

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~1

Разложим на множители число 64827.

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

Значит мы имеем две группы чисел:

1) $3; 3; 3; 7; 7; 7; 7; 1$

2) $9; 3; 7; 7; 7; 7; 1; 1$

(т.к. если $7 \cdot 7 = 49$ - двузначно; $3 \cdot 7 = 21$ - двузначно)

П.к. группы отличаются элементами $\Rightarrow$ из этих разных групп нельзя составить одинаковое 8-ми значное число. (в каждой группе создать одинаковое число). Значит общее число необходимых чисел равно сумме всех возможных комбинаций эл. в каждой группе.

„Позиция цифры“ - в дальнейшем - „Место.“

1) Первая группа (1):

Расставим три тройки на какие-то три места в ~~восьми~~ 8-ми значном числе: $C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$ На одном из ~~5-ых~~ ^{5-и} оставшихся мест может стоять „1“: $56 \cdot 5 = 280$

На оставшихся местах стоят единицы, значит из первой группы получим 280 чисел.

Вторая группа (2):

Поставим две единицы на какое-то место
в 8-ми значном числе: $C_8^2 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$

На одном из шести оставшихся мест стоит "3":
 $28 \cdot 6 = 168$

На одном из 5-и оставшихся мест стоит "9":
 $168 \cdot 5 = 840$

На всех остальных местах стоят "7"-ки. Значит во
второй группе - 840 чисел.

Всего: $840 + 280 = 1120$ чисел.

Ответ: 1120 чисел.

№ 2

$$(\cos 7x + \cos 3x) + (\sin 7x - \sin 3x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

Заметим, что при $\cos 2x + \sin$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

1) $\cos 2x + \sin 2x = 0$ (отдельно рассмотрим случай)

$$\sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 2x + \sin 2x \cdot \cos \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \pi k - \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} k - \frac{\pi}{8}; k \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим случай $\cos 2x + \sin 2x \neq 0$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0 \quad | : (\cos 2x + \sin 2x)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\cos 5x + \cos \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) = 0$$

$$2 \cos \left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cos \left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

Рассмотрим:

$$2) \cos \left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

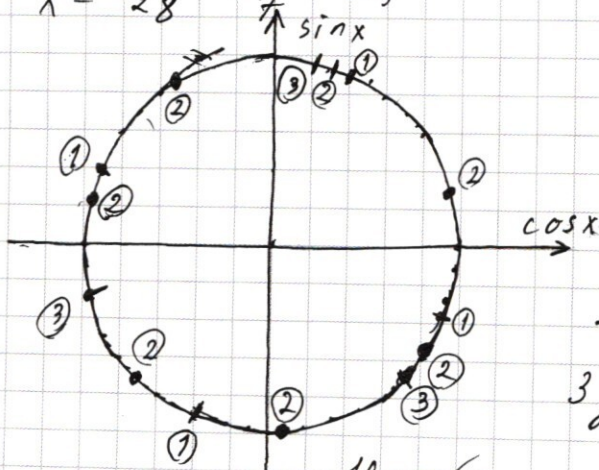
$$3) \cos \left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k; k \in \mathbb{Z}$$



Рассмотрим решения соответствующих
соответственно

1 уравн. $\Rightarrow$ ①

2 уравн. $\Rightarrow$ ②

3 уравн. $\Rightarrow$ ③

Не обнаружилось ни одного совпадения
корней.

Ответ: $\frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k; \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k; \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{8}; k \in \mathbb{Z}$
~ 3

Рассмотрим второе уравнение

$$y^2 + (2x+4)y + (12x-3x^2) = 0 \quad \text{по Виету:}$$

$$\begin{cases} y_1 \cdot y_2 = 12x - 3x^2 \\ y_1 + y_2 = -2x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -3x \\ y_2 = x - 4 \end{cases}$$

Вернёмся к первому уравнению.

I: $y = -3x$

$$\left(\frac{x^7}{3x}\right)^{\ln 3x} = x^{2/\ln(9x^3)}$$

$$\left(\frac{1}{3} \cdot x^6\right)^{\ln 3x} = x^{2(\ln 9 + 3/\ln x)}$$

$$3^{-\ln 3x} \cdot x^{6 \cdot \ln 3x} = x^{4/\ln 3} \cdot x^{6/\ln x}$$

$$3^{-\ln 3x} \cdot x^{6/\ln 3} \cdot x^{6/\ln x} = x^{4/\ln 3} \cdot x^{6/\ln x} \quad | : x^{6/\ln x} \neq 0$$

$$3^{-\ln 3x} \cdot 3^{6/\ln 3} = 3^{4/\ln 3} \quad | : 3^{4/\ln 3} \neq 0$$

$$3^{-\ln 3x} \cdot 3^{2/\ln 3} = 1 \quad | \cdot 3^{\ln 3x} \neq 0$$

$$3^{\ln x^2} = 3^{\ln 3x}$$

$$x^2 = 3x$$

$$y = -3 \cdot 3 = -9$$

$x = 0; 3$, однако $x = 0$ - пост. корень; $(3; -9)$ - решение.

Ответ: $(3; -9)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |(x+8)+y| + |(x+8)-y| = 16 \\ ((x+8))^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение $|(x+8)+y| + |(x+8)-y| = 16$

I случай: $y > x+8$

II случай: $y < -(x+8) = -x-8$

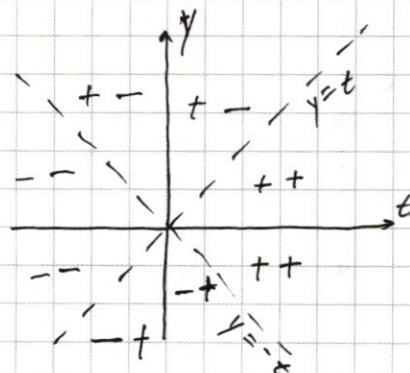
$$((x+8)+y) - ((x+8)-y) = 16$$

$$2y = 16$$

$$y = 8$$

Пусть $x+8 = t$: $|t+y| + |t-y| = 16$

На графике расставим знаки
раскрытия модулей соответственно
 $|t+y|$; $|t-y|$



Разобьем плоскость на области:

1) $t+y+t-y=16$

2) $-t-y+t-y=16$

$$t = 8$$

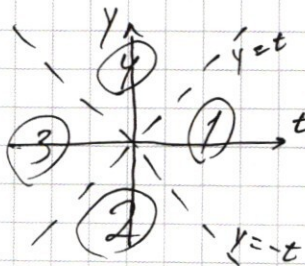
$$y = -8$$

3) $-t-y-t+y=16$

4) $t+y-t+y=16$

$$t = -8$$

$$y = 8$$



Изобразим график:

чтобы вернуться к «x»-системе

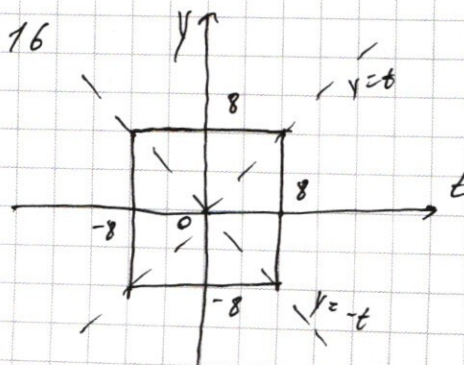
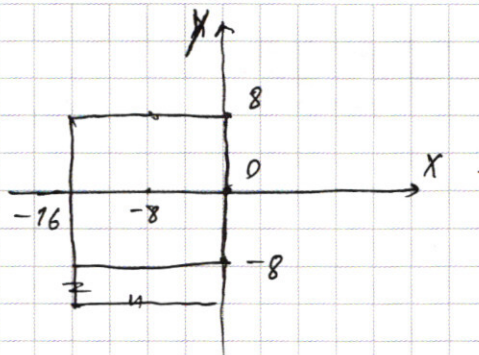


график на 8 влево:

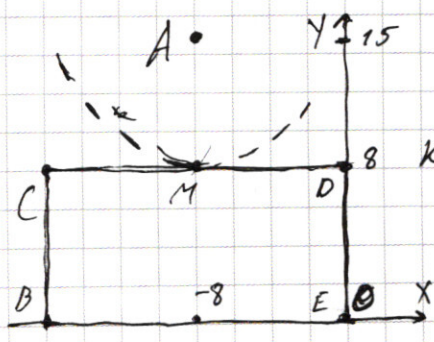
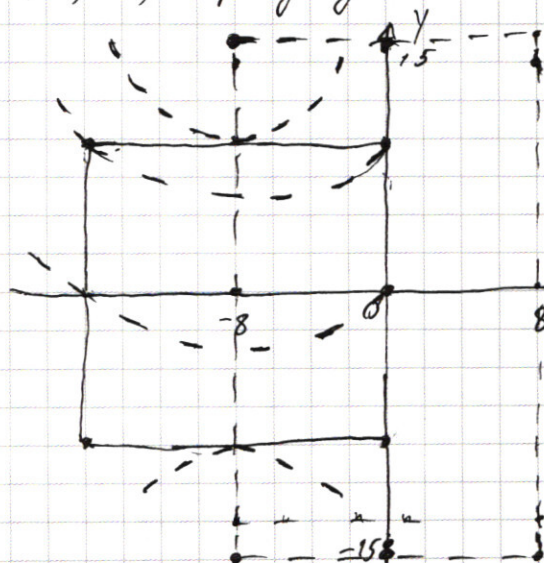


Рассмотрим уравн: $(|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a$;

замети, что график симметричен относительно OY и OX ; для $x \geq 0$ и $y \geq 0$ - это окружность в точке $(8; 15)$ с радиусом $\sqrt{a}$.

В силу симметрии мы можем рассмотреть лишь $y \geq 0$ и найти случаи с одним решением.

П.к. ~~ква.~~ $|x + y + 8| + |x - y + 8| = 16$ - существует лишь при $x \leq 0$ - рассмотрим эту область.



Замети, что Окружность A - касается CD ; пересекает CD дважды; пересекает CB и DE одновременно (если одно, то и другое) в силу симметрии.

$\Rightarrow$ Подходит лишь случай с касанием.

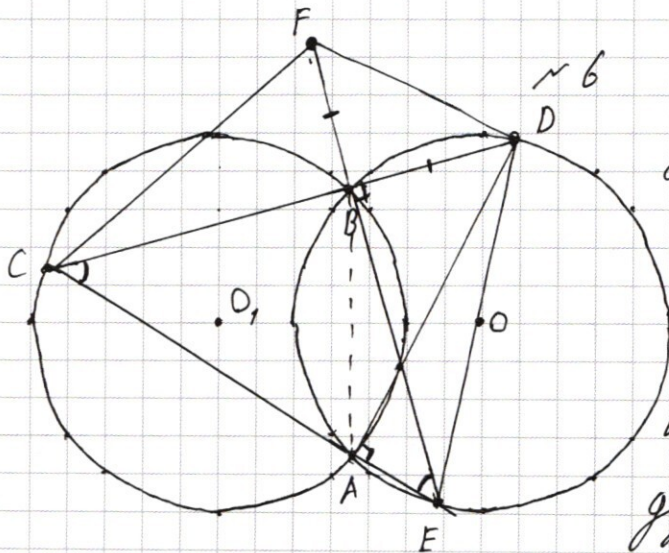
$$AM = 15 - 8 = 7 = \sqrt{a} \Rightarrow a = 49.$$

Однако, когда Окружность ~~кас~~ проходит через $B \Rightarrow$ через E , то в начальном графике линия, левая окружность так же их касается $\Rightarrow$ всего два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$AE^2 = \sqrt{a}^2 = R^2 = 15^2 + (-8)^2 = 289$$

Ответ: 49; 289



Решение.

а) т.к. окружности O_1 и O равны; AB -общая хорда, то на обеих окр. она стягивает равные дуги: $\sphericalangle AB$ малая $O_1 = \sphericalangle AB$ малая O

Тогда $\sphericalangle BEC = \frac{1}{2} \sphericalangle AB$ малая $O = \frac{1}{2} \sphericalangle AB$ малая $O_1 = \sphericalangle BCE \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CBE$ - равнобедренный; $BC = BE$;

т.к. $\sphericalangle DBE = \sphericalangle FBC = 90^\circ$ (как верт.к.); FD

$FB = BD$ (по условию), а $CB = BE$, то $\triangle CBF = \triangle EBD \Rightarrow$

$\Rightarrow CF = DE = 17 \cdot 2 = 34$

б) т.к. $FB = BD$; Заметим, что $\frac{FB}{BC} = \frac{BD}{BE}$ (т.к. $\frac{FB}{BD} = \frac{BC}{BE} = 1$),

а, т.к. $\sphericalangle CBE = \sphericalangle FBD = 90^\circ \Rightarrow \triangle CBE \sim \triangle FBD \Rightarrow$

$\sphericalangle FEC = \sphericalangle EFD \Rightarrow FD \parallel CE$, а т.к. $FC = DE \Rightarrow$

$CFDE$ - равнобокая трапеция, а DA - её высота.

$$FB = \sqrt{CF^2 - CB^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30 = BD \Rightarrow FD = \sqrt{2} \cdot BD$$

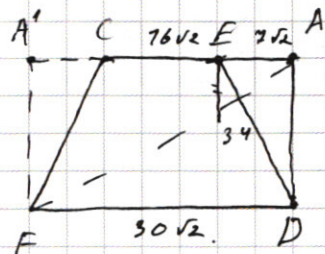
(как гипотенуза равнобедр. прямоуг. $\triangle$) $FD = 30\sqrt{2}$, а

$CE = \sqrt{2} \cdot CB$ (как гипот. равнобедр., прямоуг. $\triangle$); $CE = 16\sqrt{2}$

$$AE = 8$$

Перерисуем трапецию корректно:

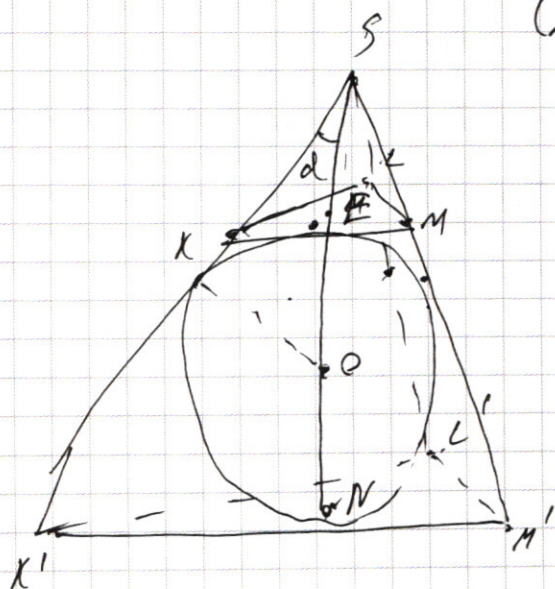
$$AE = \frac{FD - CE}{2} = \frac{14\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$$



$$h_{FCA} = AD = \sqrt{34^2 - (7\sqrt{2})^2} = 27\sqrt{2}$$

$$S_{FCA} = \frac{(16\sqrt{2} + 7\sqrt{2}) \cdot 27\sqrt{2}}{2} = 23 \cdot 27 = 621$$

Ответ: а) 34 б) 621



~ 5

$$\frac{S_{KLM}}{S_{K'L'M'}} = 1 \quad \left(\frac{SE}{SN} \right)^2 =$$

$$\approx \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{SE}{SN} = \frac{3}{4} \text{ м. к. } EO = ON \Rightarrow$$

$$SE : EO : ON = 3 : 2 : 2$$

$$\text{м. к. } EO = ON \Rightarrow$$

$$SO : OK = 3 + 2 : 2 = 5 : 2$$

$$\sin d = \frac{2}{5}$$

$$d = \arcsin \frac{2}{5}$$

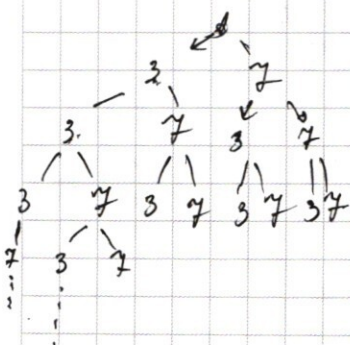
$$\text{ответ: } \arcsin \frac{2}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

AB' abcdefgk

1) 3; 3; 3; 7; 7; 7; 7; 7; 1

2) 9; 3 7 7 7 7 1 1; 1



64827/3
21609/3
7203/3
2401/7
343/7
49/7

26 28
x 6
288
168
3 4 2

№2

$\cos a \cos b =$

$$2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = \cos a + \cos b$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} (\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0)$$

$$\begin{aligned} \sin a \sin b &= \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b)) \\ \cos a \cos b &= -\frac{1}{2} (\cos(a+b) - \cos(a-b)) \end{aligned}$$

№1

64827/3
21609/3
7203/3
2401/7
343/7
49/7

2401/7
24 30 28 49 7²
28 63
21

$$64827 = 3 \cdot 7^4 \cdot 1^7$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

$$1) C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56 \cdot 5 = 280$$

2) ~~1 2 3 4 5 6 7 8~~

$$C_8^2 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 4 \cdot 7 = 28 \cdot 6 \cdot 5 = 840$$

Answer 1120

$$(2 \cos 5x \cos 2x) + (2 \sin 2x \cos 5x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot 2 \cos 5x \left(\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin^2 \cos^2 = \frac{1}{2} (\sin^2 + \cos^2)$$

$$2\sqrt{2} \cos 5x \cdot \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) + \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(2 \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\cos + \sin = \text{радс}$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x = -\cos 2x + \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right)$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) = \sqrt{2} \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos 5x + \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\frac{2}{7} = \frac{8}{28} \quad \frac{11}{28} > \frac{4}{3}$$

$$\frac{3}{28} + \frac{32}{28} = \frac{35}{28}$$

$$\frac{11}{28} > \frac{3}{8} \quad 88 > 84$$

$$\frac{43}{28} > \frac{38}{2} \quad 86 > 84$$

$$\frac{3}{28} + \frac{24}{28} = \frac{27}{28} > \frac{14}{8}$$

$$\frac{5}{12} \approx \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{5}{12} > \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{12} \quad \frac{11}{28} \quad \frac{12}{23}$$

$$140 > 122$$

$$\frac{4}{3} = \frac{16}{12} + \frac{5}{12} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$$

$$\left(-\frac{x^7}{y} \right)^{\ln^{-1}} = x^{2(\ln x + 2 \ln y)}$$

$$y^2 + y(2x+4) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$\Rightarrow -3 \cdot x \cdot (x+4)$$

$$\Rightarrow -2x - 4$$

$$I: \left(\frac{1}{3} x^6 \right)^{\ln 3x} = x^{2 \ln(9x^3)} = x^{6(\ln 3 + \ln x)}$$

$$\frac{1}{3x}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{1}{3} \times 6\right)^{\ln x \times \cancel{1/3}} \cdot \left(\frac{1}{3} \times 6\right)^{\ln 3} = \cancel{x^{6 \cdot \ln x}} \cdot \cancel{x^{6 \ln}} \cdot \cancel{x^{6 \ln}} \cdot x^{4 \ln 3}$$

$$\left(\frac{7}{3}\right)^{-\ln 3x} \cdot X^{6 \ln x} = X^{2 \ln 3^n} = X^{6 \ln x} \cdot X^{4 \ln 3}$$

$$\ln x^2 = \ln \left(\frac{1}{3} \right)$$

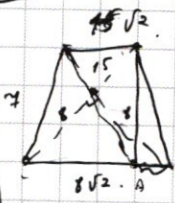
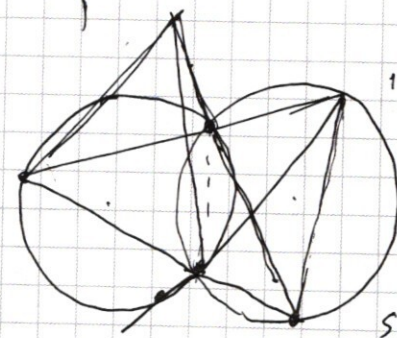
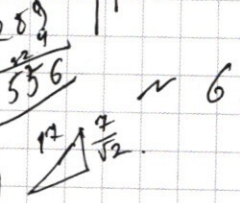
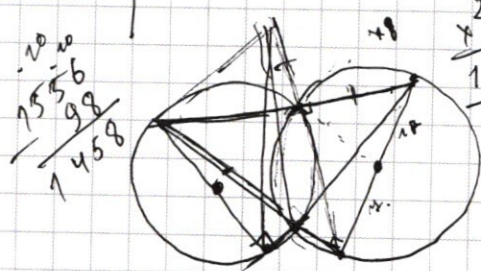
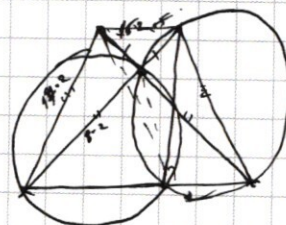
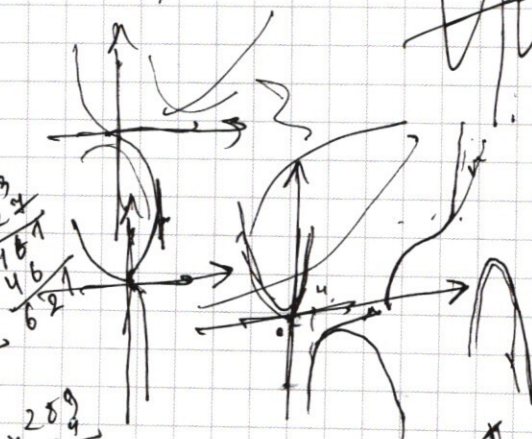
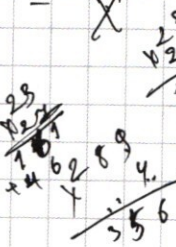
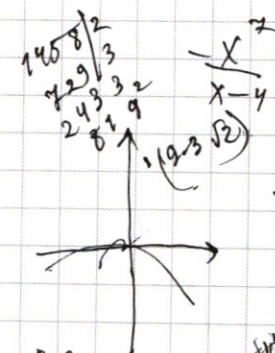
$$\ln x^2 = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\int \left(-\frac{x}{y} \right) \ln(y) = x \cdot 2 \ln(x+y^2) = x \left(\frac{2}{1} \ln x + \frac{2}{2} \ln y^2 \right)$$

$$\frac{-x}{y} = x^{2 \ln x + 3 \ln y}$$

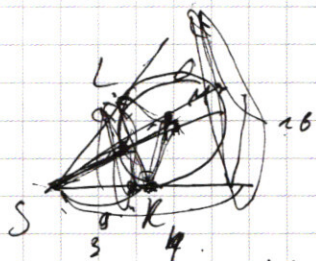
$$\begin{array}{r} 12 \\ 177 \\ \hline 119 \\ 18 \\ \hline 289 \\ 64 \\ \hline 225 \end{array}$$

289
48

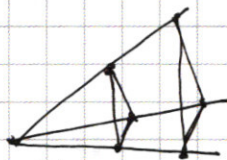


$$\frac{5-x}{2} + x =$$

$$\frac{16\sqrt{2} - 8\sqrt{2}}{2} =$$

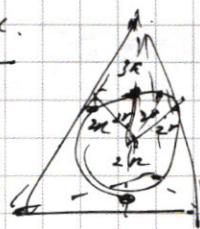


~ 8



~ 5

3K

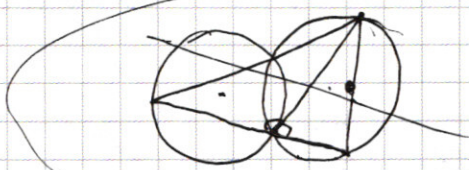


$$|(x+y)+8| \quad |(x-y)+8|$$

$$-(x+8) \leq y < (x+8) \Rightarrow$$

~ 6

$$|(x+8)+y| + |(x+8)-y| = 16.$$



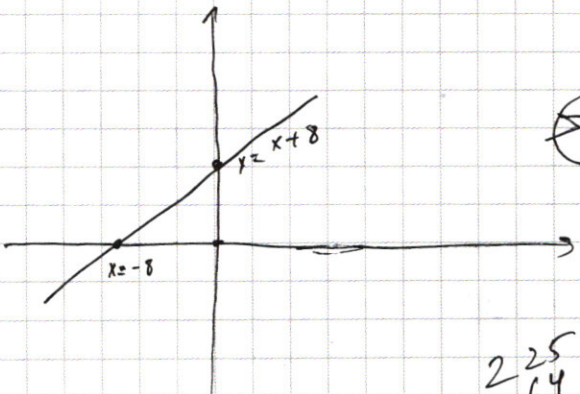
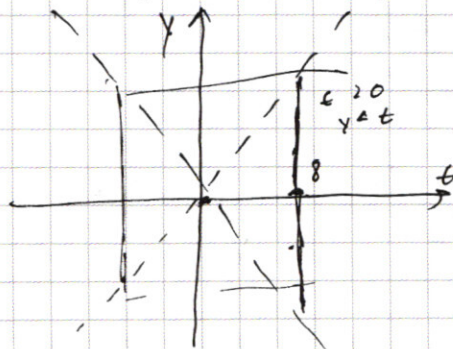
$$y > x+8 \Rightarrow (x+8)+y - (x+8) + y = 16$$

t = 16

$$y = 8$$

$$|t+y| + |t-y| = 16$$

~ 6

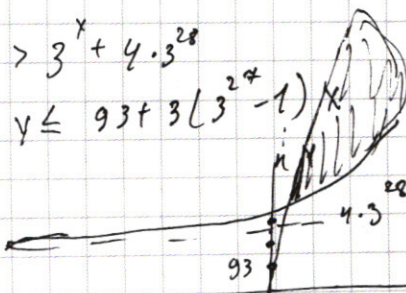


$$\begin{array}{r} 225 \\ + 64 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times 15 \\ \hline 1125 \end{array}$$

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 93 + 3(3^{28} - 1)$$



$$93 = 3 + 3^2 + 3^4$$

