

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

✗ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.

✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

✗ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .

✓ 7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Заметим, что $64827 = 7^4 \cdot 3^3$. Поскольку цифра не может быть больше 9 $\Rightarrow$ что в записе этих 8-значных чисел могут использоваться только цифры: 1, 3, 7, 9. При этом у нас всегда должно быть 4 цифры - семерки и либо 3 тройки и 1 единица либо 1 тройка, 2 единицы и 1 девятка. Посчитаем кол-во таких чисел: выбрать места для семерок есть C_8^4 способов.

Теперь если рассматривать первый случай, то тогда из остав. 4 мест надо выбрать под единицу, а на остальных будут стоять тройки; таких способов C_4^1 , то есть всего чисел в первом способе $C_8^4 \cdot C_4^1$.

Во втором способе надо из 4 мест выбрать одно под тройку и из оставшихся 3 мест выбрать одно под девятку на оставшихся двух будут единицы. Всего таких чисел: $C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1$. Первый и второй случаи не пересекаются. Так как в ^{первых} числах нет цифры 9, а во вторых она есть. Это есть всего таких 8-знач. чисел: $C_8^4 \cdot C_4^1 + C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 4 \cdot C_8^4 (1 + 3) = 16 C_8^4 =$

$$= 16 \cdot \frac{28 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 35 \cdot 2 \cdot 16 = 70 \cdot 16 = 1120$$

Ответ: 1120

✓5

$$\begin{cases} |x+y+8|+|x-y+8|=16 \\ (|x|-8)^2+(|y|-15)^2=a \end{cases}$$

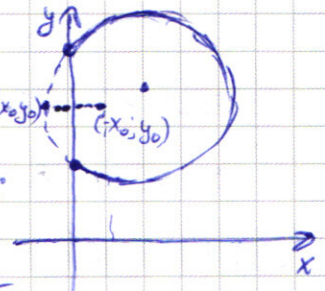
Посмотрим на первое уравнение: $|x+y+8|+|x-y+8|=16$
Заметим, что квадрат с вершинами в точках:
 $(0;8), (0;-8), (-16;-8), (-16;8)$.

Теперь посмотрим на второе уравнение. Это окружность с радиусом $\sqrt{a}$. Теперь заметим, что если какая-то точка с координатами $(x_0; y_0)$ подходит в это уравнение, то и точки с координатами $(-x_0; y_0); (-x_0; -y_0), (x_0; -y_0)$ тоже будут подходить в это уравнение, то есть надо помнить как работает график в I четверти, а во второй ^{четверти} он будет симметричен I относительно Oy, в III симметричен II относ. Ox и в IV симметричен III относ. Oy.

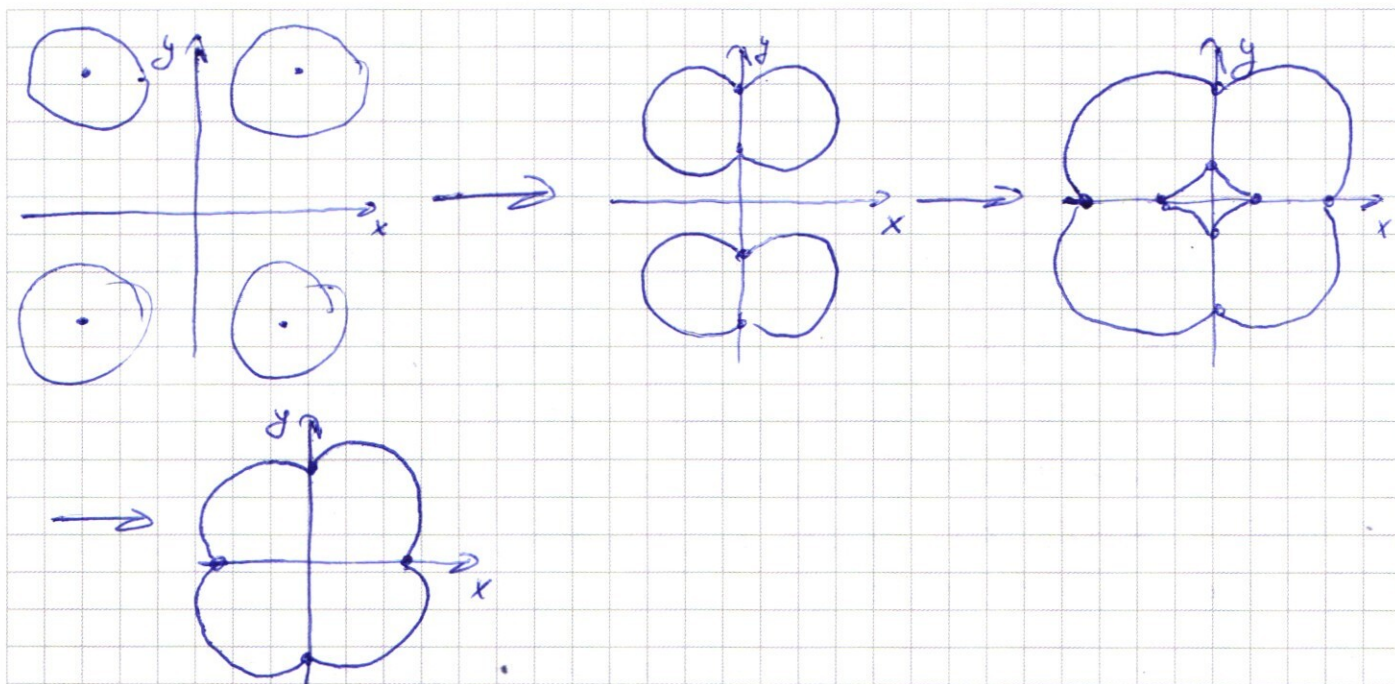
Рассмотрим уравнение $(|x|-8)^2+(|y|-15)^2=a^2$ как окружн. в I четверти. Ее центр в точке $(8; 15)$ и начнем увеличивать a . Пока окружность не начала пересек.

Ox или Oy все тривиально — это просто окружность.

Пусть она пересекает Oy, тогда все, что левее Oy не будет являться частью графика (так как: возьмем точку $(x_0; y_0)$ предположим, что она подходит, но тогда подойдет $(-x_0; y_0)$, а она не попадет на окружность, так как расст. от Oy до $(x_0; y_0) < R$ (радиус окруж.). Это есть график функции $(|x|-8)^2+(|y|-15)^2=a$ с увеличением a будет меняться так:



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Понимать решение задачи методом подвижных графиков:

То есть мы хотим понять, при каких a , кол-во пересеч. окружностей и квадрата будет два; Будем увелич. a

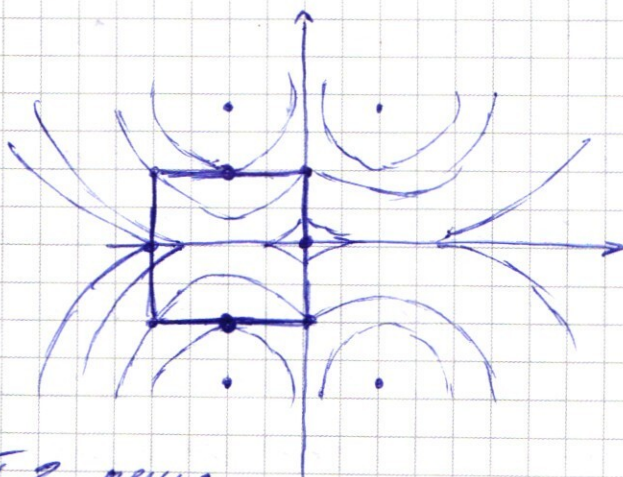
Сначала пересеч. не будет,

затем две окружности

каснутся стороны кв. и будет 2 реш. (это произойдет при радиусе окржс. = 7).

Потом будет больше двух решений, до тех пор, пока окружности не пройдут через точки середины лев и прав стор. квадрата (при радиусе окр. равном $\sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$).

Дальше будет 0 решений. Получается, что когда окружности будут



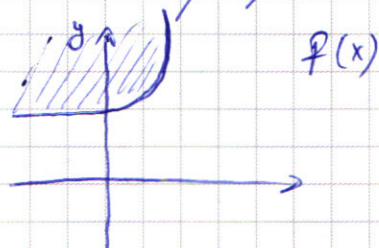
иметь радиусы 7 и 17 будет 2 р-ш. $\Rightarrow a = 7^2 = 49$ и $a = 17^2 = 289$

Ответ: $a \in \{49, 289\}$

✓ 7

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Посмотрим на уравнение $y = 3^x + 4 \cdot 3^{28}$ его график будет иметь вид:



И нас будет интересовать заштрихованная область (причем сам график надо рисовать пунктиром, так как y у нас строгое неравенство)

Посмотрим на второй график функции: $y = 93 + x(3^{28} - 3)$

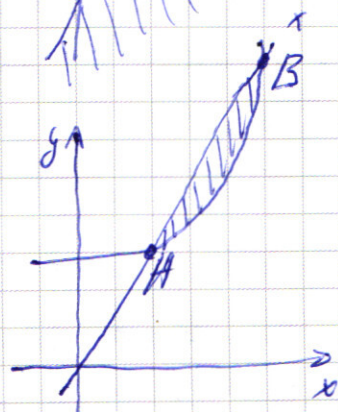
Он будет иметь вид:



И нас опять же будет интересовать заштрихованная область.

Тогда если нарисовать оба графика на одном рисунке получится:

И нас интересует кол-во ~~узлов~~ узлов сетки, которые лежат в заштрихованную область или лежат на 2 графике.



Найдем x координату точек А и В. Для А - это $x = 4$,

для В - это $x = 31$.

$$3^4 + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 4(3^{28} - 3) \Rightarrow 81 + 4 \cdot 3^{28} = 81 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$3^{31} + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 31(3^{28} - 3) \Rightarrow 3^{31} + 4 \cdot 3^{28} = 31 \cdot 3^{28} - 4 \cdot 3^{28} \Rightarrow 3^{31} = 27 \cdot 3^{28} \Rightarrow 3^{31} = 3^{31}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$93 + x \cdot 3^{28} - 3x < 4 \cdot 3^{28} + 3^x$$

$$x \cdot 3^{28} - 3x - 3^x < 4 \cdot 3^{28} - 93$$

$$x \cdot 3^{28} - 3^x$$

$$100 \approx 3^4 \approx 3^{32} \quad 3^{100}$$

$$27 \approx 3^3 \approx 3^{31} \quad 3^{27}$$

$$3^{31} - 3^{27} = 3^{27} (3^4 - 1) = 80 \cdot 3^{27}$$

$$30 \cdot 3^{28} - 3^{30}$$

$$32 \cdot 3^{28} - 3^{32}$$

$$31 \cdot 3^{28} - 3^{31}$$

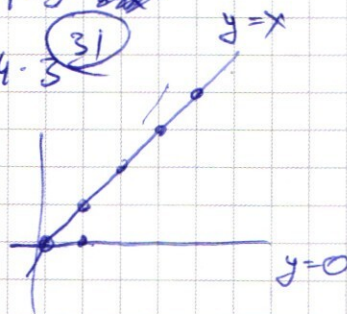
$$\frac{31}{27} 3^{31} - 3^{31} = 3^{31} \left(\frac{31}{27} - \frac{27}{27} \right) = \frac{4}{27} \cdot 3^{31} \approx \frac{1}{9} \approx 1$$

$$31 \cdot 3^{28} - 3^{31} < 4 \cdot 3^{28} - 93 + 3 \cdot 31$$

$$\frac{4}{27} 3^{31} < 4 \cdot 3^{28}$$

$$4 \cdot 3^{31} < 4 \cdot 3^{31}$$

$$3^{31}$$



$$93 + x(3^{28} - 3) - 3^x - 4 \cdot 3^{28} =$$

$$= 93 + x \cdot 3^{28} - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3^{28}(x-4) - 3x - 3^x = P(x)$$

$$\sum_{x=4}^{x=31} P(x)$$

$$x=4$$

$$x=31$$

$$x=31$$

$$\begin{array}{r} 756 \overline{) 3} \\ 6 \overline{) 252} \overline{) 3} \\ 15 \overline{) 24} \overline{) 84} \\ 15 \overline{) 12} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 84 \overline{) 3} \\ 6 \overline{) 28} \\ 24 \overline{) 27} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 28 \\ \hline 216 \\ 540 \\ \hline 756 \end{array}$$

$$756$$

$$\begin{array}{r} 2345121 \\ \times 117215 \\ \hline 117215 \\ 2345121 \\ \hline 25121013 \end{array}$$

$$25121013$$

$$12.5$$

$$\sum_{x=4}^{31} 93 + 3^{28}(x-4) - 3x - 3^x \quad \underline{93} - \underline{4 \cdot 3^{28}} + x \cdot 3^{28} - 3x - 3^x$$

$$93 \cdot (31-4+1) - 4 \cdot 3^{28} (31-4+1) + 3^{28} (x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+27)) - 3(x + (x+1) + \dots + (x+27)) - (3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + \dots + 3^{x+27})$$

$$28(93 - 4 \cdot 3^{28}) + (3^{32} - 3)(4+5+\dots+31) - (3^4 + 3^5 + \dots + 3^{31}) =$$

$$= -11 + (3^{28} - 3)(16 \cdot 31 - 6) =$$

$$1+2+\dots+31 = \frac{32 \cdot 31}{2} = 16 \cdot 31 - 6$$

$$1+2+3=6$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 6 & 14 & 30 & \end{array}$$

$$3^4$$

$$q=2 \quad b_1=2$$

$$2^4-1$$

$$\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$$

$$\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$$

$$\frac{2(15)}{1}$$

$$\frac{3(2)}{2} = 3$$

$$\frac{3}{2} \cdot 8 = 12$$

$$\frac{3}{2} \cdot 26 = 39$$

$$\frac{3}{2} \cdot 80 = 120$$

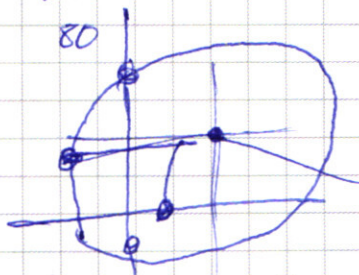
$$\frac{1}{2} \cdot 31 = 15.5$$

$$\frac{1}{2} \cdot 31 = 15.5$$

$$0.6$$

$$\frac{1}{2} \cdot 378 = 189$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 3 & 12 & 39 & 120 \\ 2 & 8 & 26 & 80 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 1171 \\ \times 2 \\ \hline 2342 \end{array}$$

$$(1 \times 1 - 8)^2 + (19 - 15)^2 = a^2$$

$$3^1 + 3^2 + \dots + 3^{31}$$

$$3^1 + 3^2 + 3^3 = 1 + 9 + 27 = 37$$

$$\frac{3}{2} \cdot (3^{31} - 1) = \frac{490}{378}$$

$$\begin{array}{r} 93 \\ \times 28 \\ \hline 744 \\ 186 \\ \hline 2604 \\ + 37 \\ \hline 2641 \end{array}$$

$$\frac{490}{3}$$

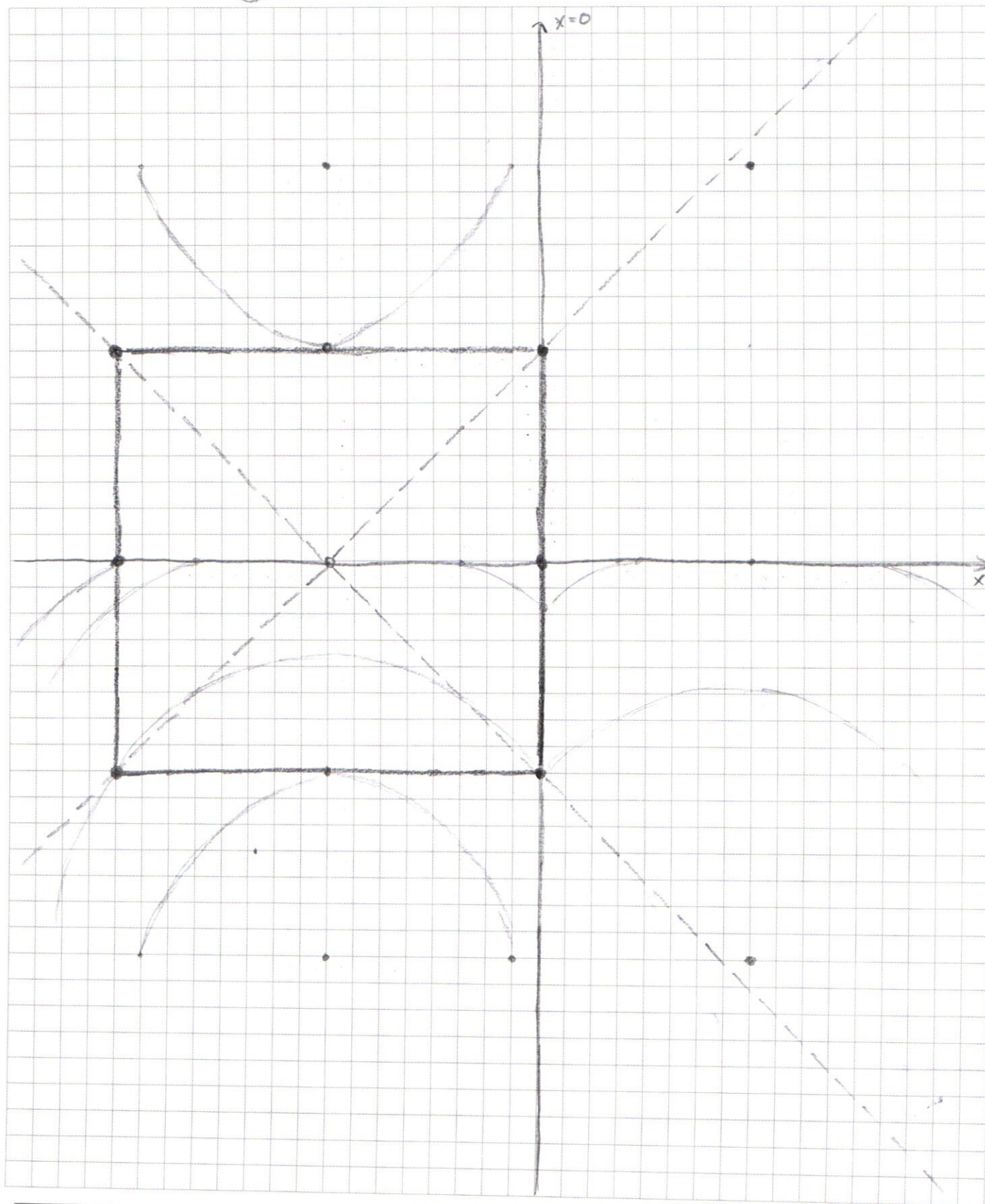
$$\begin{array}{r} 378 \\ \times 4 \\ \hline 1512 \\ 2376 \\ \hline 1512 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2641 \\ - 1470 \\ \hline 1171 \end{array}$$

$$(1171)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

②



③



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

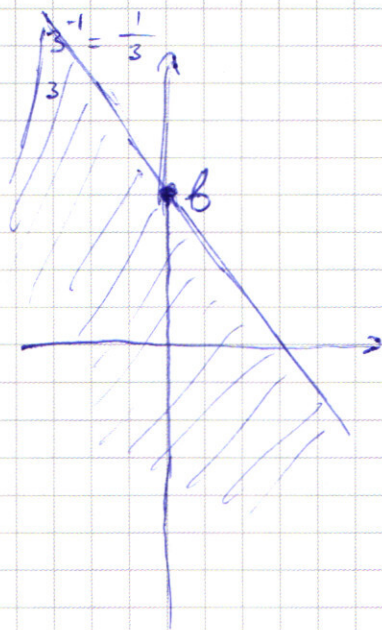
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

$$y = (3^x + 4 \cdot 3^{28})$$

$$y = 93 + 3^{28} - 3x$$



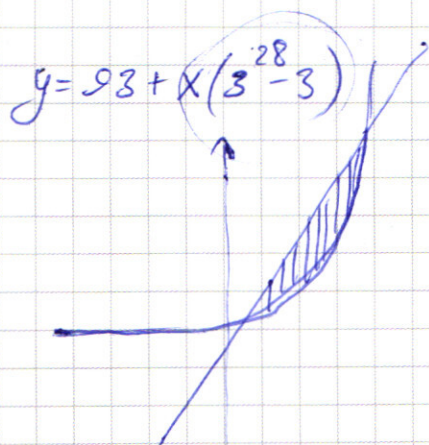
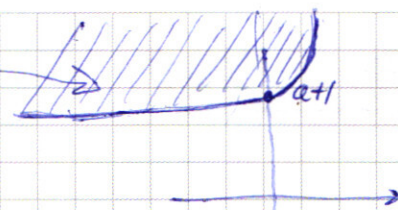
$$y = 3^x + a$$

$$y = -3x + b$$

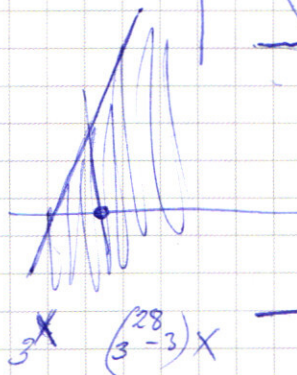
$$a = 4 \cdot 3^{28}$$

$$b = 93 + 3^{28}$$

$$a > b$$



$$y = 10x$$



$$① y = 93 + x(3^{28} - 3) \quad x=1 \quad y = 3^{28} + 90$$

$$② y = 4 \cdot 3^{28} + 3^x \quad x=1 \quad y = 4 \cdot 3^{28} + 3$$

$$1. \quad x=4; y = 93 + 4 \cdot 3^{28} - 12$$

$$2. \quad x=4; y = 4 \cdot 3^{28} + 3^4 = 81$$

$$93 + 4(3^{28} - 3) = 4 \cdot 3^{28} - 12 + 93 = 4 \cdot 3^{28} + 81$$

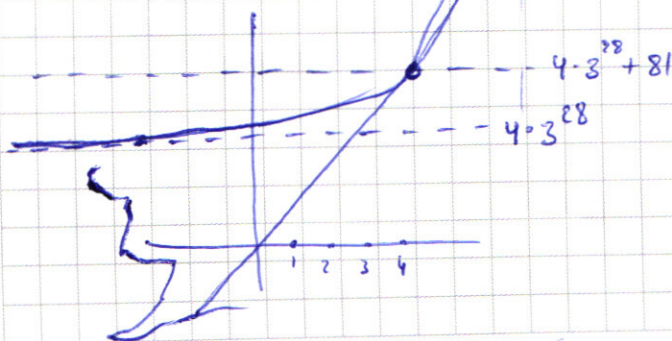
$$4 \cdot 3^{28} + 3^4 = 4 \cdot 3^{28} + 81$$

$$93 + 5 \cdot 3^{28} - 15$$

$$4 \cdot 3^{28} + 3^5$$

$$4 \cdot 3^{28} + 3 = 5 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 28 \cdot 3^{28} - 3 = 28$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \underline{a_8}$$

$$- - - {}_4C_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 70 \\ \hline 1120 \end{array}$$

64827

$$C_2' = 3$$

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 3} \\ \underline{-6} \\ 4 \\ \underline{-3} \\ 18 \\ \underline{-18} \\ 27 \end{array} \quad \begin{array}{r} 21609 \overline{) 3} \\ \underline{-21} \\ 6 \\ \underline{-6} \\ 09 \\ \underline{-09} \\ 12 \\ \underline{-12} \\ 03 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7203 \overline{) 3} \\ \underline{-6} \\ 2401 \end{array}$$

$$3^3 7^4$$

27

$$\begin{array}{r} 3 \\ 8 \\ 49 \\ \times 49 \\ \hline 941 \\ 2196 \\ \hline 2401 \\ \times 27 \\ \hline 16807 \\ 4802 \\ \hline 64827 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 240 \overline{) 17} \\ \underline{21} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 2 \end{array}$$

$$C_8 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{(2 \times 4) \times (3 \times 2) \times 1 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 16 \\ \times 70 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$C_8^4 \cdot C_4^1 + C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1$$

$$C_8^4(C_4^1)^2$$

$$C_8^4 \cdot C_4^1 (1 + C_3^1) = 4 C_8^4 C_4^1 = 16 C_8^4$$

$$\sin(2x)$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

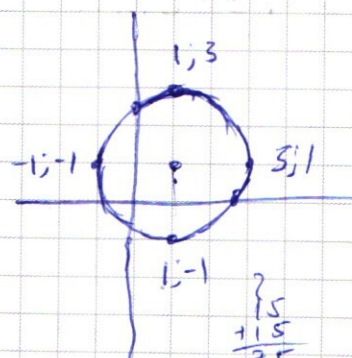
$$2 \cos 5x \cos 2x = \cos(7x) + \cos(3x)$$

$$R=7 \Rightarrow a=4,9$$

$$R=17 \Rightarrow a=289$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

$$c^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$$



$$\begin{array}{r} 15 \\ + 15 \\ \hline 30 \\ + 225 \\ \hline 255 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 170 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} &= x^{2/\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

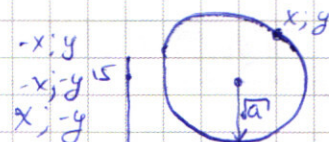
$$y^2 + 2xy + x^2 + 12x + 4y - 4x^2 = 0$$

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

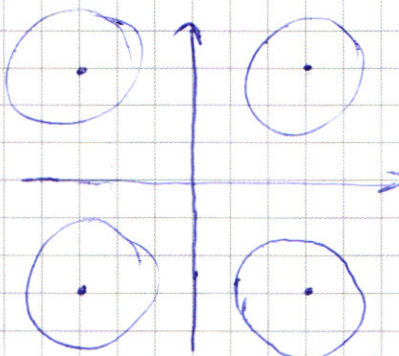
$$(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$$



$$(x-8)^2 + (y-15)^2 = a$$



$$(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2$$

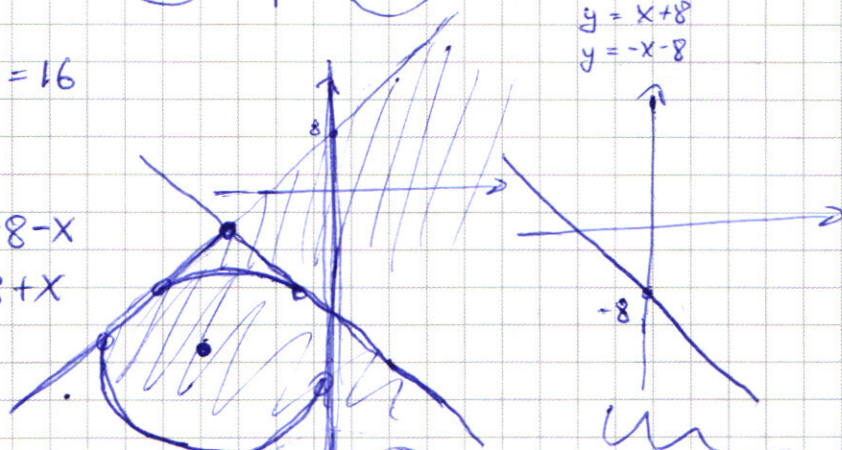


$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

~~хххххх~~

$$\begin{cases} x+y+8 > 0 \\ x-y+8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > -8-x \\ y < 8+x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x+y+8+x-y+8 &= 16 \\ 2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y &= x+8 \\ y &= -x-8 \end{aligned}$$

$$x=16$$

$$\begin{aligned} 8; 15 \\ 8; -15 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y=x+8 \\ y=-x-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x+8 &= -x-8 \\ 2x &= -16 \end{aligned}$$

$$(x=-8; y=0)$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} x+y+8 > 0 \\ x-y+8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > -8-x \\ y < 8+x \end{cases} \quad \begin{aligned} y &= -x-8 \\ y &= x+8 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x+y+8 > 0 \\ x-y+8 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > -8-x \\ y > 8+x \end{cases} \quad \begin{aligned} y &= -x-8 \\ y &= x+8 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} x+y+8 < 0 \\ x-y+8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < -8-x \\ y < 8+x \end{cases} \quad \begin{aligned} y &= -x-8 \\ y &= x+8 \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} x+y+8 < 0 \\ x-y+8 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < -8-x \\ y > 8+x \end{cases} \quad \begin{aligned} y &= -x-8 \\ y &= x+8 \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}: x+y+8+x-y+8=16 \Rightarrow x=0$$

$$\textcircled{2}: x+y+8-x-y-8=16 \Rightarrow y=8$$

$$\textcircled{3}: x-y-8+x-y+8=16 \Rightarrow y=-8$$

$$\textcircled{4}: -x-y-8-x-y-8=16 \Rightarrow x=-16$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x \quad \cancel{\sqrt{2} \cos 2x}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x$$

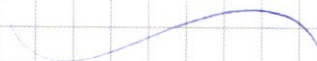
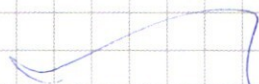
$$\sqrt{2} \cos^2 x - \sqrt{2} \sin^2 x$$

$$\cos 7x = \cos 2x \cos 5x - \sin 2x \sin 5x$$

$$\cos 3x = \cos 2x \cos 5x + \sin 2x \sin 5x$$

$$\sin 7x = \sin 5x \cos 2x + \sin 2x \cos 5x$$

$$\sin 3x = \sin 5x \cos 2x - \sin 2x \cos 5x$$



черновик

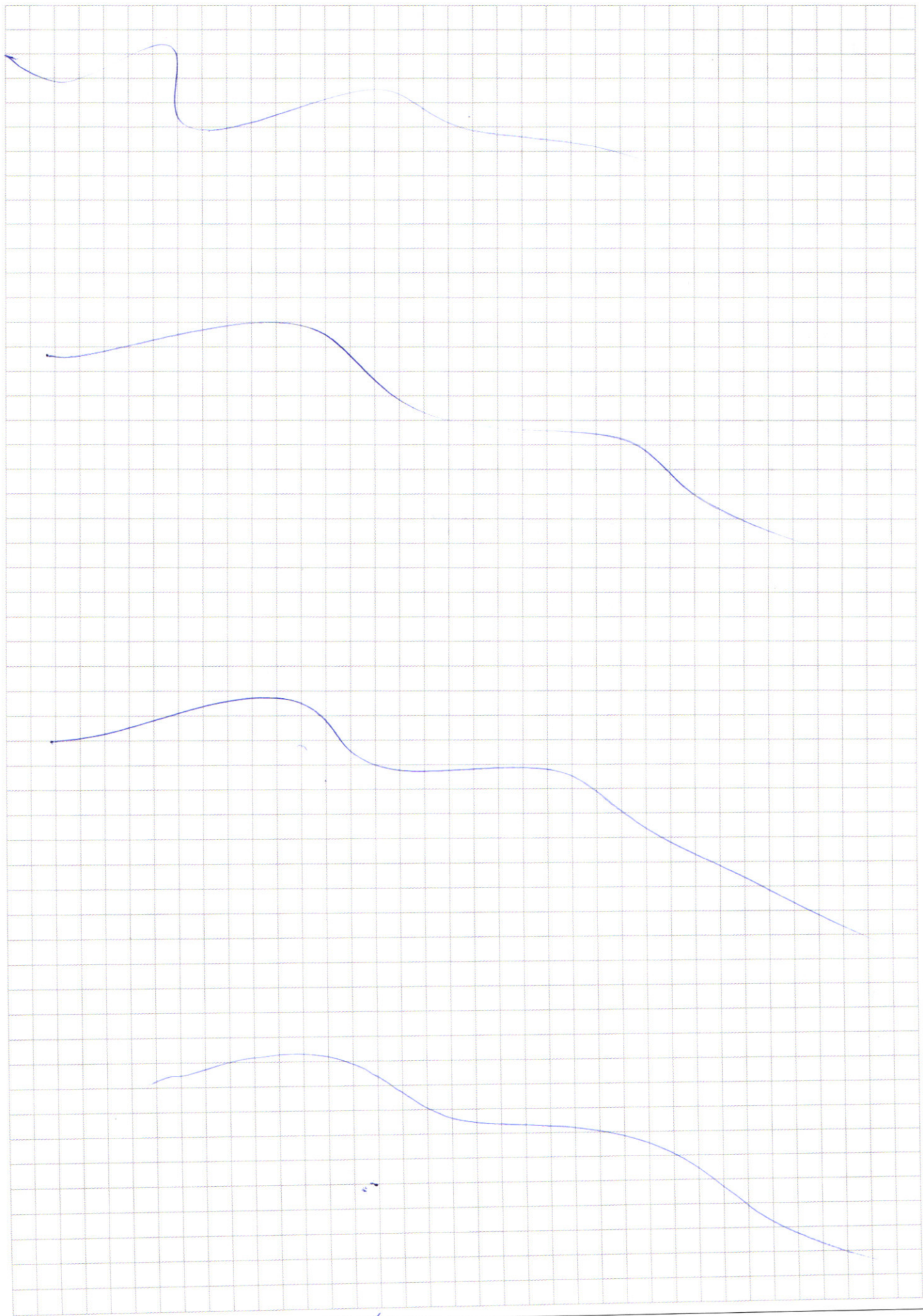


чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

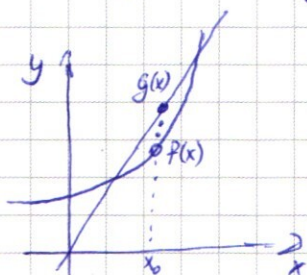
Страница №

(Нумеровать только чистовики)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что для каждого целого x , значение e обеих функций тоже целое. Иное число ~~точек~~ точек с целыми координатами это $g(x) - f(x)$:



Тогда ответ это $\sum_{x=4}^{31} g(x) - f(x) =$

~~$\sum_{x=4}^{31} (93 + x(3^{28} - 3) - 3^x - 4 \cdot 3^{28})$~~

~~$= (31-4+1)(93-4 \cdot 3^{28}) + (3^{28}-3)(4+5+\dots+31) - (3^4+3^5+\dots+3^{31})$~~

$$n = \sum_{x=4}^{31} 93 + x(3^{28} - 3) - 3^x - 4 \cdot 3^{28} =$$

$$= (31-4+1)(93-4 \cdot 3^{28}) + (3^{28}-3)(4+5+\dots+31) - (3^4+3^5+\dots+3^{31})$$

$$= 28(93-4 \cdot 3^{28}) + (3^{28}-3) \cdot 490 - \left(\frac{3}{2} \cdot (3^{31}-1) - 37 \right) =$$

$$= 28 \cdot 93 - 112 \cdot 3^{28} + 490 \cdot 3^{28} - 3 \cdot 490 - \frac{3^{32}-3}{2} + 37 =$$

$$= 1171 + 378 \cdot 3^{28} - \frac{3^{32}-3}{2} = \frac{1}{2} (2342 + 756 \cdot 3^{28} - 3^{32} + 3) =$$

$$= \frac{1}{2} (2345 + 28 \cdot 3^{31} - 3^{32}) = \frac{1}{2} (2345 + 3^{32} \left(\frac{28}{3} - 1 \right)) = \frac{1}{2} (2345 + \frac{25}{3} \cdot 3^{32}) =$$

$$= \frac{1}{2} (2345 + 25 \cdot 3^{31}) = \frac{2345}{2} + \frac{25}{2} \cdot 3^{31}$$

Ответ: $125 \cdot 3^{31} + 1172,5$

$\sqrt{2}$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} \cos^2 2x - \sqrt{2} \sin^2 2x$$

$$\begin{aligned}\cos 7x &= \cos 2x \cos 5x - \sin 2x \sin 5x \\ + \cos 3x &= \cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x \\ + \sin 7x &= \sin 5x \cos 2x + \sin 2x \cos 5x \\ + \sin 3x &= \sin 2x \cos 5x + \sin 5x \cos 2x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x + \sin 3x &= 2 \cos 2x \cos 5x - 2 \sin 2x \sin 5x + \\ + 2 \sin 2x \cos 5x &= 2 (\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) - \sin 2x \sin 5x) = \\ &= 2 (\cos 2x \cos 5x + \sin 2x (\cos 5x - \sin 5x))\end{aligned}$$