

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$64827 = 7^4 \cdot 3^3$$

Значит существует 2 набора цифр, из которых могут состоять нули и 8^{ми} значные числа

① 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7

② 1, 1, 3, 9, 7, 7, 7, 7

Для 1^{го} набора количество чисел: $\frac{8!}{3!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$

Для 2^{го} набора: $\frac{8!}{2!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 840$

Всего: $840 + 280 = 1120$ наборов (8^{ми} знач. чисел)

Ответ: 1120

№2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) \left(\cos 5x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) \right) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (\cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

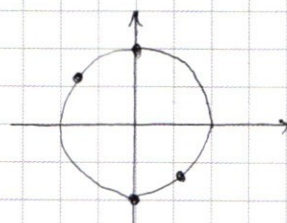
$$(\cos 2x + \sin 2x) \left(2 \cos\left(\frac{7x + \pi}{2}\right) \cos\left(\frac{3x - \pi}{2}\right) \right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = -\sin 2x \\ \cos\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{cases}$$

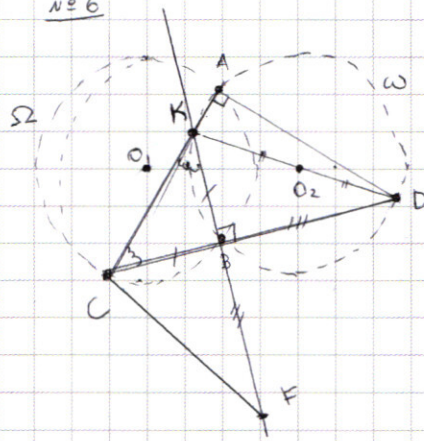
$$\begin{cases} 2x = \frac{3\pi}{4} + \pi k \\ \frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi l \\ \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi l}{7} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{3\pi}{8} + \frac{2\pi k}{2}$; $\frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi l}{7}$; $\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$
 $\{k; l; n\} \in \mathbb{Z}$



№ 6



$$r_1 = r_2 = 17$$

CF?

O_1 и O_2 - центры окруж.

Σ и ω - окружности

$$BF \cap \omega = K$$

(a)

Решение:

① $\angle AO_1B = \angle AO_2B$ (т.к. $\triangle AO_1B = \triangle AO_2B$ по 3 сторонам)

② $\angle AO_2B = 2\angle ADB$ (центр и впис. в окруж.)
опир. на 1-ую дугу

$AKBD$ - вписан в окруж. $\rightarrow \angle AKB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle ADB$
 $\angle AKB = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle AO_2B$

$\angle CKB = 180^\circ - \angle AKB = \frac{1}{2} \angle AO_2B$

$\angle ACB = \angle AO_1B \cdot \frac{1}{2}$ (центр и впис., опир. на 1-ую ~~дугу~~ дугу) $\rightarrow \angle CKB = \angle ACB$
пункт ①

③ т.к. $\angle CKB = \angle ACB$ ~~то~~ $\triangle KBC$ - равнобедр. и $KB = CB$ (отр.)

④ $\triangle CBF$ и $\triangle KBD$ - прямоугол. ; $BD = BF$ (по уш.)

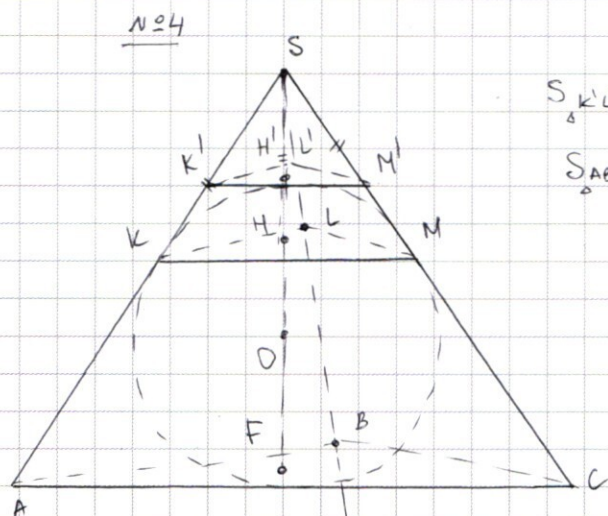
$\triangle CBF = \triangle KBD$ (~~по 2-м катетам~~ по 2-м катетам) $\Rightarrow KD = CF$

⑤ $\angle KAD = 90^\circ \Rightarrow KD$ - диаметр, $KD = 2r = 34$

$CF = 34$

Ответ: а) $CF = 34$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$S_{K'LM'} = g$$

$$S_{ABC} = 16$$

2-разрядное сопелот

Решение:

- ① угол $\angle H'$ - высота $SK'L'N'$

SH - bykوتا SKLM

SF - boikot SABC

$$\{SH'; SH; SF\} \subset (SO)$$

So $\perp(KLN)$

- ② $\triangle K'L'M' \sim \triangle ABC$

$$\frac{S_{\triangle K'LN'}}{S_{\triangle ABC}} = k^2 = \frac{9}{16} \quad k = \frac{3}{4}$$

$$h = \frac{3}{4}$$

$$SK'L'M' \sim SABC \text{ с коэф. } k = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{SH'}{SF} = \frac{3}{4}$$

$$SF = 2R + SH'$$

$$\frac{SH'}{2R+SH'} = \frac{3}{4}$$

$$\delta H' = 6R$$

- ③ $OK \perp KS \Rightarrow \Delta SKO$ - правоуг.
(св. гипотенуз и кат.)

и т. Пирагора

$$SK^2 + KO^2 = SO^2$$

$$SK = \sqrt{49R^2 - R^2} = R\sqrt{48}$$

$$80 = SH' + OH'$$

$$SO = 7R$$

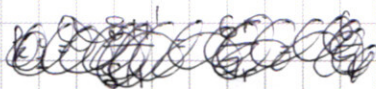
$$KO = R$$

$$\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{7R} = \frac{1}{7}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$$

④

$$SK'LN' \sim SKLM$$



$$k_1 = \frac{SH'}{SH} = \frac{6R}{\frac{48}{7}R} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{S_{\Delta K'LN'}}{S_{\Delta KLM}} = k_1^2 = \frac{49}{64}$$

$$S_{\Delta KLM} = \frac{8 \cdot 64}{49} = \frac{576}{49}$$

Ответ:

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$$

$$S_{\Delta KLM} = \frac{576}{49}$$

ΔKSH - прямоугольный.

$$SH = KS \cdot \cos \angle KSH$$

$$SH = KS \cdot \frac{KS}{SO}$$

$$SH = \frac{48R^2}{7R} = \frac{48}{7}R$$

$$S_{\Delta KLM} = \frac{S_{\Delta K'LN'} \cdot 64}{49}$$

№3

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2) & ① \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 & ② \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$② \quad 3x^2 - (2y+12)x - (y^2+4y) = 0$$

$$D = (2y+12)^2 + 4(y^2+4y) \cdot 3 = 4y^2 + 48y + 144 + 48y + 12y^2 = (4y+12)^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{2y+12 + 4y+12}{6} = y+4 \\ x = \frac{2y+12 - 4y-12}{6} = -\frac{1}{3}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y+4 \\ x = -\frac{1}{3}y \end{cases} \quad \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

⑤ ① $\angle KCB = \angle CKB = 45^\circ$

$\cos \angle KB = \sin \angle KB = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin \angle BKD = \frac{BD}{KD} = \frac{30}{34}$

$BD = 30$ (по т. Пифагора)

$BK = BC = 16$ (по усл.)

$\cos \angle BKD = \frac{BK}{KD} = \frac{16}{34}$

$\sin \angle CKD = \sin (\angle CKB + \angle BKD) = \sin \angle CKB \cos \angle BKD + \cos \angle CKB \sin \angle BKD =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{30}{34} + \frac{16}{34} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{46}{34} = \frac{23\sqrt{2}}{34} = \sin \angle AKD$

② В прямоуго. $\triangle AKD$ $AK = KD \cdot \cos \angle AKD = KD \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \angle AKD}$

$AK = 34 \sqrt{1 - \frac{23^2 \cdot 2}{34^2}} = \sqrt{34^2 - 23^2 \cdot 2}$

③ $S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle KCF$ $\angle KCF = \angle CKD$

$AC = KC + AK = \sqrt{2} \cdot BC + AK = 16\sqrt{2} + \sqrt{34^2 - 23^2 \cdot 2}$

$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot \frac{23\sqrt{2}}{34} \left(\sqrt{34^2 - 23^2 \cdot 2} + 16\sqrt{2} \right)$

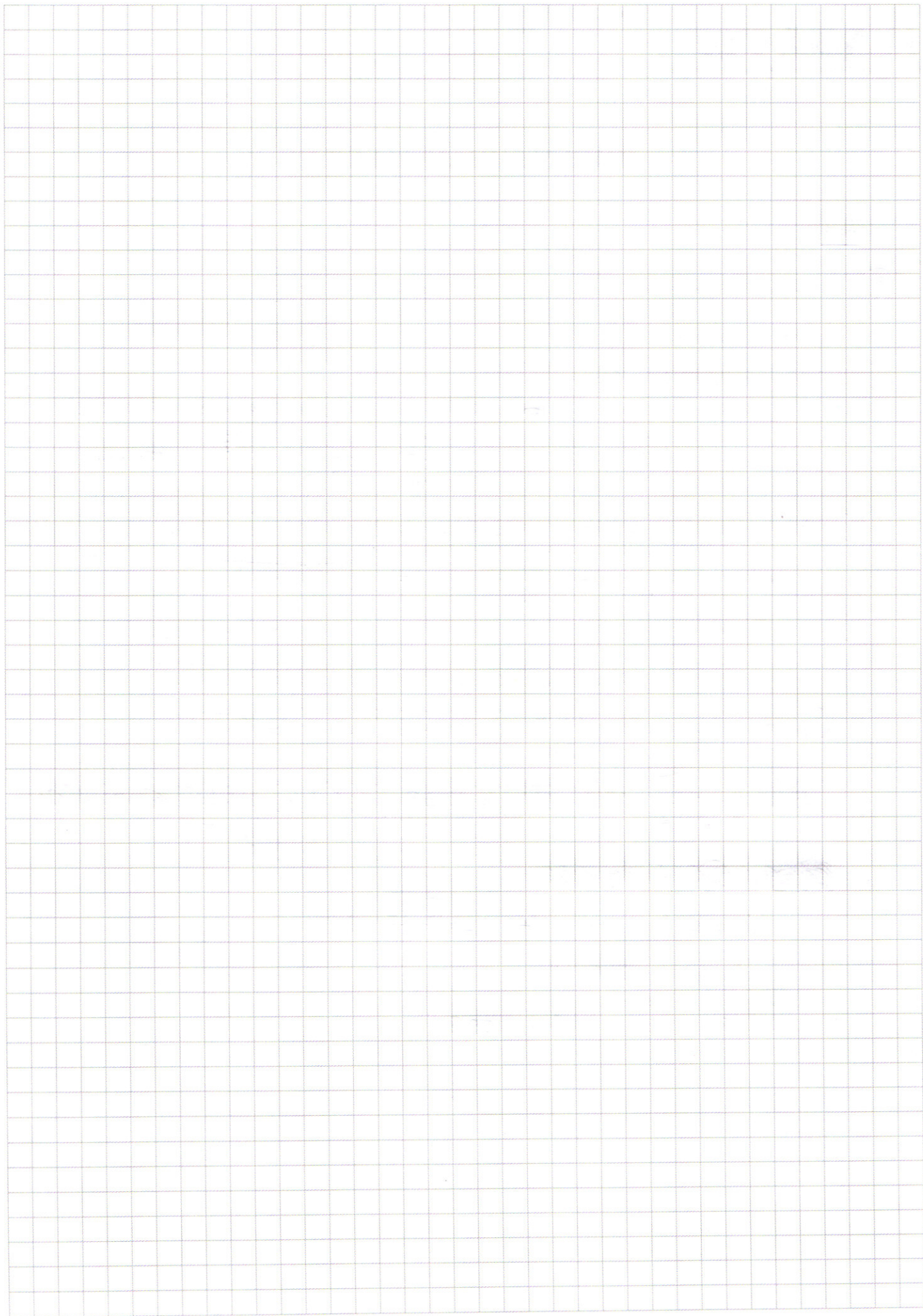
~~$S_{\triangle ACF} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 23 \cdot \sqrt{98} = \frac{23}{2} \cdot \sqrt{98} = 23 \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} = 23 \cdot 2.47 = 56.81$~~

~~$\sqrt{34^2 - 23^2 \cdot 2} = \sqrt{98}$~~

$S_{\triangle ACF} = \left(16\sqrt{2} + \sqrt{34^2 - 23^2 \cdot 2} \right) \cdot \frac{23\sqrt{2}}{2}$

$S_{\triangle ACF} = 529$

Ответ: ⑤ $S_{\triangle ACF} = 529$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

64827 3
21609 3
7203 3
2401 7
343 7
49 7
7 7
1 4
0

2401 7
21 93
30
28
21
21
0

343 7
28 49
63
63
0

Наборы: 1 333 7777
1 1 3 7777 9
~~1 1 3~~

4 7 8
3

8!
3! · 4!

7 · 40 = 280
x 3
840

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 2x (\cos 5x + \sin 5x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x)) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (\cos 5x + \cos (2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos \frac{(5x + 2x + \pi/4)}{2} \sin \frac{(2x + \pi/4 - 5x)}{2}) = 0$$

$$\cos 2x = -\sin 2x$$

$$\sin (\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\sin (-\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$2x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$$

$$\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8} = \pi n$$

$$-\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} = \pi e$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

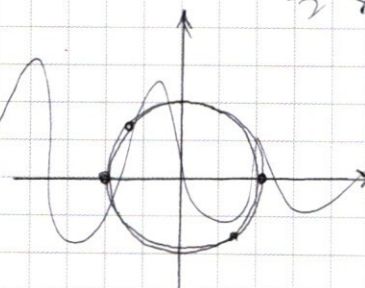
$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi e}{3}$$

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$$



$$\begin{aligned} y &< 0 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned} \Delta &= (2y+12)^2 + 4(y^2+4y) \cdot 3 = 4y^2 + 48y + 144 + 12y^2 + 48y = \\ &= 16y^2 + 96y + 144 = (4y+12)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X = \frac{2y+12 + 4y+12}{6} = y+4 \\ X = \frac{2y+12 - 4y+12}{6} = -\frac{1}{3}y + 4 \end{cases}$$

$$\frac{(-(y+u)^7)^{\ln(-y)}}{y^{\ln(y)} (y+u)^{2\ln(y+u)} (y^2)^{\ln(y^2)}} = 1$$

$$\log_2 4 = 2$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 9 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\frac{SO_2}{SO_3} = \frac{3}{4}$$

$$4 \text{ SO}_2 = 3 \text{ SO}_2 + 6 \text{ r}$$

$$SO_2 = 65$$

$$KS = \sqrt{(7r)^2 - r^2} = r\sqrt{48}$$

$$1 - \frac{1}{49} = \frac{\sqrt{48}}{7}$$

$$\sin KSO = \frac{r}{r_1} = \frac{1}{4} \quad \angle KSO = \arcsin \frac{1}{4}$$

$$\angle KEO = \arcsin \frac{1}{7}$$

$$SH = K_S \cdot \cos(\theta) = r \frac{\sqrt{8} \sqrt{8}}{7} \frac{6}{\sqrt{8} \sqrt{7}} = \frac{6}{7} r$$

$$\frac{\text{SO}_2}{\text{Su}} = \frac{6.7}{48} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{9}{x} = \frac{49}{60}$$

$$x = \frac{9.64}{49}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

$$-y < 8$$

$$y > -8$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 15 \\ \hline 75 \\ 15 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$x+y < -8 \quad -8 \quad x+y > 8$$

$$|x-y+8| = (x+y+8) = 16$$

$$|x-y+8| + (x+y+8) = 16$$

$$x-y < -8$$

$$x-y > -8$$

$$x-y > -8$$

$$-x+y-8 - x-y-8 = 16$$

$$x-y+8 - x-y-8 = 16$$

$$x-y+8 + x+y+8 = 16$$

$$2x = -32$$

$$x = -16$$

$$-2y = 16$$

$$y = -8$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

$$-8 < y < 8$$

$$8^2 + (|y|-15)^2 = a$$

$$a > 289$$

$$(|x|-8)^2 + 49 = a$$

$$64 + y^2 - 30|y| + 225 = a$$

$$y^2 - 30|y| + (289 - a) = 0$$

$$\Delta \geq 0$$

$$30 - \sqrt{\Delta} < 0$$

$$64 - 240 + (289 - a) = 0$$

$$113 - a = 0 \quad a = 113$$

$$900 - 4(289 - a) = 900 - 1156 + 4a =$$

$$= 4a - 256 =$$

$$= 4(a - 64)$$

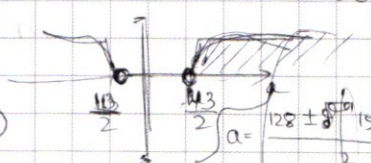
$$4(a - 64) > 900$$

$$a - 64 > 225$$

$$a > 289$$

$$\sqrt{a} > 30$$

$$a > 900$$



$$a = \frac{143}{2}$$

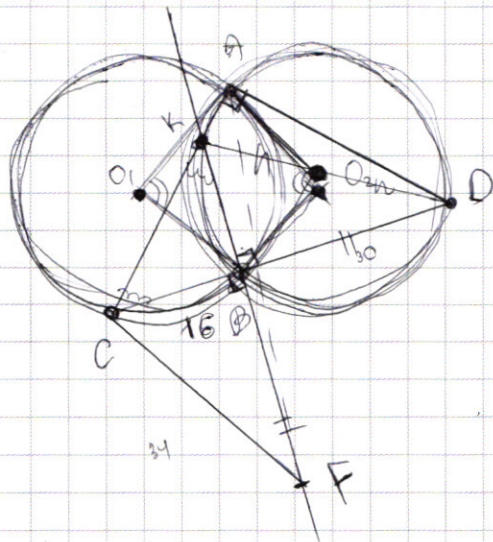
$$a = \frac{113}{2}$$

$$16(a - 64)^2 > 900$$

$$a^2 - 128a + 64^2 > \frac{225}{4}$$

$$128^2 - 4 \cdot \frac{225}{4} = 128^2 - 225 = 16384 - 225 = 16159$$

$$= 128^2 - (128^2 - 225) = 225$$



$$r=13$$

$$BC=16 \quad SACF=?$$

$$KD=34$$

$$CF=2r=34$$

$$34^2 - 16^2 = \sqrt{18 \cdot 50} = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$$

$$\left(-\frac{x^7}{3x}\right) \ln 3x = x^{2h}(9x^3)$$

$$\frac{(-x)^{7 \ln 3x - 2 \ln(9x^3)}}{3x \ln 3x} = 1$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 16 \\ \hline 138 \\ 23 \\ \hline 368 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 368 \\ 161 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\frac{3^3}{3^4} = 3^3$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 7 \\ \hline 161 \end{array}$$

$$\frac{(-x)^{2 \ln 3x - 2 \ln \frac{3x}{9x^3}}}{3x \ln 3x} = 1$$

$$\frac{3^3}{3^4} = 3^3$$

$$e^{\frac{2}{3}} = 9$$

$$x^{\frac{2}{3}} = 3$$

$$196$$

$$(-x) \ln \frac{(3x)^2}{(9x^3)^2} = (-x) \ln 3^3 x$$

$$x \ln 9 = 3$$

$$x = 1 \quad x = \sqrt{e}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\frac{(-x) \ln 27x}{3x \ln 3x} = \frac{1}{3} x \ln 9 = 1$$

$$x = 1 \quad x = \sqrt{e}$$

$$\frac{(-x) \ln 27x}{3x \ln 3x} = \frac{1}{3} x \ln 9 = 1$$

$$\frac{15}{17} \quad \frac{8}{17}$$

$$225 + 64 = 289$$

$$\frac{23}{17} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{23\sqrt{2}}{34}$$

$$\begin{array}{r} 1156 \\ - 1058 \\ \hline 98 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 34 \\ \hline 136 \\ 102 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \\ \times 2 \\ \hline 1058 \end{array}$$