

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

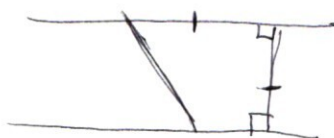
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$N2 \quad \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos(4x) = 0$$

$$1) \quad 2 \cos(5x) \cdot \cos(2x) + 2 \sin(2x) \cdot \cos(5x) + \sqrt{2} (\cos^2(2x) - \sin^2(2x)) = 0$$

$$2) \quad 2 \cos(5x) \cdot (\cos(2x) + \sin(2x)) + \sqrt{2} (\cos(2x) - \sin(2x)) (\cos(2x) + \sin(2x)) = 0$$

$$(\cos(2x) + \sin(2x)) (2 \cos(5x) + \sqrt{2} \cos(2x) - \sqrt{2} \sin(2x)) = 0$$

$$\downarrow \\ 0$$

$$\downarrow \\ 0$$

3.1) $\cos(2x) + \sin(2x) = 0$ • т.к. если $\sin(2x) = 0$ то из
основного триг. тождества $\cos(2x) = 1 \Rightarrow$
и наоборот

$\Rightarrow$ можем разделить на $\cos(2x)$

$$1 + \tan(2x) = 0$$

$$\tan(2x) = -1$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$3.2) \quad 2 \cos(5x) + \sqrt{2} \cos(2x) - \sqrt{2} \sin(2x) = 0 \quad |:2$$

$$\cos(5x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x) = 0$$

$$\uparrow \\ \cos(45^\circ)$$

$$\uparrow \\ \sin(45^\circ)$$

$$\cos(5x) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\downarrow \\ 0$$

$$4) \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$5) \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k$$

$$3x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: ~~$x_1 = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$~~

$$x_1 = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_3 = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

№3

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(y)} = x^{2\ln(xy^2)} & 2) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 & 1) \end{cases}$$

$$1) y^2 + (2x+4)y - 3x^2 + 12x = 0$$

Решаем уравнение относительно y

$$D = 4x^2 + 16 + 16x + 12x^2 - 48x = 16x^2 + 16 - 32x = (4x - 4)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{-2x - 4 \pm (4x - 4)}{2} = -x - 2 \pm (2x - 2) = -3x; \quad x - 4$$

$$2) \text{ При } y = -3x: \left(\frac{x^7}{-3x}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt[6]{3}}\right)^{\ln(3^6 \cdot x^6)} = x^{\ln(3^4 \cdot x^6)} \quad / \text{ ln от обеих частей}$$

$$\ln(3^6 \cdot x^6) \cdot \ln\left(\frac{x}{\sqrt[6]{3}}\right) = \ln(x) \cdot \ln(3^4 \cdot x^6)$$

$$\ln(3^4 \cdot x^6) \cdot \ln(x \cdot 3^{-\frac{1}{6}}) + \ln(3^2) \cdot \ln(x \cdot 3^{-\frac{1}{6}}) - \ln(x) \cdot \ln(3^4 \cdot x^6) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\ln(3^4 x^6) (\ln(x \cdot 3^{-\frac{1}{6}}) + -\ln(x)) + 2 \ln(3) \cdot \ln(x \cdot 3^{-\frac{1}{6}}) = 0$$

$$\ln(3^4 \cdot x^6) \cdot \ln(3^{-\frac{1}{6}}) + 2 \ln(3) \cdot \ln(x \cdot 3^{-\frac{1}{6}}) = 0$$

$$\ln(3^4 \cdot x^6) \cdot -\frac{1}{6} (\ln(3)) + 2 (\ln(3)) \cdot \ln(x \cdot 3^{-\frac{1}{6}}) = 0$$

$$\ln(3) (\ln(3^{-\frac{2}{3}} x^{-1}) + \ln(x^2 \cdot 3^{-\frac{1}{3}})) = 0$$

$$\ln(x^1 \cdot 3^{-\frac{2}{3}}) = 0$$

$$x \cdot 3^{-\frac{2}{3}} = e^0 = 1$$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{3^2}} = 1$$

$$\rightarrow x = \sqrt[3]{3^2}; \quad y = -3\sqrt[3]{3^2}$$

При $x-4=y$

$$\left(\frac{-x^7}{x-4}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2 \ln(x(16+x^2+8x))} \quad / \text{ln с обеих сторон}$$

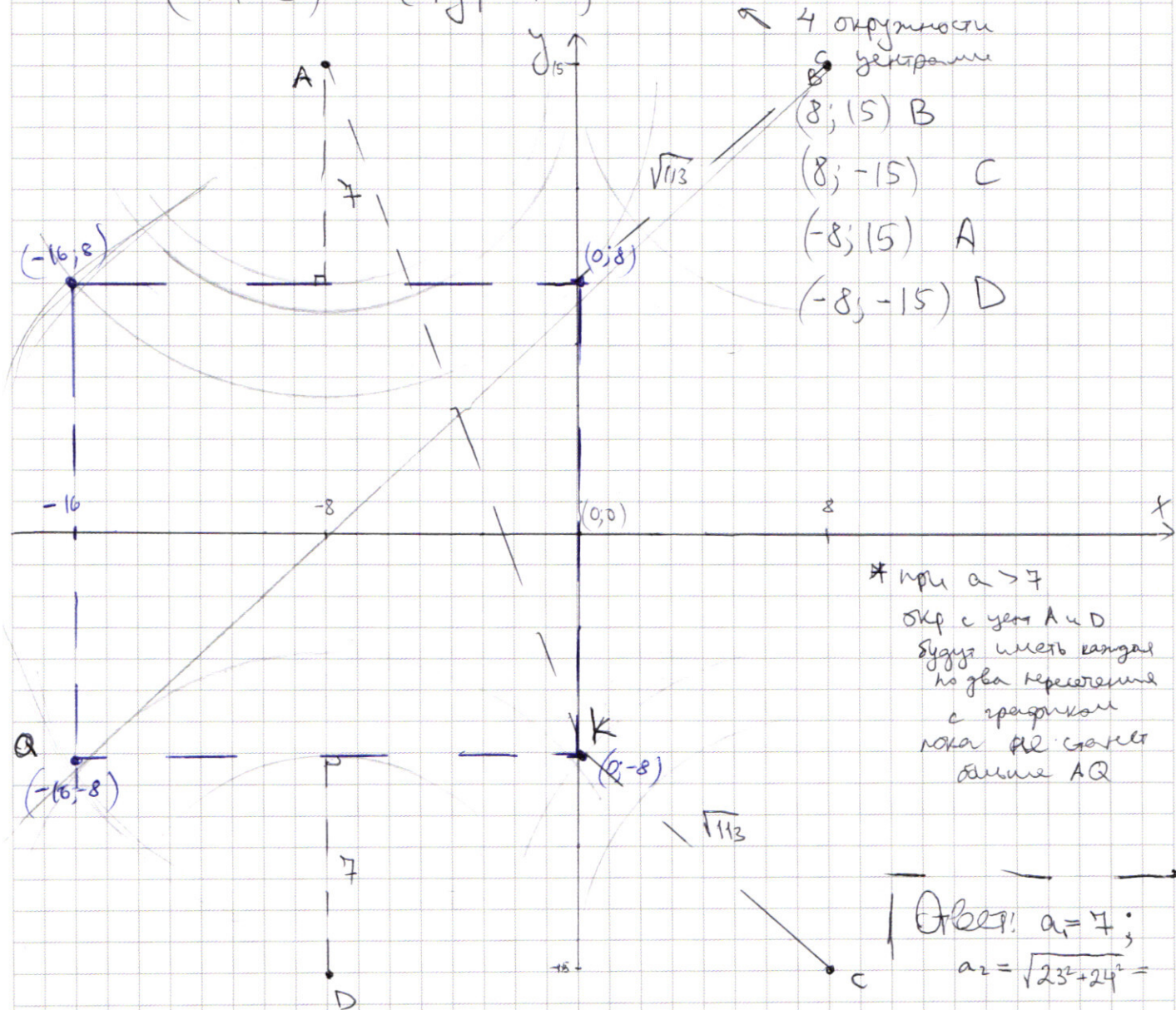
$$\ln(4-x) \ln\left(\frac{-x^7}{x-4}\right) = 2 \ln(x) (\ln(x) + \ln(x-4)^2)$$

$$\ln(4-x) \ln(-x^7) - \ln(4-x) \cdot \ln(x-4) = 2 \ln^2(x) + 2 \ln(x-4) \ln(x)$$

Ответ: $x = \sqrt[3]{3^2}; \quad y = -3\sqrt[3]{3^2}$

№5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \quad (\text{линия}) \leftarrow \text{квадрат.} \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$



- 1) при $a \in [0; 7]$ 0 корней
 $a \in \{7\}$ 2 корня
 $a \in (7; \sqrt{113}]$ 4 корня

2) $\begin{cases} a > AK \\ a \neq BQ \end{cases} \quad \begin{aligned} AK &= \sqrt{64 + 23^2} \\ BQ &= \sqrt{23^2 + 24^2} \end{aligned} \quad (\text{верно}) \quad BQ > AK$

$a = BQ \Rightarrow$ в окр с центрами A и D не пересекается с квадратом
 а окр с центрами B, C имеют по одному решению

Ответ: $a_1 = 7;$
 $a_2 = \sqrt{23^2 + 24^2} = \sqrt{1105}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

① $64827 = 3^3 \cdot 7^4$

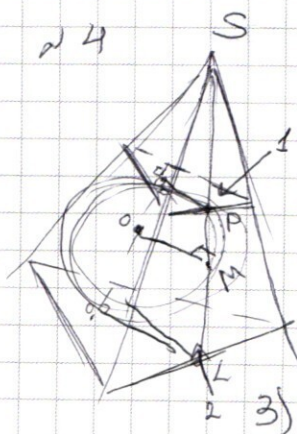
② Есть 2 случая в данном восьмизначном числе
встречаются 4 семерки, 3 тройки и 1 единица
или в данном числе 4 семерки, 1 тройка, 1 девятка
и 2 единицы

I в первом случае таких чисел: $C_8^1 \cdot C_7^3 \cdot C_4^1 = \frac{8!}{7! \cdot 1!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 1 =$
 $= \frac{8!}{3! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 56 \cdot 5$

II во втором случае таких чисел: $C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^4 \cdot C_2^2 =$
 $= \frac{8!}{1! \cdot 7!} \cdot \frac{7!}{6! \cdot 1!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot 1 = \frac{8!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} =$
 $= 56 \cdot 15$

всего $56 \cdot 15 + 56 \cdot 5 = 56 \cdot (15 + 5) = 56 \cdot 20 = 1120$

Ответ: 1120 чисел.



1) $PO \perp$ вер. плоск. в PO_2
или в PO_1

2) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{16} = k^2$ (Δ в верх. пл. $\sim$
 Δ в ниж. пл. $\sim$
т.к. равные дв. углы)

$\Delta 1 \sim \Delta 2$ $k = \frac{3}{4}$
соот. SO, M $OP = PM$ $ML = KO$ $свободы$ (впис. окр.) **ИСТ 7**

N6

$$R_1 = R_2 = 17$$

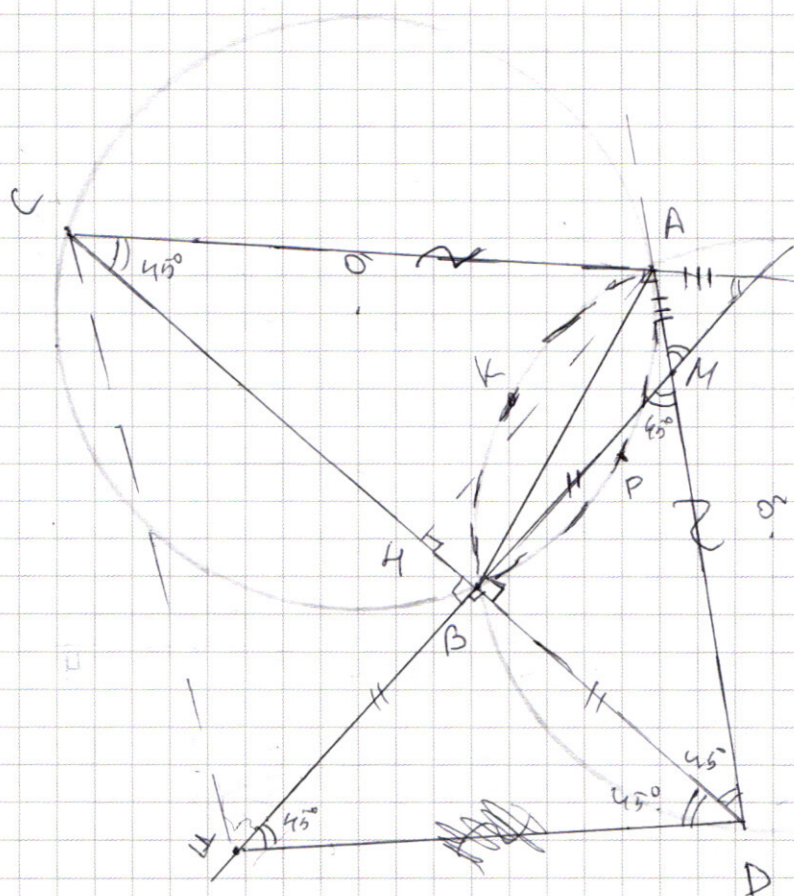
$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$C \in O_1 ; D \in O_2$$

$$B \in CD$$

$$BF \perp CD ; BF = BD$$

$$CF = ?$$



1) Проведем AB

$\angle APB = \angle BKA$
т.к. равные хорды в
равных окр.

||

$$\angle BDA = \angle ACB$$

отр на
равные
дуги.

2) т.к. $\triangle ACD$ - кр/у с прям углом A и $\angle C = \angle D \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle C = \angle D = 45^\circ \Rightarrow AC = AD$$

3) пусть $FB \cap AD = (\cdot) M \Rightarrow \angle FMP = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow BM = BD = BF$ по угл $\Rightarrow \angle FMD$ - кр/у с

$\angle FDM = 90^\circ$ т.к. мед $= \frac{1}{2}$ гипотенузы $\rightarrow$

$\rightarrow BD$ - биссектриса

4) т.к. $\angle FDA = 90^\circ$ (п.3)

и $\angle CDA = 90^\circ$ по угл

$\therefore \Rightarrow CA \parallel DF$

$$\angle ACF + \angle DFC = 180^\circ$$

DB - биссектр.

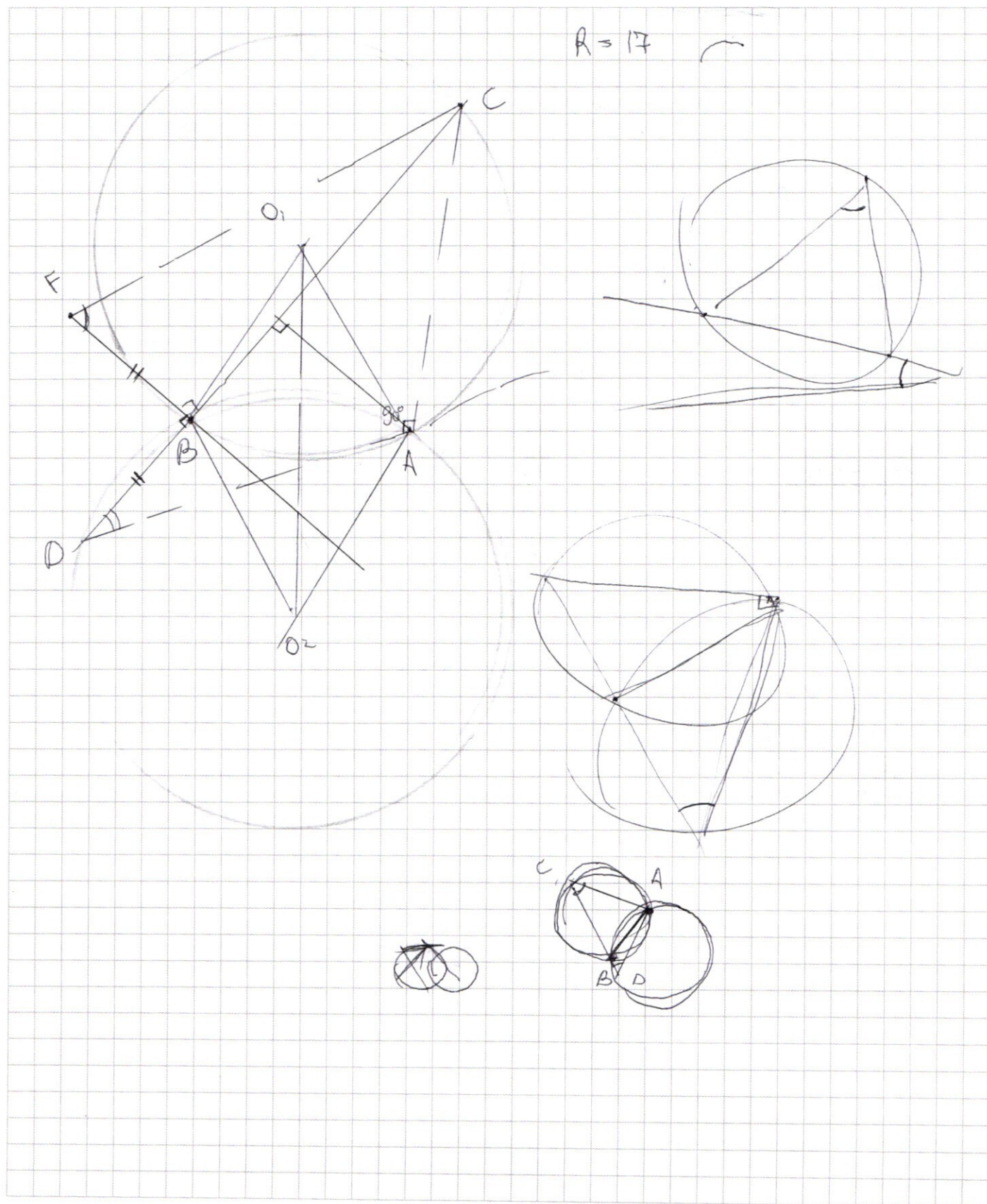
AB - мед / высот / биссектр в $\triangle CAD$

$\Rightarrow$

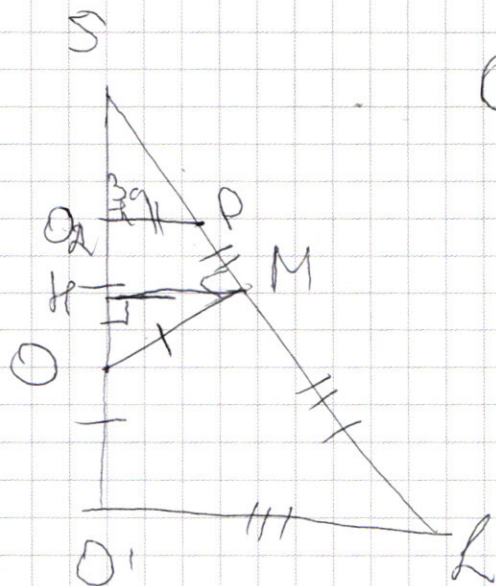
$\therefore \Rightarrow$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



N4



$$O_2 O = OM = OO_1$$

Рав. шага

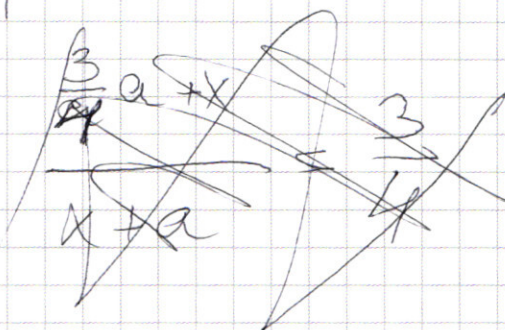
$$ML = 0,2 \text{ и } 0,2$$

$$O_2 P = PM$$

отм.
теорем
у.
правильно
результат

$$\frac{PM}{ML} = \frac{QP}{O_1L} = \frac{3}{4} \text{ и } 1$$

$$\frac{O_2 PMH}{HM LO_1} = \frac{3}{4}$$



$$\frac{3}{4}a + x = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}a$$

$$\frac{PM}{PL} = \frac{HM}{O_1L} = \frac{\frac{3}{4}a}{a} = \frac{3}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 64827 \\ 63 \overline{) 64827} \\ \underline{18} \\ 18 \\ \underline{0} \\ 27 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 7203 \overline{) 2401} \\ \underline{21} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 21 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 = 7 \cdot 7 \\ 7 \overline{) 343} \\ \underline{21} \\ 13 \\ \underline{7} \\ 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ 49 \overline{) 343} \\ \underline{49} \\ 343 \end{array}$$

$$7^4 \cdot 3^3$$

$$7^4; 3^3; 1^1$$

$$(-\frac{\pi}{4} + \pi k)$$

$$\cos(2x) + \sin(2x) = 0 \quad | : \sin(2x)$$

$$\operatorname{tg}(2x) + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg}(2x) = -1$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos(5x) \cdot \cos(2x) + 2 \sin(2x) \cdot \cos(5x) + \sqrt{2} \cos(4x) = 0$$

$$2 \cos(5x) (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos(4x)$$

$$2 \cos^2(2x) - 1$$

$$1 - 2 \sin^2(2x)$$

$$\cos^2(2x) - \sin^2(2x)$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ + \quad - \quad + \\ - \quad + \quad - \end{array}$$

$$\cos^2(2x) - \sin^2(2x)$$

$$\sqrt{2} (\cos(2x) - \sin(2x)) (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\cos(2x + \frac{\pi}{4}) = -\cos(5x)$$

$$(\cos(2x) + \sin(2x)) (\sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) + 2 \cos(5x))$$

$$1 - 2 \sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$2 \sin^2 x - 2 \sin x (\sin x + \cos x)$$

$$(\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin^2 x$$

$$(\sin x + \cos x - \sqrt{2} \sin x) (\sin x + \sqrt{2} \sin x + \cos x)$$

$$2 \cos(5x) \cos(2x) + 2 \sin(2x) \cdot \cos(5x) + \sqrt{2} \cos(4x)$$

$$\cos(5x - x)$$

$$\left(\frac{-x^7}{x-4} \right)^{\ln(4-x)}$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cdot \cos x + \sqrt{2} \sin 5x \cdot \sin x$$

$$= x^{2 \ln(x^2 - 4x)}$$

$$\cos(45^\circ)$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta$$

$$\ln(3^6 x^6) \log\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \log x \cdot \ln(3^4 x^6)$$

$$\ln(3^4 x^6) \cdot \log\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + \log 3^2 \log \frac{x}{\sqrt{3}} = \log x \ln(3^4 x^6)$$

$$\ln(3^4 x^6) \left(\log \frac{1}{\sqrt{3}} - \log x \right) + \ln 3^2 \cdot \log\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{6} \ln(3^4 x^6) \cdot \log 3 + 2 \log 3 \cdot \log \frac{x}{\sqrt{3}} = 0$$

$$x - 2 - 2x + 2$$

$$-x - 2 + 2x - 2$$

$$\ln 3 \left(-\frac{1}{6} \ln \left(\frac{x^2}{3^4 x^6} \right) + \ln \frac{x^2}{\sqrt{3}} \right) = 0$$

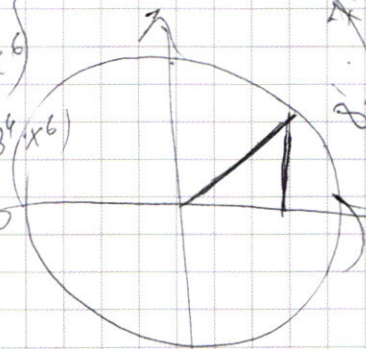
$$y^2 + (2x + 4)y - 3x^2 + 2x = 0$$

$$D = 4x^2 + 16 + 16x + 12x^2 - 48x = 0$$

$$16x^2 + 16 - 32x = (4x - 4)^2 = 16(x - 1)^2$$

$$4 \quad 4 \quad 16 \cdot 2 = 32$$

$$y_{1,2} = \frac{-2x - 4 \pm (4x - 4)}{2} = -x - 2 \pm (2x - 2) = -3x; x - 4$$



$$2 \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$



черновик

чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper, including calculations, geometric diagrams, and algebraic expressions.

Calculations:

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 169 \\ 461 \\ \hline 529 \\ + 576 \\ \hline 1105 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23^2 + 24^2 \\ 1 \\ \times 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2 \Rightarrow \frac{16+7+8}{23} = \frac{3}{4}$$

$$64 + 49 = \sqrt{113}$$

$$\frac{a \cdot b}{d \cdot c} = \frac{9}{16}$$

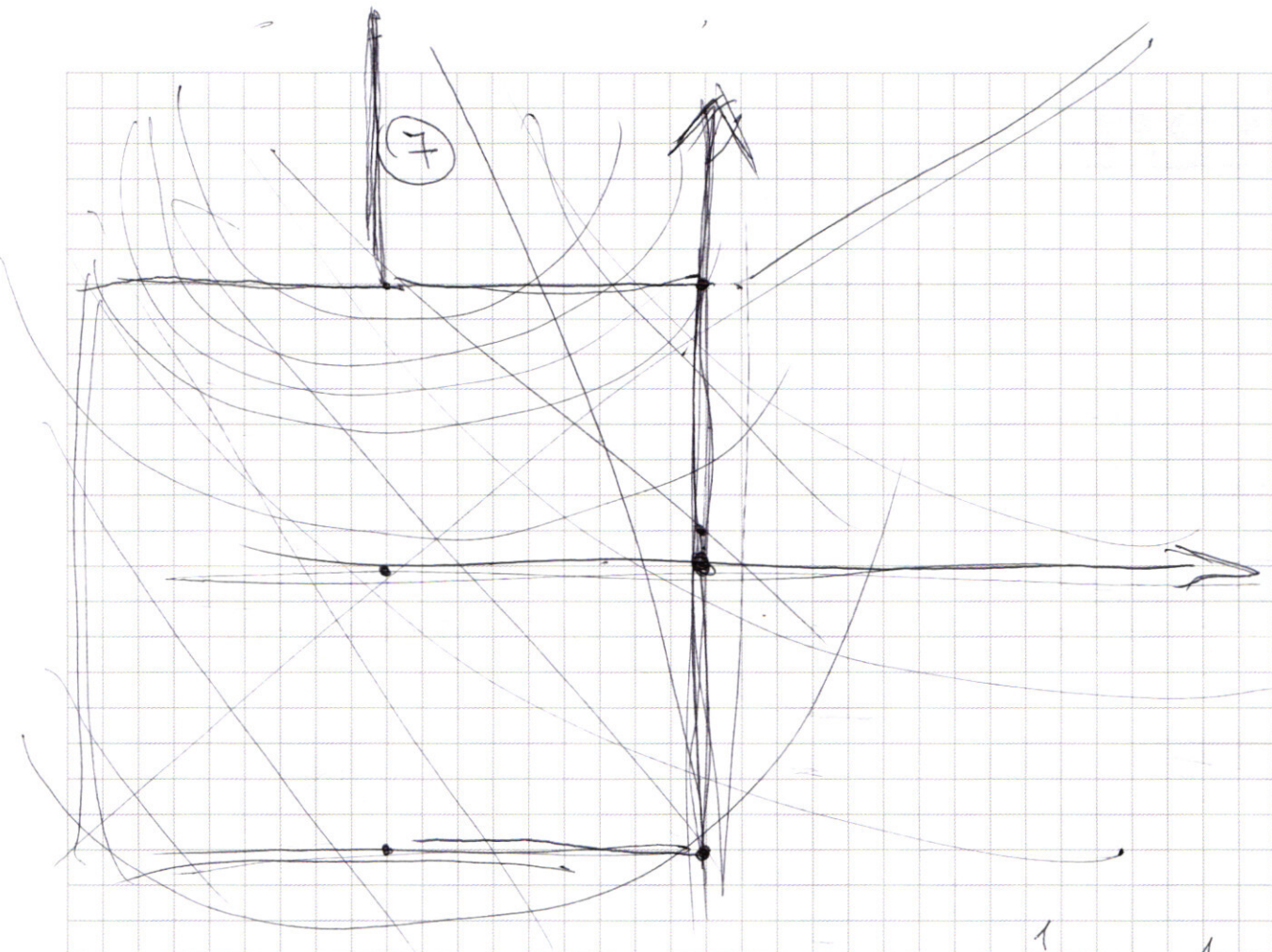
$$7^4 \cdot 3^3 \cdot 1$$

$$3 \cdot 9 \cdot 7^4 \cdot 1$$

$$8 \cdot 4^3 \cdot 3^4$$

Geometric Diagrams:

- A large diagram of a cone with a sphere inside, showing various points (S, L, K, M, H, a) and lines.
- A right triangle with legs 7 and 8.
- A square diagram with internal lines and points, labeled with 3, 9, 2, 4, a, 9.



$$\begin{aligned} & \text{от } 8 \quad \text{---} 6 \\ & \text{+ } 7 + 1 + 8 \\ & \text{---} 7 + 1 + 8 \end{aligned}$$

$$|8+y| + |8-y| = 16$$

$$|x+8| + |x-8| = 16$$

$$\begin{aligned} & 8 + 1 + 8 \quad 15 \\ & -8 + 1 + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -8 \quad -8 \\ & 8 \quad -8 \end{aligned}$$