0$$

$$+1 - 2 \cdot 3^{x'} < 0$$

Все x от 5 до 30 $\exists y$
 $x \in \mathbb{Z} \quad y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & h(5) \\ & h(6) \\ & h(7) \\ & h(8) \\ & h(9) \\ & h(10) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{x=5}^{30} [h(x)] - \text{ответ.}$$

$$x' = 3(31 - 27 - 4) = 0$$

$$h(31) = 0$$

$$h(4) = 0$$

$[h(x)]$ - кол-во пар x, y (возм. y для фикс. x), где $x, y \in \mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

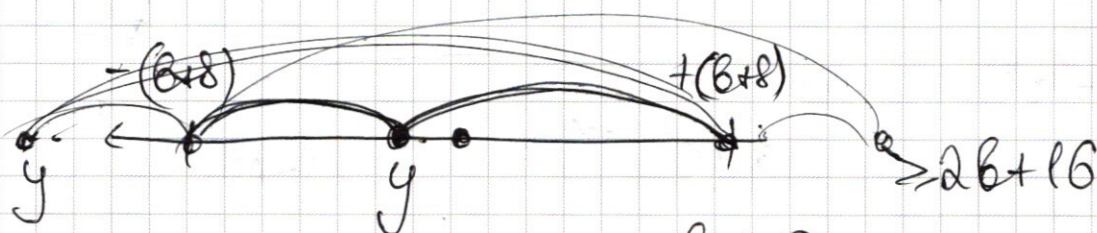
$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16 \quad x\text{-ось.}$$

$$x = b$$

$$|y+(b+8)| + |(b+8)-y| =$$

$$= |x+y+8| + |x-y+8|$$

$$|y+(b+8)| + |y-(b+8)| = 16$$



$$b \leq 0$$

$$x \leq 0 \Rightarrow$$

где можно
 $x <$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + (|y|-15)^2 = a \\ (x+8)^2 + (y)^2 \end{cases}$$

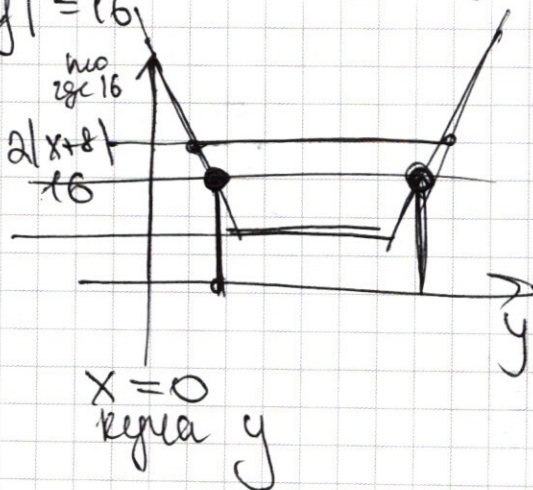
$$\begin{cases} y \leq -(x+8) \\ y \geq x+8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(x+8) - b \\ (x+8) + b \end{cases}$$

$$|x+8+y| + |x+8-y| = 16$$

↑
префикс

$$(y+(x+8)) + (y-(x+8)) = -2y$$



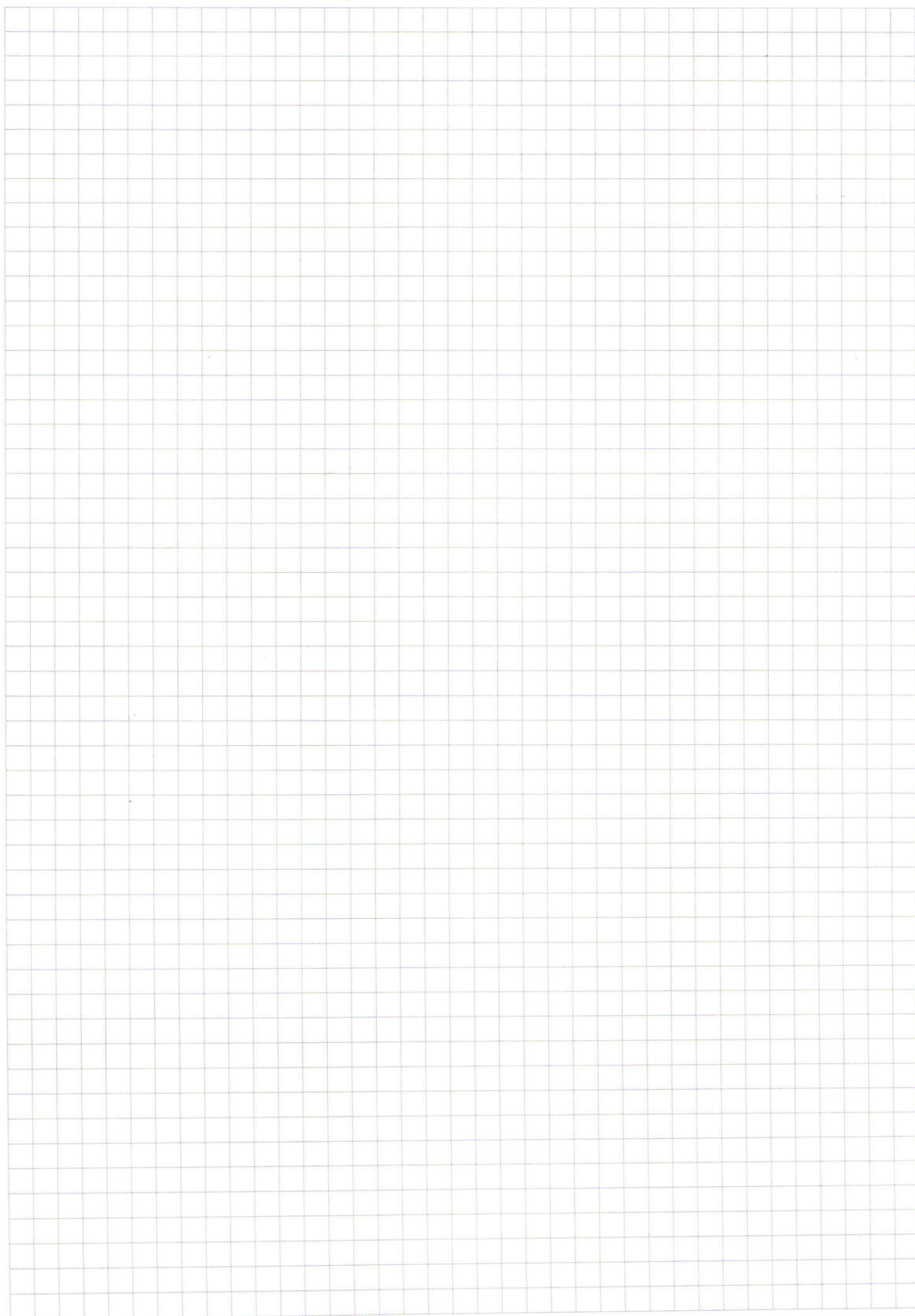
$$\begin{cases} x^2 - 16|x| + 64 \\ y^2 - 30|y| + 225 \end{cases}$$

$$x^2 - 16|x| + y^2 - 30|y| + 289 = a$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$h(5) =$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^{2\ln 3} = 3^{\ln 3x}$$

$$x = 3^{\log_3 x}$$

то

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$2\log_3 x \ln 3 = \ln 3 + \ln x$$

$$\ln 3(2\log_3 x - 1) = \ln x$$

$$2\log_3 x - 1 = \frac{\ln x}{\ln 3} = \log_3 x$$

$$\log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3$$

~~то~~

$x, y \Rightarrow t \neq 0$

$$2) (t+x)^2 = 4$$

$$\left(\frac{x^7}{t}\right)^{\ln t} = x^{2\ln(xt^2)} = x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln t}$$

$$x^{7\ln t} \cdot t^{-\ln t} = x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln t}$$

$$x^{3\ln t} \cdot t^{-\ln t} = x^{2\ln x}$$

$$x+t=4 \quad \begin{matrix} x>0 \\ t>0 \end{matrix}$$

$$t = x^{\log_x t}$$

$$3\ln t - \log_x t \cdot \ln t = 2\ln x$$

$$\begin{matrix} \ln t = 0 \text{ орг.} \\ \ln t \neq 0 \end{matrix}$$

$$3 - \log_x t = 2 \frac{\ln x}{\ln t}$$

$$\begin{matrix} x \neq 1 \text{ орг.} \\ t \neq 1 \text{ орг.} \end{matrix}$$

$$3 - \log_x t = 2 \log_t x$$

$$\log_t x \cdot \log_x t = 1$$

$$3\log_x t - (\log_x t)^2 = 2$$

$$\log_x t = m$$

$$3m - m^2 = 2$$

$$\log_x t = 1 \quad x=t$$

$$\log_x t = 2 \quad x=t^2$$

$$\begin{matrix} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ (m-1)(m-2) = 0 \end{matrix}$$

$$t = x^2$$

$$3x = \frac{8}{3}t, \text{ то } x=3 \quad t=9 \Rightarrow y=-9$$

Решения ①

$$t+x=4, \text{ отсюда}$$

$$\begin{cases} x=1 & t=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=t & x^2=t \end{cases}$$

$$x+t=4$$

$$3x=t$$

реш ②

$$\left(\frac{x^7}{x}\right)^{\ln(x)} = x^{2\ln(x^3)} \quad \checkmark$$

$$\left(\frac{x^7}{x^2}\right)^{2\ln(x)} = x^{10\ln x} = x^{10\ln x}$$

~~Решения ③~~
~~Решения ④~~

$$\begin{cases} x=t \\ x=t^2 \\ x+t=4 \\ 3x=t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x=1 &\rightarrow t=3 \\ x=2 &\rightarrow t=3 \end{aligned} \text{ тогда по } t$$

$$\begin{aligned} t=1 &\rightarrow x=3 \\ t=1 &\rightarrow x=\frac{1}{3} \end{aligned} \text{ по } x$$

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ ((x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет 2 решения.

имеет 4 решения

если имеет одно и ~~тогда~~

$$|x+y+8| + |x-y+8|$$

заменит $y \leftrightarrow -y$

Если есть реш. и $y \neq 0$,
то их ≥ 2

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

Получим 4 риса.

$$x = y \quad x = -y$$

$$x = y$$

$$x = -y$$

$$x = y$$

$$x = -y$$

$$x = y$$

$$x, y \neq 0 \geq t$$

$$|(x+8)+y| + |(x+8)-y| = 16$$

$$\begin{aligned} z+t+8 \\ -z+t+8 \\ -z-t+8 \\ +z-t+8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z-t+8 \\ -z-t+8 \\ -z+t+8 \\ z+t+8 \end{aligned}$$

$$x = y$$

$$x = -y$$

$$x = \pm z$$

$$y = \pm t$$

$$\text{то } 2$$

$$z-t+8$$

$$z+t+8$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 64827 \\ \hline 21 \overline{) 2401} \quad 7 \\ \underline{42} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64827 \mid 3 \\ 21609 \mid 3 \\ 7203 \mid 3 \\ 2401 \mid 7 \\ 343 \mid 7 \\ 49 \mid 7 \\ 7 \mid 7 \\ 1 \end{array}$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$$

$$\boxed{4 \times 7} \text{ и } \begin{array}{r} 3331 \\ 9311 \end{array}$$

1

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x =$$

$$\cos 7x = \cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x$$

$$\sin 7x = \cos 4x \sin 3x + \cos 3x \sin 4x$$

$$\cos 4x (\cos 3x + \sin 3x)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2$$

$$\begin{aligned} &+ (\cos 4x - \sin 4x - 1)(\sin 3x) \\ &+ (\cos 4x + \sin 4x + 1) \cos 3x \\ &+ \sqrt{2} \cos 4x = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} = \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2}$$

$$\cos 4x - \sin 4x = 2 \sin$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos \frac{7x+3x}{2} \cos \frac{7x-3x}{2}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos \frac{7x+3x}{2} \cos \frac{7x-3x}{2} = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\cos 7x - \cos 3x = -2 \sin \frac{7x+3x}{2} \sin \frac{7x-3x}{2}$$

$$\sin 7x - \sin 3x$$

$$16 \cos^5 x - 18 \cos^3 x + 5 \cos x$$

$$\cancel{2\sin\frac{d+\beta}{2}\cos\frac{d-\beta}{2}} = \cancel{\sin d + \cos\beta}$$

$$\cancel{\sin\frac{d+\beta}{2}} \quad \cancel{\sin\frac{d+\beta}{2}} = \cancel{2}$$

$$\cancel{2\cos d} = \cancel{2}$$

$$\cos d + \cos\beta = 2\cos\frac{d+\beta}{2}\cos\frac{d-\beta}{2}$$

$$\cos d - \cos\beta = -2\sin\frac{d+\beta}{2}\sin\frac{d-\beta}{2}$$

$$\cancel{2\cos d} = \cancel{2\cos\frac{d+\beta}{2}}$$

$$\sin d + \sin\beta = 2\sin\frac{d+\beta}{2}\cos\frac{d-\beta}{2}$$

$$\sin d - \sin\beta = 2\sin\frac{d-\beta}{2}\cos\frac{d+\beta}{2}$$

$$2\cos 5x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 5x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$$

$$2\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}\cos 4x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\sin / \cos \frac{\pi}{4}} \cos 4x = 0$$

$$\cancel{\cos(x+4x)} = \cancel{\cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x}$$

$$\cancel{\cos 4x} \quad \cos(5x-x) = \cos 5x \cos x + \sin 5x \sin x$$

$$\cancel{\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x)}$$

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 4x = 0$$

$$\cancel{2\cos 5x}$$

$$\cos 5x$$

$$\cos 5x (\cos(2x) + \sin 2x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x \sin x$$

$$\cos 5x \left(\cos 2x + \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x \sin x = 0$$

$$\cancel{2\cos 5x} +$$

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$T_0 = 1$$

$$\cos nx = T_n(\cos x)$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1} - T_{n-2} \quad \checkmark$$

$$T_5(x) = 2xT_4 - T_3$$

$$T_4(x) = 2xT_3 - T_2$$

$$T_3(x) = 2xT_2 - T_1$$

$$T_2(x) = 2xT_1 - 1$$

$$\cos 4x + \cos 3x = 2\cos 5x \cos 2x$$

$$\sin 4x - \sin 3x = 2\sin 2x \cos 5x$$

$$T_5 = 2xT_4 - T_3 = 2x(2xT_3 - T_2) - T_3 =$$

$$= 4x^2T_3 - 2xT_2 - T_3 =$$

$$= 4x^2(2xT_2 - T_1) - 2xT_2 - (2xT_2 - T_1) =$$

$$= 8x^3T_2 - 4x^2T_1 - 2xT_2 + T_1 = (2x$$

$$2\cos 5x(\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x = T_5(\cos x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$8x^3T_2 - 4x^2T_1 - 2xT_2 - 2xT_2 + T_1 = 8x^3(2x^2 - 1) - 4x^3 - 4x(2x^2 - 1) + x =$$

$$= 8x^5 - 8x^3 - 4x^3 - 8x^3 + 4x + x = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_3 = 2xT_2 - T_1 = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 2x - x = 4x^3 - 3x$$

$$T_4 = 2x(4x^3 - 3x) - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 6x^2 - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5 = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - 4x^3 + 3x = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$2(16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x)(2\sin x \cos x + \cos^2 x - 1) + \sqrt{2}(8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1) = 0$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$2(16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x)(2\sin x \cos x + \cos^2 x - 1) + \sqrt{2}(8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1) = 0$$

$$32\cos^5 x \quad \cos x = t$$

$$(32t^5 - 40t^3 + 10t)(t^2 + 2\sin x t - 1) + \sqrt{2}(8t^4 - 8t^2 + 1) = 0$$

$$32t^7 + 64\sin x t^6 - 32t^5 - 40t^5 - 80\sin x t^4 + 40t^3 + 10t^3 - 2\sin x t^2 - 10t + 8\sqrt{2}t^4 = 0$$

$$32t^7 + 64\sin x t^6 - 42t^5 - 80\sin x t^4 + 50t^3 - 20\sin x t^2 - 10t + 8\sqrt{2}t^4 = 0$$

$$\begin{cases} -\left(\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

$\ln(-y)$ определено $\Rightarrow y < 0$

$$\begin{aligned} (-x^7 \cdot y^{-1})^{\ln(-y)} \\ (-y)^{-1} \cdot x^7)^{\ln(-y)} \end{aligned}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(y+x)^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(y+x)^2 + 4(x+y) + 4 - 4 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$(y+x+2)^2 - 4(x+1)^2 = 0$$

$$(y+x+2)^2 - (2x-2)^2 = 0$$

$$(y+x+2+2x-2)(y+x+2-2x+2) = 0$$

$$(y+3x)(y-x+4) = 0 \quad (1)$$

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^7}{t}\right)^{\ln(t)} = x^{2\ln(xt^2)} \\ (3x-t)(y-t-x+4) = 0 \end{cases}$$

$$4.8.7.5 \quad 4.5 = 3.5 \quad \left(\frac{x^7}{3x}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(x \cdot 9x^2)}$$

$$2 \log_3 x \cdot \ln 3$$

$$\frac{x^{6\ln(3x)}}{3^{\ln(3x)}} = x^{2\ln(9x^3)} = x^{2\ln 9} \cdot x^{6\ln x}$$

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x = 0$$

Полином преобразуем!

$$(\cos 5x)' = -\sin 5x$$

$$-\sin 5x$$

$$\cos 1$$

$$-\sin 5x \neq 3 \sin 3x + \cos 4x - 3 \cos 3x$$

$$\sin$$

$$e^{\ln(y)} = -y$$

$$-y = t, \quad t \geq 0, \quad x \geq 0$$

$$\ln(9x^3) = \ln 9 + \ln x^3$$

$$\begin{aligned} 1) \quad 3x = t & \quad 3\ln x \\ \Rightarrow x = 3 & \quad y = -9 \quad x \neq 0, m.k. y \neq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{x^{2\ln 3}}{x^{\ln 3}} = 3^{\ln(3x)}$$

$$x^{\ln 3} = 3^{\ln(3x)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$$\cos 5x = \cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x$$~~

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x$$

~~$$\cos 4x \cos x (\cos 2x + \sin 2x) = \sin 4x \sin x (\cos 2x + \sin 2x)$$~~

$$\frac{\cos 5x}{\cos 4x} (\cos 2x + \sin 2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$T_n = 2T_{n-1} - T_{n-2}$$

$$T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

~~$$\cos 5x = 2\cos 4x \cos x - \cos 3x$$~~

~~$$\cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x = \cos 4x$$~~

~~$$T_n(x) \cdot \cos nx = 2\cos(n-1)x \cos x - \cos(n-2)x$$~~

~~$$\cos(n-1)x \cos x - \sin(n-1)x \sin x$$~~

$$\cos nx = 2\cos x \cos(n-1)x - \cos(n-2)x$$

$$\cos 5x = 2\cos x \cos 4x - \cos 3x = 2\cos x (2\cos 3x \cos x - \cos 2x) -$$

$$- \cos 3x = 2\cos 4x \cos 3x - 2\cos x \cos 2x - \cos 3x =$$

$$= 4\cos^2 x (2\cos 2x \cos x - \cos x) - 2\cos x (2\cos^2 x - 1) - (2\cos 2x \cos x - \cos x)$$

$$= 8\cos^3 x \cos 2x - 4\cos^3 x - 2\cos^3 x + 2\cos x - 2\cos 2x \cos x + \cos x =$$

$$= 8\cos^3 x (2\cos^2 x - 1) - 6\cos^3 x - 2\cos x (2\cos^2 x - 1) + 3\cos x =$$

$$= 16\cos^5 x - 8\cos^3 x - 6\cos^3 x - 4\cos^3 x + 2\cos x + 3\cos x =$$

$$= 16\cos^5 x - 18\cos^3 x + 5\cos x$$

$$(\cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\cancel{\cos 2x \sin 2x \cos 3x} - \cancel{\sin^2 2x \sin 3x} + \cancel{\cos^2 2x \cos 3x} - \cancel{\sin 2x \cos 2x \sin 3x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 4x = \frac{1}{\sqrt{2}} (2 \cos^2 2x - 1)$$

$$\cancel{\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x)} + \sqrt{2} \cos^2 2x - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\cos 5x = \cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x =$$

$$= \cancel{(2 \cos^2 x - 1)(2 \cos^2 x \cos x - \cos x)} - \sin 2x \sin 3x$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos 4x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos$$

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2 \sin x \cos x$$

$$\sin 2x$$

$$\cos 5x ((\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin^2 x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 4x = 0$$

$$x+8=m$$

$$|m+y| + |m-y| = 16$$

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$x+y \geq 0 \Rightarrow x-y \geq 0 \Rightarrow x \geq y$$

$$x+y+8 = a+8$$

$$x-y+8 = a-8$$

$$x+y+8 = a+8$$

$$x-y+8 = a+8$$

$$x+y+8 = a+8$$

$$x-y+8 = -a-8$$

$$y \neq 0 \Rightarrow \text{есть 2 решения}$$

$$(x; y) \Leftrightarrow (x; -y)$$

$$x \neq 8 \quad x \neq y+8$$

$$\begin{cases} x+y+8 = a+8 \\ x-y+8 = a-8 \end{cases}$$

$$x=a \quad y=a \quad a=0 \quad x=0 \quad y=0$$

$$x+y+8 = 8+a$$

$$x-y+8 = 8-a$$

$$x+y=a$$

$$x-y=-a$$