

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

$3 \cdot 7 = 21$ — не может быть цифрой, $7 \cdot 7 = 49$ — не может быть цифрой, $3 \cdot 3 = 9$ — может быть цифрой

Значит, есть 2 возможности:

1) В наборе цифр $3, 3, 4, 7, 1, 1$
из него можно составить $\frac{8!}{4! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 280$ различных чисел (восьмизначных)

2) В наборе цифр $1, 3, 4, 7, 1, 9, 2, 1$
из него можно составить $\frac{8!}{4! \cdot 2!} = 840$ различных восьмизначных чисел

Итого можно составить $280 + 840 = 1120$ различных восьмизначных чисел

Ответ: 1120

№2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$\text{или } 2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} (\cos 2x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 2x \sin \frac{\pi}{4}) = 0 \quad | : \sqrt{2} \neq 0$$

$$2 \cos 5x + \sqrt{2} (\sqrt{2} (\cos 2x \cos \frac{\pi}{4} - \sin 2x \sin \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2 \cos 5x + 2 \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \quad | : 2 \neq 0$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2 \cos(3,5x + \frac{\pi}{8}) \cos(1,5x - \frac{\pi}{8}) = 0 \quad | : 2 \neq 0$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \\ 2x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\cos(3,5x + \frac{\pi}{8}) = 0 \text{ или } \cos(1,5x - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\begin{cases} 3,5x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 3,5x + \frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 1,5x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 1,5x - \frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 3,5x = \frac{3\pi}{8} + 2\pi n \\ 3,5x = -\frac{5\pi}{8} + 2\pi n \end{cases} n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 1,5x = \frac{5\pi}{8} + 2\pi n \\ 1,5x = -\frac{3\pi}{8} + 2\pi n \end{cases} n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi}{3,5}n \\ x = -\frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi}{3,5}n \end{cases} n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{1,5}n \\ x = -\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{1,5}n \end{cases} n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{3\pi}{8} + \pi n$; $-\frac{\pi}{8} + \pi n$; $\frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi}{3,5}n$; $-\frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi}{3,5}n$;

$\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{1,5}n$; $-\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{1,5}n$; $n \in \mathbb{Z}$

N3

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \quad (1)$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \quad (2)$$

$$(1) \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$\ln\left(\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)}\right) = \ln(x^{2\ln(xy^2)})$$

$$\ln(-y) \ln\left(-\frac{x^7}{y}\right) = 2\ln(xy^2) \ln(x)$$

$$\ln(-y) \ln(x^7) - \ln^2(-y) = 2\ln^2(x) + 4\ln(-y) \ln(x)$$

(м.к. $y < 0$, то $\ln(y^2) = 2\ln(-y)$)

$$7\ln(x) \ln(-y) - \ln^2(-y) = 2\ln^2(x) + 4\ln(-y) \ln(x)$$

$$2\ln^2(x) - 3\ln(x) \ln(-y) + \ln^2(-y) = 0$$

$$t = \ln(x), \quad z = \ln(-y)$$

$$z^2 - 3tz + 2t^2 = 0$$

$$D = 3^2t^2 - 4 \cdot 2t^2 = t^2$$

$$z_1 = \frac{3t - t}{2} = t$$

$$-y > 0$$

$$y < 0$$

$$xy^2 > 0 \quad | : y^2 \neq 0$$

$$x > 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$z_2 = \frac{3t+t}{2} = 2t$$

$$(z-t)(z-2t)=0$$

$$(\ln(-y) - \ln(x))(\ln(-y) - 2\ln(x)) = 0$$

$$\ln(-y) - \ln(x) = 0 \quad \text{или} \quad \ln(-y) - 2\ln(x) = 0$$

$$\ln(-y) = \ln(x) \quad \ln(-y) = \ln(x^2)$$

$$x = -y$$

$$-y = x^2$$

$$y = -x^2$$

$$(2) \quad y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 - 2y^2 - 3y^2 - 12y + 4y = 0$$

$$-4y^2 - 8y = 0$$

$$y^2 + 2y = 0$$

$$y(y+2) = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

не удов.

Усл. $y < 0$

$x > 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$$

не удов. усл.
 $y < 0, x > 0$

$x = 3$ - корни

$$(27 - 18 - 21 + 12 = 39 - 39 = 0)$$

$$(x-3)(x^2+x-4) = 0$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -9 \end{cases} \quad \text{или} \quad x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1^2 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{не удов. усл. } x > 0$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ y = -\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)^2 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17} - 9}{2} \end{cases}$$

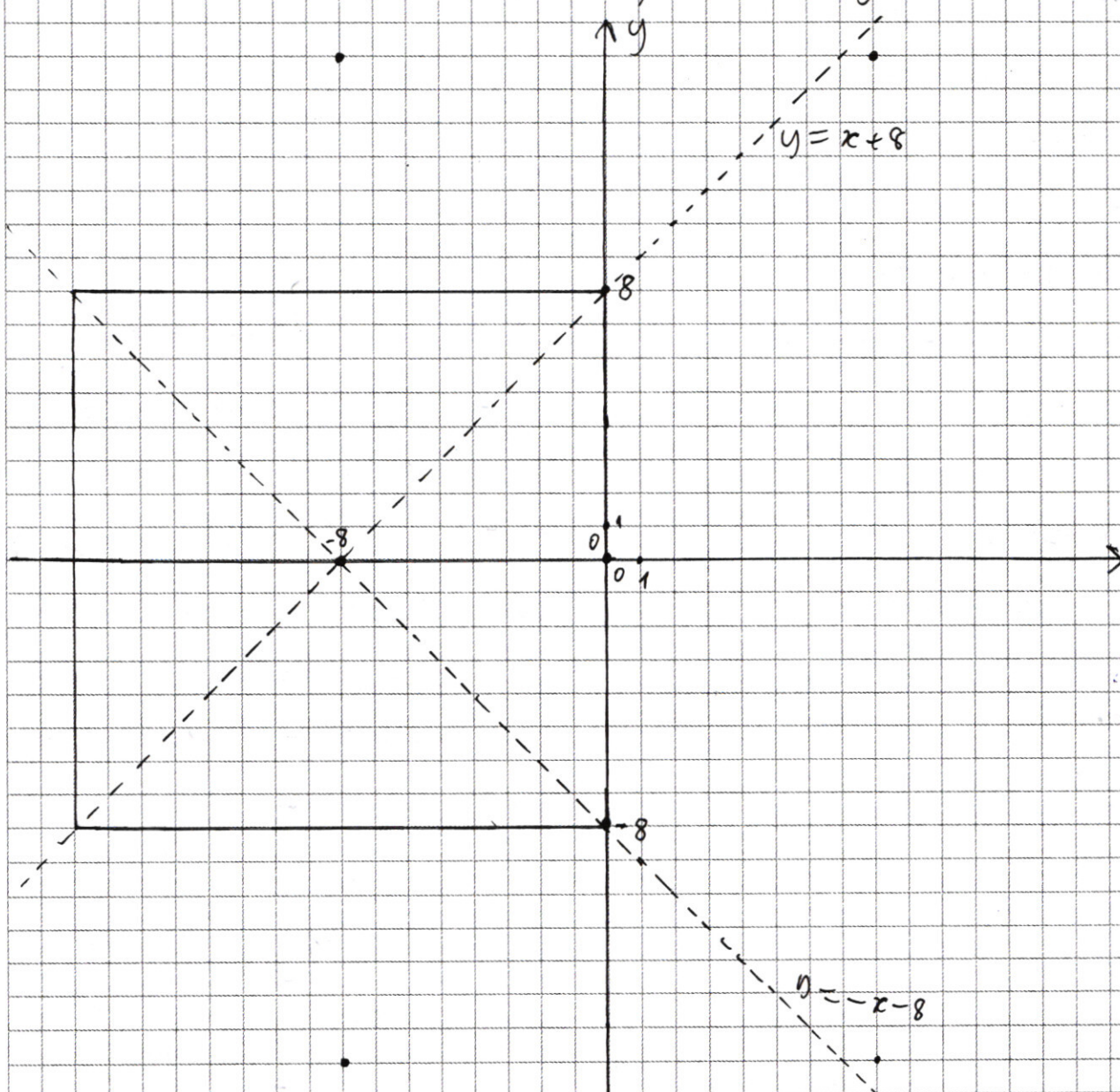
$$\text{Ответ: } (2; -2); (3; -9); \left(-\frac{1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17} - 9}{2}\right)$$

№5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

$$|x+y+8| = \begin{cases} x+y+8, & \text{если } y \geq -x-8 \\ -x-y-8, & \text{если } y < -x-8 \end{cases}$$

$$|x-y+8| = \begin{cases} x-y+8, & \text{если } y \leq x+8 \\ -x+y-8, & \text{если } y > x+8 \end{cases}$$



1) $y \geq -x-8, \quad y \leq x+8$

$$x+y+8 + x-y+8 = 16$$

$$x=0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $y \geq -x - 8, \quad y > x + 8$

$$x + y + 8 - x + y - 8 = 16$$

$$y = 8$$

3) $y \leq -x - 8, \quad y \leq x + 8$

$$-x - y - 8 + x - y + 8 = 16$$

$$y = -8$$

4) $y < -x - 8, \quad y > x + 8$

$$-x - y - 8 - x + y - 8 = 16$$

$$x = -16$$

$$(|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a$$

1) $x, y > 0$

$$(x - 8)^2 + (y - 15)^2 = a \quad \text{часть окр. в I-й коорд. четверти}$$

с центром $(8; 15)$ и радиусом $\sqrt{a}$

2) $x > 0, y < 0$

$$(x - 8)^2 + (y + 15)^2 = a \quad \text{— часть окр. в IV-й коорд.}$$

четверти с центром $(8; -15)$ и радиусом $\sqrt{a}$

3) $x < 0, y > 0$

$$(x + 8)^2 + (y - 15)^2 = a \quad \text{— часть окр. в II-й коорд.}$$

четверти с центром $(-8; 15)$ и радиусом $\sqrt{a}$

4) $x, y < 0$

$$(x + 8)^2 + (y + 15)^2 = a \quad \text{— часть окр. в III-й коорд.}$$

четверти с центром $(-8; -15)$ и радиусом $\sqrt{a}$

Заметим, что график 2-го уравнения имеет ось симметрии Ox и Oy , в I-й и IV-й коорд. четвертях могут быть только точки пересечения с $K=0$, $-8 \leq y \leq 8$, но эти же точки будут точками пересечения во II-й и III коорд. четвертях, Если точка пересечения во II-й коорд. четверти, то в III-ей будет другая точка пересечения, симметричная относительно Ox (если они не совпадают)

1) $a < 49$ — 0 точек пересечения

2) $a = 49$ — 2(•)

3) $49 < a < 289$ — 4(•)

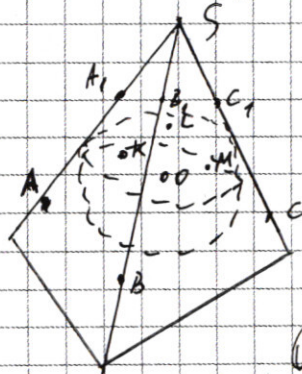
4) $a = 289$ — 2(•)

5) $a > 289$ — 0(•)

(Если $a \leq 0$, то окружностей не будет, но уравнения тоже не будут иметь решений)

Ответ: 49; 289

РЧ



Дано: Треугольник $(\triangle)$ с верши S ,
сф. — впис.

Обозначим A, B, C , A_1, B_1, C_1 —
сечения касательными плоскостями
к сф. призматического $(\triangle)_{\frac{1}{2}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(A_1, B_1, C_1) \parallel (ABC)$, з.м. S_{ABC} и $S_{A_1B_1C_1}$ — подобны

M — точка касания сф. и $(A_1B_1C_1)$

H — точка касания сф. и (ABC)

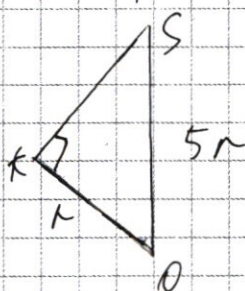
SM и SH — отрезки $S_{A_1B_1C_1}$ и S_{ABC}

соответственно, значит

$$\frac{SM}{SH} = \sqrt{\frac{S_{OA_1B_1C_1}}{S_{OABC}}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{SM}{SM+2r} = \frac{2}{3}$$

$SM = 4r$, $SO = 5r$, $OK \perp KG$ (как касательная и радиус)



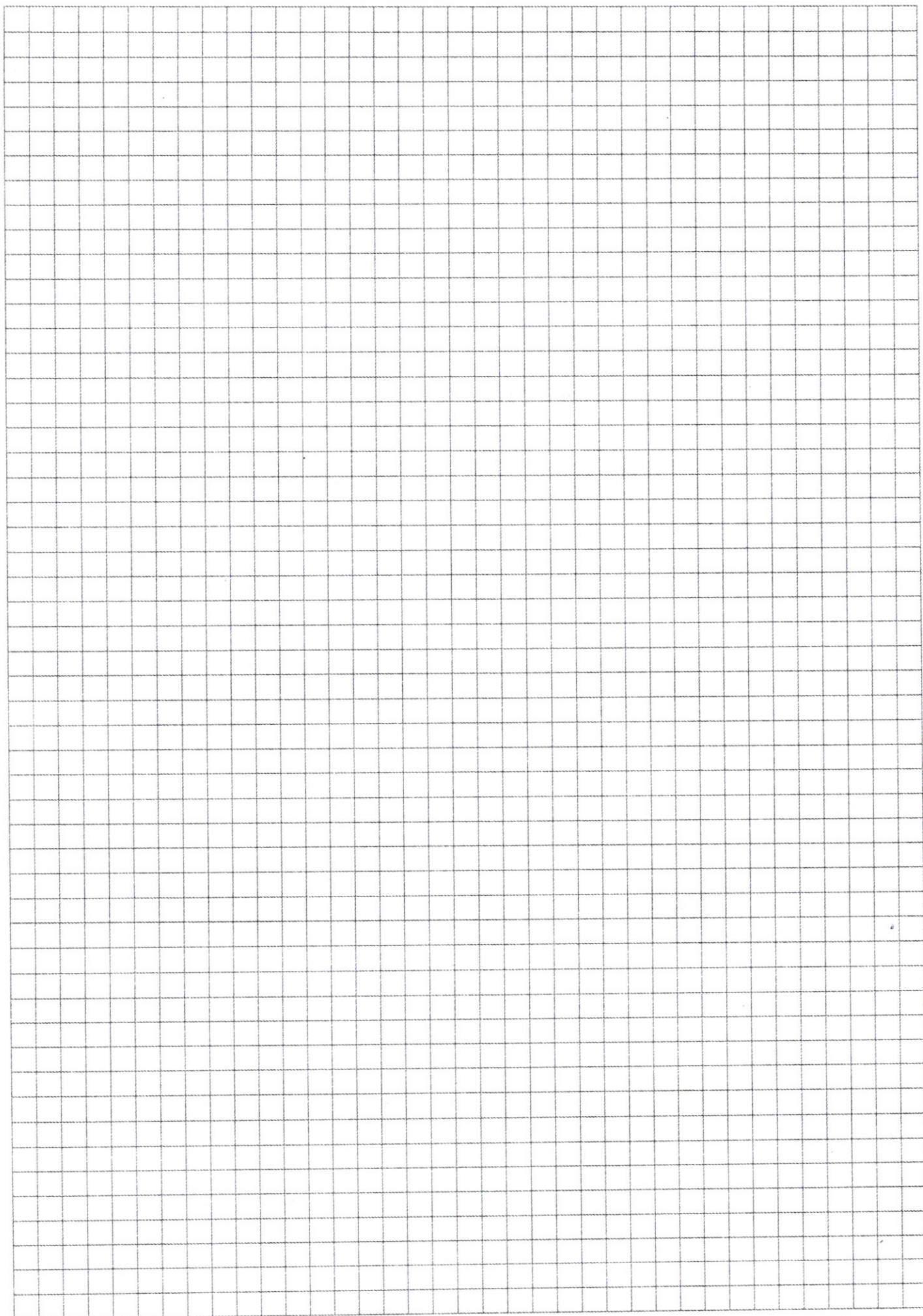
$$\sin(\angle KSO) = \frac{1}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$KS^2 + r^2 = 25r^2 \text{ (т-Пиф.)}$$

$$KS = \sqrt{24}r = 2\sqrt{6}r$$

Найдём высоту пирамиды $SKML$

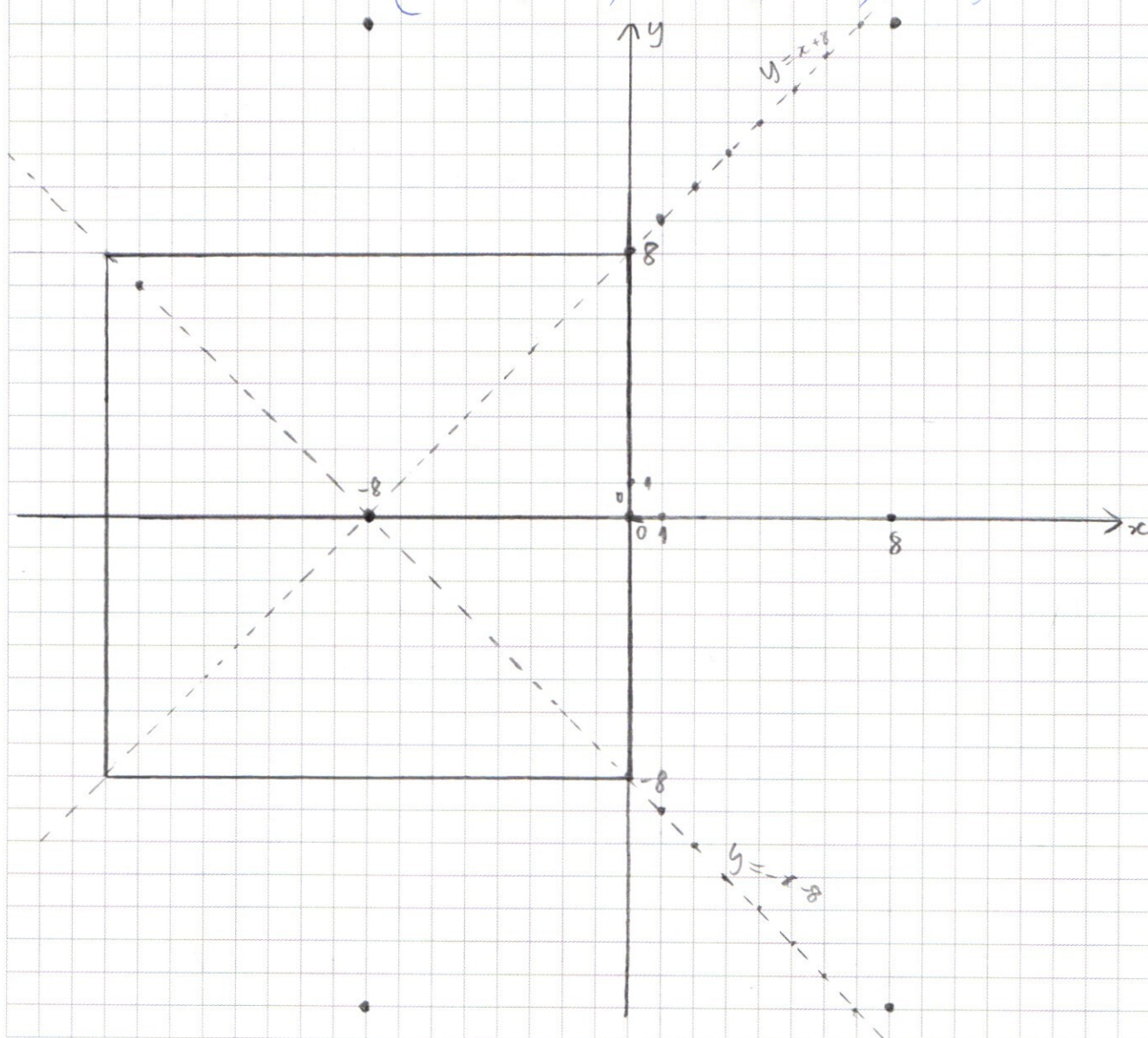


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

$$|x+y+8| = \begin{cases} x+y+8, & x+y+8 \geq 0 \quad / \quad y \geq -x-8 \\ \cancel{x+y+8}, & x+y+8 < 0, \quad y < -x-8 \end{cases}$$

$$|x-y+8| = \begin{cases} x-y+8, & x-y+8 \geq 0, \quad y \leq x+8 \\ -x+y-8, & x-y+8 < 0, \quad y > x+8 \end{cases}$$



$$1) y \geq -x-8, \quad \cancel{y > x+8} \quad y \leq x+8$$

$$x+y+8+x-y+8=16$$

$$2x+16=16$$

$$x=0$$

$$2) y \geq -x-8, \quad \cancel{y \leq x+8} \quad y > x+8$$

$$\cancel{x+y+8} - \cancel{x+y-8} = 16$$

$$2y=16$$

$$y=8$$

$$3) y < -x-8, \quad \cancel{y > x+8} \quad y \leq x+8$$

$$\cancel{x-y-8} + \cancel{x-y+8} = 16$$

$$-2y=16$$

$$y=-8$$

$$4) y < -x-8, \quad \cancel{y \leq x+8} \quad y > x+8$$

$$\cancel{-x-y-8} - \cancel{-x-y-8} = 16$$

$$-2x-16=16$$

$$-2x=32$$

$$x=-16$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{15^2 + 8^2} = \\ & \sqrt{225 + 64} = \\ & \sqrt{289} = \\ & = \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 23 \overline{) 391} \\ \underline{46} \\ 119 \\ \underline{119} \\ 0 \end{array}$$

$$(x-8)^2 + (y-15)^2 = a$$

$$1) x, y > 0$$

$$(x-8)^2 + (y-15)^2 = a$$

центр в первом (8; 15) и $r = \sqrt{a}$

$$2) x > 0, y < 0$$

$$(x-8)^2 + (y+15)^2 = a - \text{центр в четвертом (8; -15) и } r = \sqrt{a}$$

$$3) x < 0, y > 0$$

$$(x+8)^2 + (y-15)^2 = a - \text{центр в третьем (-8; 15) и } r = \sqrt{a}$$

$$4) x, y < 0 \quad (x+8)^2 + (y+15)^2 = a - \text{центр в четвертом (-8; -15) и } r = \sqrt{a}$$

$$x(x^3 - 2x^2 - 7x + 12) = 0$$

$$x = 2$$

$$8 - 8 - 14 + 12 = 0$$

$$x = 3$$

$$27 - 18 - 21 + 12 = 39 - 39 = 0$$

$$x = 3 - \text{корень}$$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{(\sqrt{17} - 1)^2}{4} \quad x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$= \frac{17 - 2\sqrt{17} + 1}{4} =$$

$$= \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

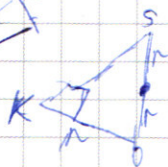
$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 7x + 12 \\ x^3 - 3x^2 \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 7x \\ -x^2 + 3x \hline -4x + 12 \\ -4x + 12 \hline 0 \end{array}$$

$$x(x-3)(x^2+x-4) = 0$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

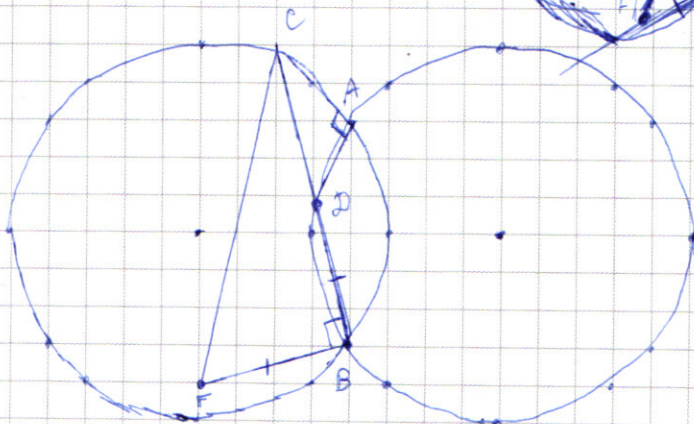
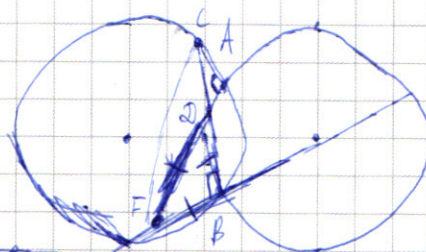


$$\frac{SO}{SM} = \frac{2}{3}$$

$$SM = 1$$

$$\angle KSO = 30^\circ$$

$$\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{9}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right) \ln(-y) = x^2 \ln(xy^2)$$

$$\ln(-y) \ln\left(-\frac{x^7}{y}\right) = 2 \ln(x) \ln(xy^2) \quad \begin{matrix} -y > 0 \\ y < 0 \end{matrix}$$

$$\ln(-y) (\ln(x^7) - \ln(y)) = 2 \ln(x) (\ln(x) + \ln(y^2)) \quad xy^2 > 0$$

$$\ln(-y) \ln(x^7) - \ln^2(-y) = 2 \ln^2(x) + 2 \ln(x) \ln(y^2) \quad x > 0$$

$$7 \ln(-y) \ln(x) - \ln^2(-y) = 2 \ln^2(x) + 4 \ln(-y) \ln(x)$$

$$2 \ln^2(x) - 3 \ln(-y) \ln(x) + \ln^2(-y) = 0$$

$$t = \ln(x), \quad z = \ln(-y)$$

$$2t^2 - 3tz + z^2 = 0$$

$$\cancel{2t^2 - 3tz + z^2 = 0} \quad z^2 - 3tz + 2t^2 = 0$$

$$D = 9t^2 - 4 \cdot 2t^2 = t^2$$

$$z_1 = \frac{3t - t}{2} = t$$

$$z_2 = \frac{3t + t}{2} = 2t$$

$$(z - t)(z - 2t) = 0$$

$$(\ln(-y) - \ln(x)) (\ln(-y) - 2 \ln(x)) = 0$$

$$\ln(-y) = \ln(x)$$

$$x = -y$$

$$x^2 - 2y^2 - 3xy^2 - 12y + 4y = 0$$

$$-4y^2 - 8y = 0$$

$$4y^2 + 8y = 0$$

$$y^2 + 2y = 0$$

$$y(y+2) = 0$$

$$y = 0 \text{ или } y = -2$$

$$\ln(-y) = 2 \ln(x)$$

$$\ln(-y) = \ln(x^2)$$

$$-y = x^2$$

$$y = -x^2$$

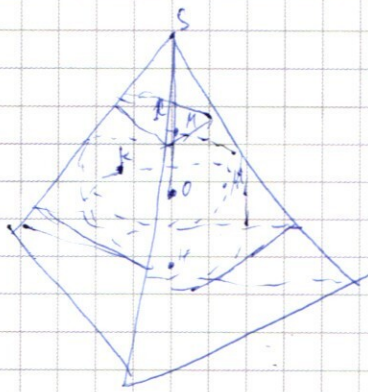
$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 12x = 0$$

$$x(x^3 - 2x^2 - 7x + 12) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 - 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$



$$\frac{SM}{SH} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{SM}{SM+2r} = \frac{2}{3}$$

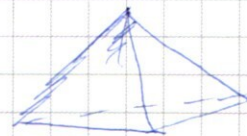
$$SM = \frac{2}{3} SM + \frac{4}{3} r$$

$$\frac{1}{3} SM = \frac{4}{3} r$$

$$SM = 4r$$

$$\sin(\angle KSO) = \frac{1}{6}$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{6}\right)$$



$$x^2 + r^2 = 2r^2$$

$$x^2 = 2r^2$$

$$x = \sqrt{2} r$$

$$\frac{28 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 2^3 \cdot 7 \cdot 5 = 35 \cdot 8 = 280$$

$$\begin{array}{r} \times 280 \\ 4 \\ \hline 1120 \end{array}$$

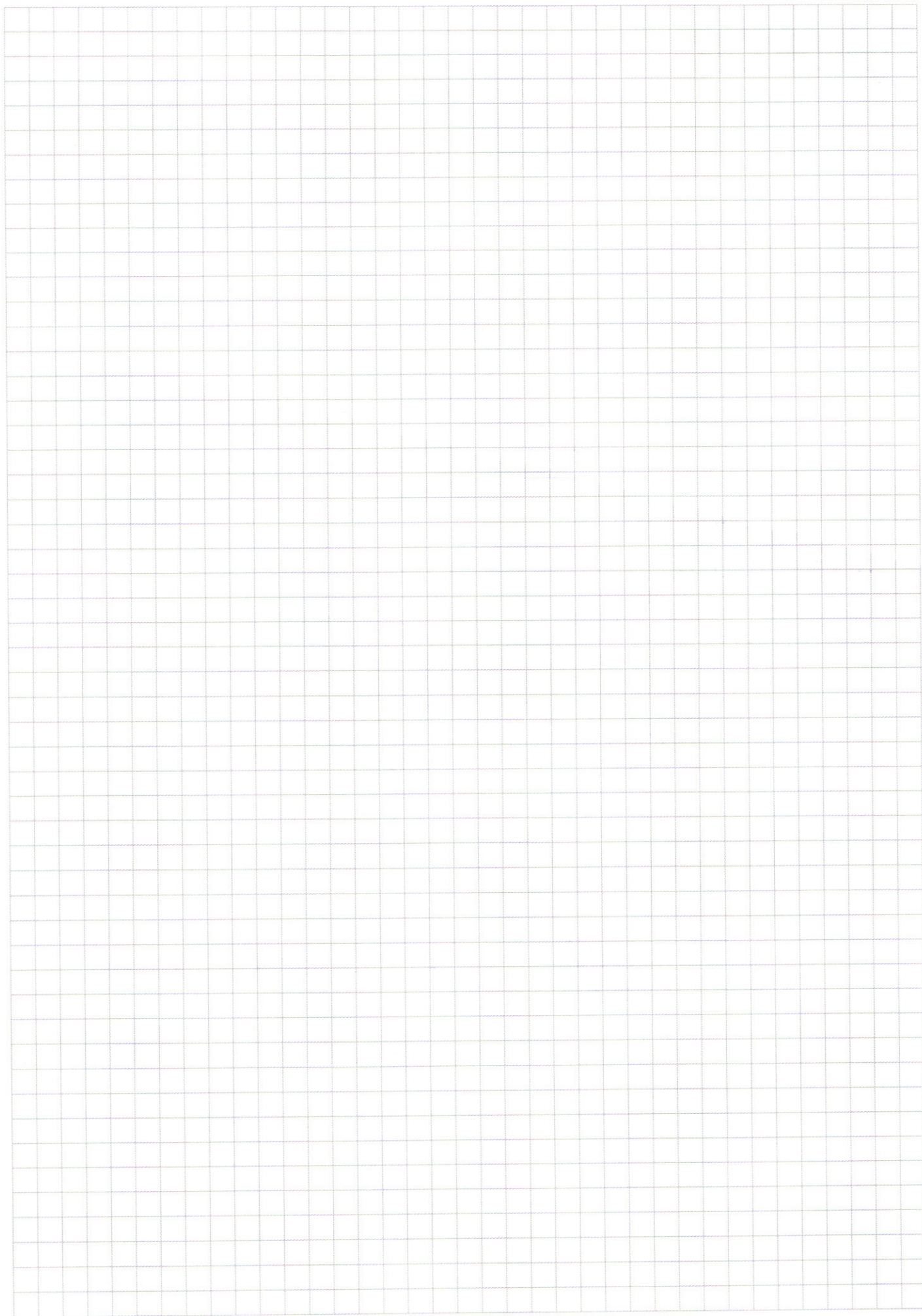
$$\begin{array}{r} \times 280 \\ 3 \\ \hline 840 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 35 \\ 6 \\ \hline 280 \end{array}$$

$$\frac{28 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 840$$

$$= 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 = 20 \cdot 6 \cdot 7 = 20 \cdot 42 =$$

$$\begin{array}{r} 280 \\ + 840 \\ \hline 1120 \end{array}$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\cos \alpha + \cos \beta + \sin \alpha - \sin \beta + \sqrt{2} (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 0$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \sqrt{2} \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha - \sin \beta + \sqrt{2} \sin \alpha \sin \beta = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$\cos 2x (2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x) + \sin 2x (2 \cos 5x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$\cos 5x (2 \cos 2x + 2 \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x (\cos 2x + \sin 2x) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x + \sqrt{2} (\sqrt{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

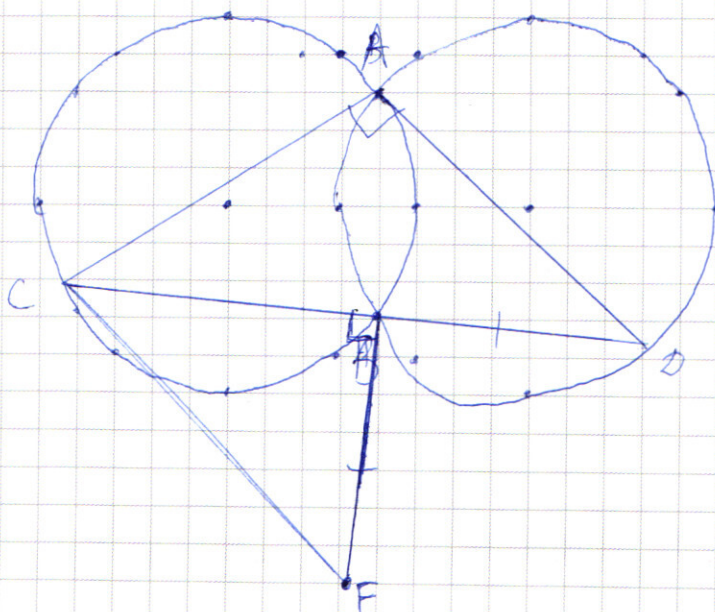
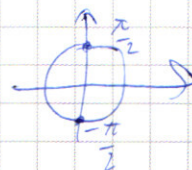
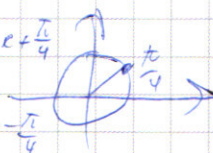
$$2(\cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\alpha + \beta = 5x \quad \alpha - \beta = 2x + \frac{\pi}{4}$$

$$2\alpha = 7x + \frac{\pi}{4} \quad 2\beta = 3x - \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha = 3,5x + \frac{\pi}{8}$$

$$\beta = 1,5x - \frac{\pi}{8}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 2x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} (\cos 7x + \sin 7x) + \sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} \cos 3x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 3x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \right.$$

$$\sqrt{2} \cos(7x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos(7x - \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$2 + \beta = 7x - \frac{\pi}{4}$$

$$2 - \beta = 3x + \frac{\pi}{4}$$

$$2\alpha = 7x$$

$$\alpha = 5x$$

$$\beta = 2x - \frac{\pi}{4}$$

$$\cos 5x \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

~~$$\cos 5x (\cos 2x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 2x \sin \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$~~

~~$$\cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x + \cos 3x + \sin 4x \cos 3x - \sin 3x \cos 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$~~

~~$$\cos 4x (\cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2}) + \cos 3x (1 + \sin 4x) + \sin 3x (\sin 4x - 1) = 0$$~~

$$\cos(4x + \frac{\pi}{4}) \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$(\cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x) \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\alpha = 7x, \quad \beta = 3x$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \sin \alpha - \sin \beta + \sqrt{2} \cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\alpha + \beta = 7x$$

$$\alpha - \beta = 3x$$

$$\alpha = 5x \quad \beta = 2x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$$

$$\alpha + \beta = 7x$$

$$\alpha - \beta = 3x$$

$$\alpha = 5x$$

$$\beta = 2x$$

$$\sin 7x - \sin 3x = 2 \sin 2x \cos 5x$$

$$\sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = \sqrt{2} (\cos^2 2x - (1 - \cos^2 2x)) = 2\sqrt{2} \cos^2 2x - \sqrt{2}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos^2 2x - \sqrt{2} \sin^2 2x = 0$$

$$\cos 2x (2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x) + \sin 2x (2 \cos 5x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + 2\sqrt{2} \cos^2 2x - \sqrt{2} = 0$$

$$\begin{aligned} x + 2xy - 3x^2 + 2x + 4y &= 0 \\ y^2 + 2xy + x^2 - 4x^2 + 12x + 4y &= 0 \\ (x+y)^2 - 4(x^2 - 3x - y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\cos 7x + \cos 3x - (\sin 3x - \sin 7x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$$

$$\alpha + \beta = 3x$$

$$\alpha - \beta = 7x$$

$$\alpha = 5x$$

$$\beta = -2x$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos 4x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1. \quad 64827 = 3 \cdot 21609 = 3^2 \cdot 7203 = 3^3 \cdot 2401 = 3^3 \cdot 7 \cdot 343 \quad \textcircled{B}$$

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 3} \\ -6 \\ \hline 4 \\ -3 \\ \hline 18 \\ -18 \\ \hline 27 \\ -27 \\ \hline 0 \\ 2401 \overline{) 7} \\ -21 \quad 343 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 21 \\ -21 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21609 \overline{) 3} \\ -21 \\ \hline 6 \\ -6 \\ \hline 09 \\ -9 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7203 \overline{) 3} \\ -6 \\ \hline 12 \\ -12 \\ \hline 003 \\ -0 \\ \hline 3 \\ -3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ -28 \quad 149 \\ \hline 63 \\ -63 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\textcircled{B} \quad 3^3 \cdot 7^2 \cdot 49 = 3^3 \cdot 7^4$$

$$3^{11} 3'', 4^{11} 2'', 7^{11} 1'';$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 4!}$$

$$1^{11} 3'', 4^{11} 7'', 7^{11} 9'', 12^{11} 1''$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 2!}$$

$$2. \quad \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$