

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ |(x-8)^2 + (y-15)^2 = a & (2) \end{cases}$$

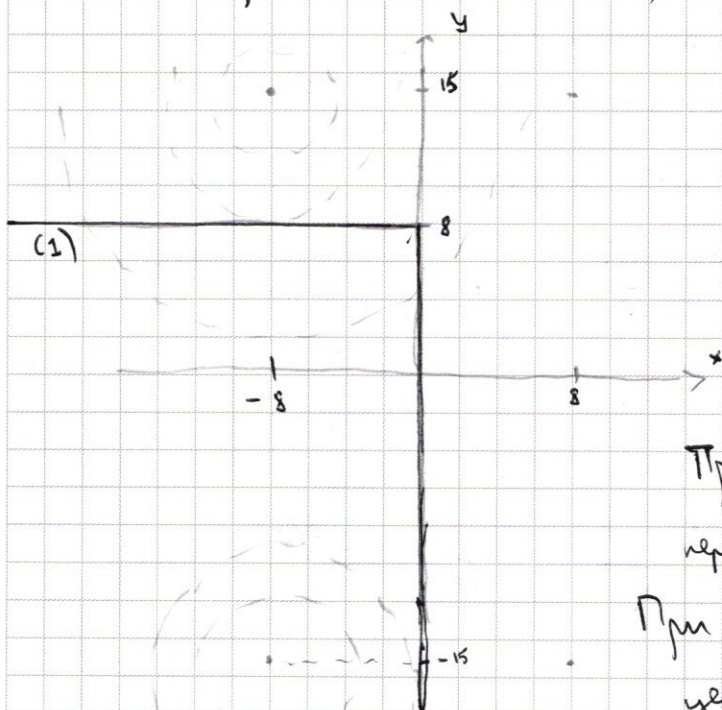
$$(1): 1^{\circ} \quad x \geq y-8$$

$$2x + 16 = 16 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y \leq 8$$

$$2^{\circ} \quad x < y-8$$

$$2y = 16 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow x < 0$$

(2) - ур-ние n° окружности с радиусом $\sqrt{a}$ и центром в (c, d) , где $|c| = 8$, $|d| = 15$



Нарисуем график ур-ния (1)

Теперь надо подобрать

радиус a так, чтобы окружности с радиусом $\sqrt{a}$ пересекали график в 2-х точках.

При $\sqrt{a} \leq 7$ - ни одной точки пересечения. При $\sqrt{a} = 7$ - 1 точка.

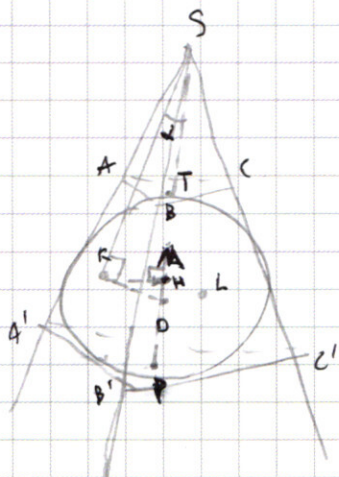
При $\sqrt{a} \geq 7$ окружность с центром $(-8, 15)$ всегда имеет 2 точки пересечения, но при

$\sqrt{a} \geq 8$ точки пересечения с графиком

полвеется и у окружности с центром $(-8, -15)$

Так что нам достаточно $7 < \sqrt{a} < 8 \Rightarrow a \in (49, 64)$
 Ответ: $a \in (49, 64)$

④



$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{9}{16} \quad R - \text{радиус окр.}$$

T, P - точки пересечения
 прямой SO с ABC и $A'B'C'$
 соответственно.

$$\left. \begin{aligned} \angle ASB &= \angle A'SB' \\ \angle BSC &= \angle B'SC' \\ \angle CSA &= \angle C'SA' \\ ABC &\parallel A'B'C' \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{ABE} \sim SA'B'C' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{S_{ABE}}{S_{A'B'C'}}} = \frac{ST}{SP} = \sqrt{\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}} = \frac{3}{4}$$

$$SP = ST + 2R \quad (S, T, P \text{ лежат на одной прямой})$$

$$\angle KSO = 90^\circ \quad (\text{т.к. } K - \text{точка касания})$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow ST &= 6R = 1R - \frac{ST}{6} \\ &\quad \downarrow \\ SO &= ST + R = 7R \end{aligned} \right\}$$

$$SK^2 = SO^2 - OK^2 = 49R^2 - R^2 = 48R^2 \Rightarrow SK = 4\sqrt{3}R$$

$$\cos \angle KSO = \cos \alpha = \frac{KS}{SO} = \frac{4\sqrt{3}R}{7R} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \Rightarrow \angle KSO = \arccos\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$$

H - точка пересечения SO и KML

$$SH = SK \cdot \cos \alpha = 4\sqrt{3}R \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{48}{7}R$$

$$\frac{S_{KML}}{S_{ABC}} = \left(\frac{SH}{ST}\right)^2 = \frac{864}{49} \Rightarrow S_{KML} = \frac{S_{ABC} \cdot 864}{49} = \frac{9 \cdot 64}{49} = \frac{576}{49}$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arccos\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$$

$$S_{KML} = \frac{576}{49}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{7} \begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{28} - 1)x \end{cases}$$

$$93 + 3^{28}x - 3x > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3^{28}x > 3x + 3^x + 4 \cdot 3^{28} \quad (1)$$

$\frac{x(n+1)}{n}$ - сумма

нар. чисел от 1 до n.

Нетрудно убедиться, что нам подходит все

$x \in (4; 31)$ (т.к. при $x=4$ и $x=31$ - равенство

$x < 4$ или $x > 31$ - правая часть больше)

Тогда ответ это $a = \sum_{x=5}^{x=30} (93 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28}) =$

$$= \sum_{x=5}^{x=30} (93 + 3^{28}(x-4) - 3x - 3^x)$$

$$\sum_{x=5}^{x=30} 93 = 93 \cdot 26 = 2418$$

$$\sum_{x=5}^{x=30} (-3x) = -3 \cdot \left(\frac{30 \cdot 31}{2} - \frac{5 \cdot 6}{2} \right) = -3 \cdot 455 = -1365$$

$$\sum_{x=5}^{x=30} -3^x = - \frac{3^5 \cdot (1 - 3^{26})}{-2}$$

$$\text{Сумма геом. прогрессии} = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

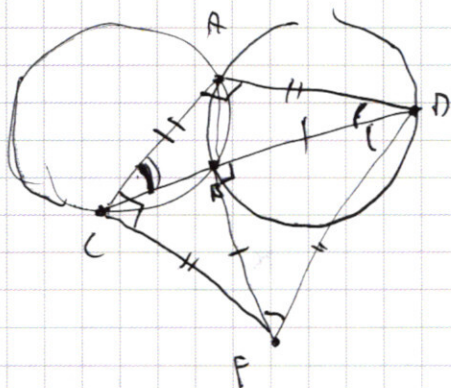
$$\sum_{x=5}^{x=30} 3^{28}(x-4) = (455 - 4 \cdot 26) 3^{28} = 351 \cdot 3^{28}$$

a = сумма всех этих слагаемых

$$a = 2418 - 1365 + 351 \cdot 3^{28} + \frac{3^5 \cdot (3^{26} - 1)}{2} = 916,5 + 337,5 \cdot 3^{28}$$

Ответ: $a = 916,5 + 337,5 \cdot 3^{28}$ нар

6)



$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$BD = BF$$

$\angle ACB = \angle ADB$ (операторы на
огну и ту же гуну, а радиусы
равны)

$$\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ \quad (\text{т.к. } \angle CAD = 90^\circ)$$

$$\angle BFD = \angle FDB = 45^\circ \quad (\text{т.к. } \angle FBD = 90^\circ)$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle ACD = \angle BDF \Rightarrow AC \parallel DF \\ \angle CAD = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} CADF - \text{прямоугольник} \\ AE = AD \end{array}$$

$\Rightarrow CADF$ - квадрат.

$$\delta) BC = 16 \Rightarrow AC = \frac{2BC}{\sqrt{2}} = 16\sqrt{2}$$

(свагран)

A, B, F лежат на
одной прямой
(диагональ квадрата)

$$S_{ACF} = AC \cdot CF \cdot \frac{1}{2} = 16\sqrt{2} \cdot 16\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{256}$$

$$\text{При } BC = 16 \quad CF = BC \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 16\sqrt{2}$$

$$\text{Ответ: } CF = 16\sqrt{2}$$

$$S_{ACF} = 256$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{5} \begin{cases} \left(-\frac{x}{y}\right)^{\ln 4} = x^{2 \ln(xy^2)} & (1) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 & (2) \end{cases} \quad \begin{matrix} x > 0 \\ y < 0 \end{matrix}$$

$$\text{из (2): } -(x - y - 4)(3x + y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = y + 4 \\ x = -\frac{y}{3} \end{cases}$$

$$1^{\circ} \quad x = -\frac{y}{3} \quad \ln(-y) = \left(-\frac{y}{3}\right)^{\ln\left(\frac{y^6}{3^2}\right)} \Rightarrow y = -3 \Rightarrow x = 1$$

Ответ: $x=1; y=-3$

$$\textcircled{1} \quad 64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

У нас 2 возможных набора цифр для 8-значного числа.

$$S_1 = \{1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7\}$$

$$S_2 = \{1, 1, 3, 7, 7, 7, 7, 9\}$$

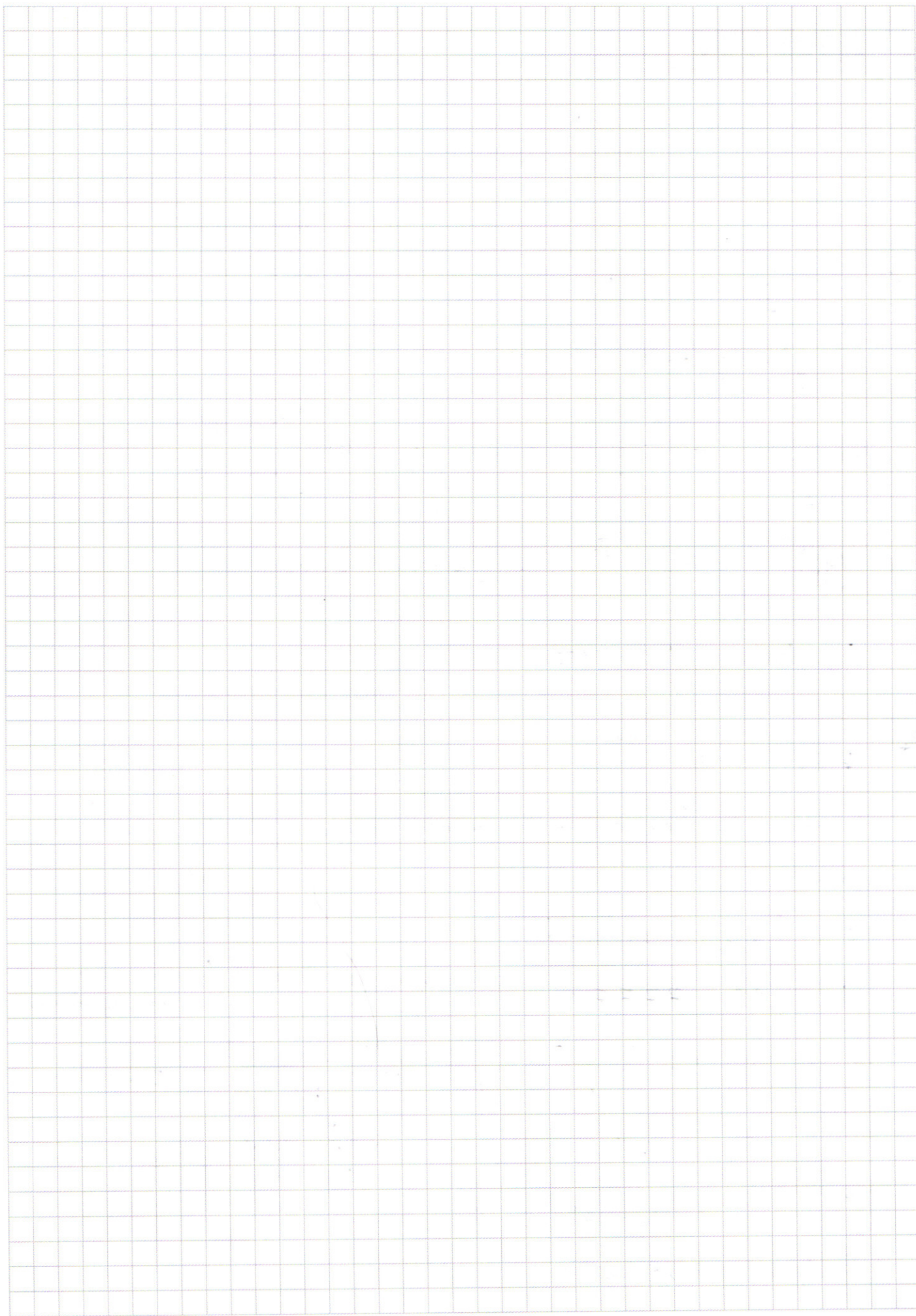
варианта поделить 7 (делим на 4!
т.е. надо без повторений)

$$\text{Для } S_1: a_1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} \cdot 1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 280 \text{ чисел}$$

$$\text{Для } S_2: a_2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 280 \cdot 3 = 840 \text{ чисел}$$

$$\text{Всего чисел: } a_1 + a_2 = 280 \cdot 4 = 1120 \text{ чисел}$$

Ответ: 1120 чисел



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{3} \quad \left(-\frac{x^2}{y}\right) \ln(-y) = x^{2 \ln(xy^2)}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + (2x + 4y) = 0$$

$$(x+y)^2 + (y+2)^2$$

$$(y+x)^2 + (y+2)^2 - y^2 = (2x-3)^2 + 9$$

$$3x^2 - 2x(2y+2) - \frac{y^2-4y}{y(y+4)} = 0$$

$$(x - (y+4))(3x + y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3}y \\ x = y+4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ - 13,5 \\ \hline 951 - 14 = 337,5 \end{array} \quad \frac{3^5}{2} = 136,5$$

$$\textcircled{5} \quad A_{ns} = \sum_5^{30} 93 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28}$$

$$26 \cdot 93 + 26 \cdot 3 \sum_5^{30} (x-4) = 3 \cdot 455 - \frac{3^{31} - 3^5}{2} =$$

$$\sum_5^{30} (x-4) = \frac{30 \cdot 31}{2} - \frac{4 \cdot 5}{2} - 26 \cdot 4 = 310 + 155 - 10 - 104 = 351$$

$$\sum_5^{30} 3^x = \frac{3^5(1-3^{26})}{-2} = \frac{3^{31} - 3^5}{2}$$

$$916,5 + \frac{18225}{2} \cdot 3^{28}$$

$$\begin{matrix} x > 0 \\ y < 0 \end{matrix}$$

$$-\frac{1}{y} \ln(-y) = x^{2 \ln(xy^2) - 7 \ln(-y)} = x^{\ln\left(\frac{x^2 y^2}{y^3}\right)}$$

$$\begin{array}{r} 1053 \\ - 136,5 \\ \hline 916,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 273 \cdot 2 \\ \hline 136,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 53 \\ \times 26 \\ \hline 558 \\ 106 \\ \hline 2418 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - \\ \times 455 \\ 3 \\ \hline 1365 \end{array}$$

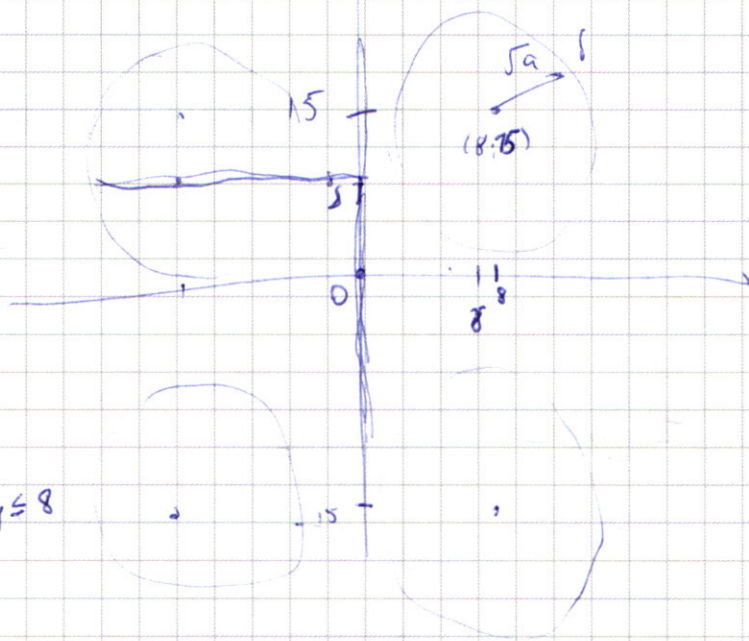
$$1053$$

$$\begin{array}{r} \times 26 \\ \times 351 \\ \hline 52 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 702 \\ 1755 \\ \hline 18252 \\ - 27 \\ \hline 18225 \end{array}$$

⑤ 1) $|x+y+8| + |x-y+8| = 16$
 $(x+1-8)^2 + (y-15)^2 = a$

2 решение



1) $x \geq y+8-y$

$2x + (y=16-y)x = 0 \Rightarrow y \leq 8$

2) $x \leq 8-y$

$y=8 \Rightarrow x \leq 0$

$R(0; 8)$

$R = \sqrt{64 + 49} = \sqrt{113}$

$a < 15$

$a \geq 7$

$a \in (\sqrt{7}; 15)$

⑦ $y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

$y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \leq 3 \cdot 31 + 3^{28}x - 3x$

$3 \cdot 31 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28} > 0$

$3(31 + 3^{27}x) > 3(x + 3^{x-1} + 4 \cdot 3^{28})$

$x > 9$ При $x=4$ - равенство

$3^{28} > 1 + 3^{x-1} \cdot \log_3 x = 1$

$x \in (4; 28]$

$x=29$

$3^{28} = 3^{27} \cdot 3$

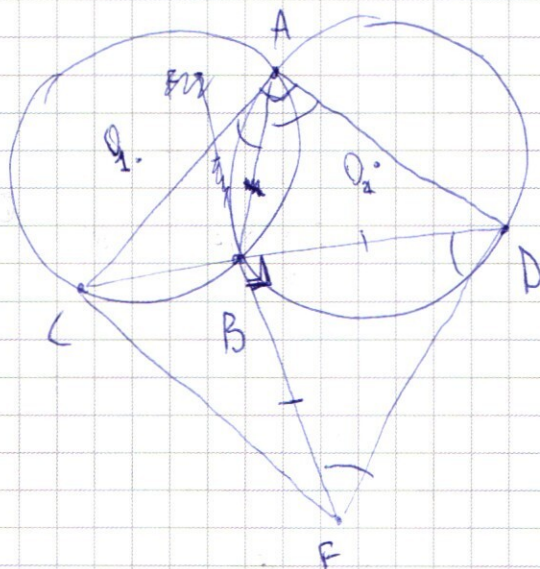
$x=31$

$3^{30} = 3^{29} \cdot 3$

$x=4$ и $x=31$ - равенство

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б)



$(F - ?)$

$$R_1 = R_2 = 17$$

$$\textcircled{1} \quad \begin{array}{r} 64827 \div 9 \\ 18 \quad \overline{) 7203} \quad 3 \\ \underline{2401} \end{array}$$

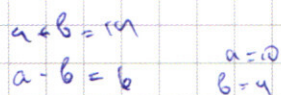
$$\begin{array}{r} 280 \\ \times 3 \\ \hline 840 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64827 \div 3 \\ \overline{) 21609} \quad 3 \\ \underline{7203} \quad 3 \\ \underline{2401} \quad 7 \\ \underline{343} \end{array}$$

$$K = 7^4 \cdot 3^3$$

$$S_1 = \{ 7, 7, 7, 7, 1, 3, 3, 3 \}$$

$$S_2 = \{ 7, 7, 7, 7, 1, 3, 9, 1 \}$$



8) $S_{ACF} = 16\sqrt{2} \cdot 16\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 256$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\textcircled{2} \quad \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin \beta - \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 5x \cos 2x + \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

$$2\cos 2x (\cos 5x + \sin 5x) + \sqrt{2} \cos 2x \rightarrow \sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} \cos^2 2x + 2\cos 2x (\cos 5x + \sin 5x) - \sqrt{2} = 0$$

$$x_1 - x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 2x =$$

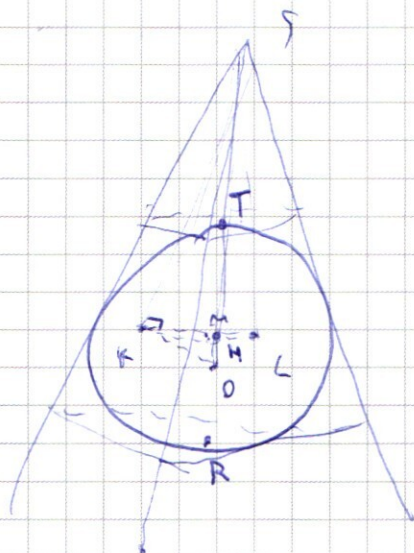
$$D = 6^2 - 400 = 4(\cos^2 5x + \sin^2 5x + 2 \cos 5x \sin 5x) - 400 = 20 + 4 \sin 10x$$

$$2 \cos 5^\circ \times \cos 2^\circ + 2 \sin 2^\circ \times \cos 5^\circ + \sqrt{2} \cos 4^\circ = 0$$

$$2\sqrt{2} \sin^2 2x - 2 \sin 2x \cos 5x - |2 \cos x \cos 3x + 1| = 0$$

$$x_1 - x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x \cos 24 \quad x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$KS = SL = SM$$

$$\frac{ST}{SR} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{ST}{ST+2R} = \frac{3}{4} \Rightarrow R = \frac{ST}{6} \Rightarrow ST = 6R$$

$$SK^2 = SO^2 - OK^2 = 2.25ST^2 + \frac{ST^2}{4} = 2.5ST^2$$

$$SK^2 = SO^2 - OK^2 = 2.25R^2 - R^2 = 1.25R^2$$

$$SK = \frac{\sqrt{5}}{2} R \approx ST/2R \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{SK}{SO} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} R}{3R} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)$$

$$SH = SK \cdot \cos \alpha = \frac{5}{12} R$$

$$ST = 2R$$

$$SK^2 = SO^2 - OK^2 = 49R^2 - R^2 = 48R^2 \Rightarrow SK = 4\sqrt{3}R$$

$$\cos \alpha = \frac{SK}{SO} = \frac{4\sqrt{3}R}{7R} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$SH = SK \cdot \cos \alpha = 4\sqrt{3}R \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{48}{7} R$$

$$\frac{S_{ans}}{8g} = \left(\frac{SH}{ST}\right)^2 =$$

$$= \frac{64}{49}$$

$$S_{ans} = \frac{64 \cdot 9}{49} = \frac{576}{49}$$

$$- \frac{x}{y^{\ln(-y) - 2\ln(xy^2)}} = 1$$

$$t = \ln(-y)$$

$$-x^{\ln(-y) - 2\ln(xy^2)} = y^{\ln(-y)}$$

$$-x^{\ln(-\frac{y^3}{x^2})} = y^{\ln(-y)}$$

$$1^0 \quad x = -\frac{1}{3}y$$

$$2^0 \quad x = y + 4$$

$$\left(\frac{1}{3}y\right)^{\ln(-\frac{y^3}{x^2})} = y^{\ln(-y)}$$

$$\left(\frac{1}{3}y\right)^{2\ln(-\frac{y}{x}) + t} = y^t$$

$$-(y+4)^{2\ln(-\frac{y}{x}) + t} = y^t$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^{4\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$t = y - y$$

$$\frac{x^{\ln t}}{t^{\ln t}} = x^{\ln x^2 + \ln t^4}$$