МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФ[

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 5x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos 2x + \sin 2x = 0 \\ 2\cos 5x + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x) = 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \cos 2x + \sin 2x = 0 \\ 2\cos 5x + 2\cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \cos 2x + \sin 2x = 0 \\ \cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{array}\right.$

64827	3
21609	3
7203	3
2401	7
343	7
49	7
7	7
1	

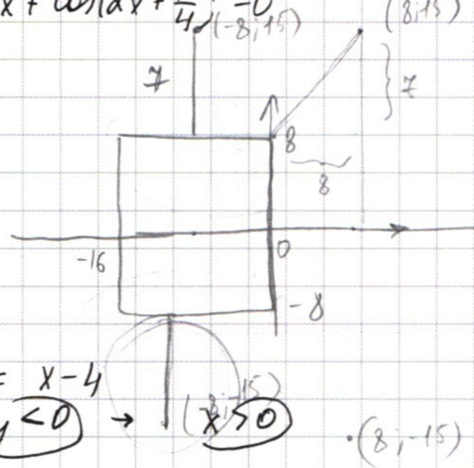
$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$

$y^2 + 2y(x+2) + (3x^2 + 12x) = 0$

$D/4 = x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x =$
$= 4x^2 - 8x + 4 = 4(x-1)^2$

$y_1 = -x - 2 + 2(x-1) = -x - 2 + 2x - 2 = x - 4$

$y_2 = -x - 2 - 2x + 2 = -3x$



1) $y = x - 4$

$y < 0 \rightarrow x > 0$

$\cdot(8;-15)$

$x - 4 < 0$

$\boxed{0 < x < 4}$

2) $y = -3x$

$\left(\frac{-x^7}{x-4}\right)^{\ln(-x+4)} = x^{2\ln(x(x-4)^2)}$

$\left(\frac{-x^7}{x-4}\right)^{\ln(-x+4)} = x^{2\ln x} \cdot x^{2\ln(x-4)^2}$ $28 = 7 \cdot 4$

$\left(\frac{-x^7}{x-4}\right)^{\ln(4-x)} =$

$\times\begin{array}{r} 24 \\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \end{array}$

$+\begin{array}{r} 225 \\ 64 \\ \hline 289 \end{array} = 17^2$

$\log_9 57_3^6 =$

$\cancel{lo}\ 3 = \cancel{\sqrt{3}}$

$2^{\log_5 2}$

$\times\begin{array}{r} 23 \\ 23 \\ \hline 69 \\ +46 \\ \hline 529 \end{array}$ $+\begin{array}{r} 529 \\ 576 \\ \hline 1105 \end{array}$

$+\begin{array}{r} 529 \\ 64 \\ \hline 593 \end{array}$

$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$

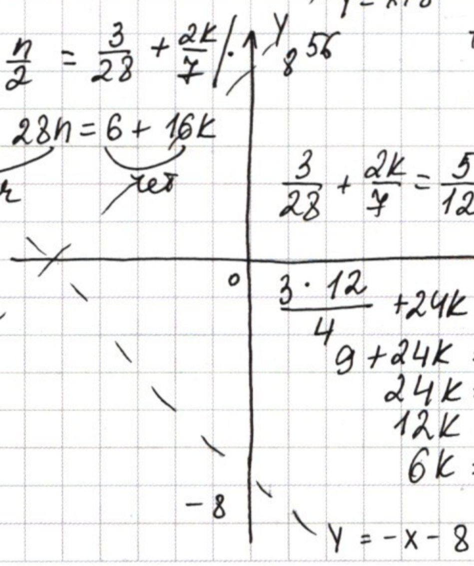
1) $\cancel{y = x+8}$ $\cancel{+24}$

$-\frac{1}{8} + \frac{n}{2} = \frac{5}{12} + \frac{2m}{3} \Big/ 24$

$\underbrace{-3 + 12n}_{\text{нечет}} = \underbrace{10 + 16m}_{\text{чет}}$

$-\frac{1}{8} + \frac{n}{2} = \frac{3}{28} + \frac{2k}{7} \Big/ \cdot 56$

$\underbrace{-7 + 28n}_{\text{нечет}} = \underbrace{6 + 16k}_{\text{чет}}$



$\frac{3}{28} + \frac{2k}{7} = \frac{5}{12} + \frac{2m}{3} \Big/ 12 \cdot 7$

$\sqrt{593}$

$\frac{3 \cdot 12}{4} + 24k = 35 + 56m$

$9 + 24k = 35 + 56m$

$24k = 24 + 56m$

$12k = 12 + 28m$

$6k = 6 + 14m$

$3k = 3 + 7m$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№5. ровно 2 решения

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1) $|x+y+8| + |x-y+8| = 16$

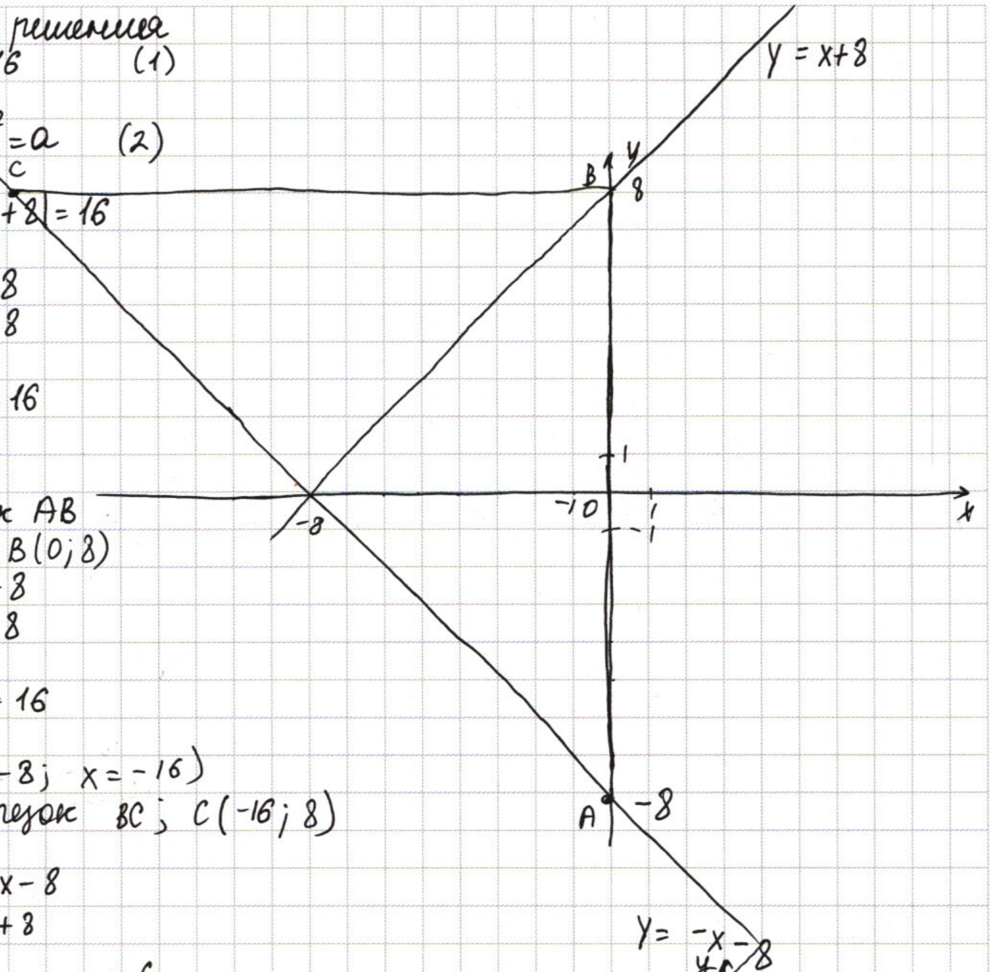
1) если $\begin{cases} y \geqslant -x-8 \\ y \leqslant x+8 \end{cases}$

$x+y+8+x-y+8=16$

$x=0$

т.е. это отрезок AB

$A(0;-8)$; $B(0;8)$



2) если $\begin{cases} y \geqslant -x-8 \\ y \geqslant x+8 \end{cases}$

$x+y+8-x+y-8=16$

$y=8$

$(8=-x-8;\ x=-16)$

т.е это отрезок BC; $C(-16;8)$

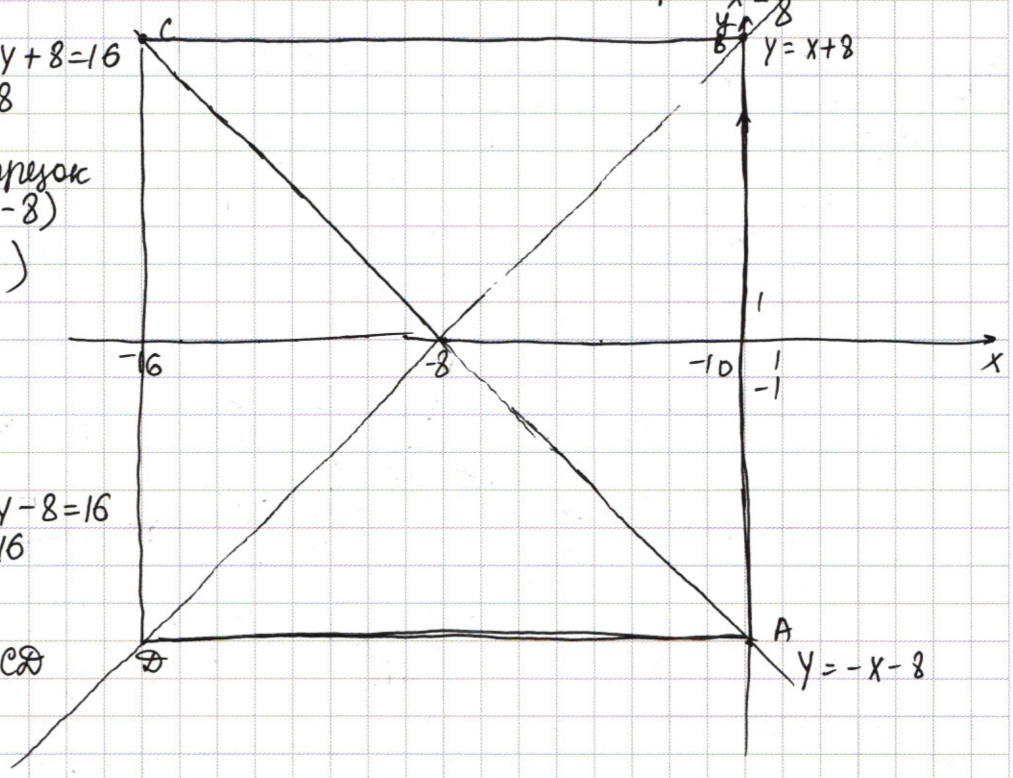
3) если $\begin{cases} y \leqslant -x-8 \\ y \leqslant x+8 \end{cases}$

$-x-y-8+x-y+8=16$

$y=-8$

т.е. это отрезок AD, $D(-16;-8)$

$\left(\begin{array}{c} -8=x+8 \\ x=-16 \end{array}\right)$



4) если $\begin{cases} y \leqslant -x-8 \\ y \geqslant x+8 \end{cases}$

$-x-y-8-x+y-8=16$

$-2x-16=16$

$x=-16$

т.е. это отрезок CD

$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$ – квадрат с вершинами в т.
$A(0;-8)$; $B(0;8)$, $C(-16;8)$; $D(-16;-8)$

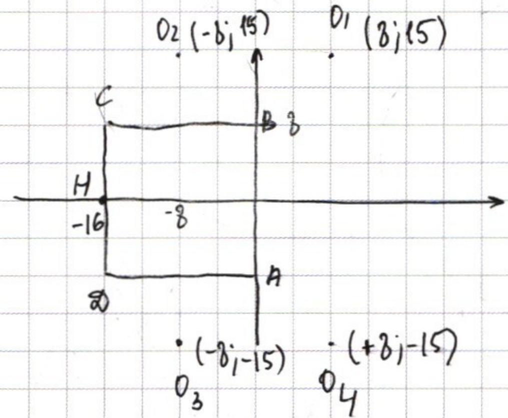
(2) $(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$; $a \geqslant 0$

это семейство окружностей с центрами в точках $(8;15)$; $(-8;15)$; $(8;-15)$; $(-8;-15)$ и радиусом $\sqrt{a}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) два решения будет тогда, когда окр. O_3 и O_2 будут касаться сторон ABCD, а окр. O_1 и O_4 не будут иметь с ним общих точек. Это возможно, т.к.

$$\begin{array}{r} 64 \\ +49 \\ \hline 103 \end{array}$$



$O_1B = O_4A = \sqrt{64+49} > 7$,

$O_1B = \sqrt{103}$

7 - расст. от O_2 до CB и O_3 до AD =>

$\sqrt{a} = 7 \Rightarrow \boxed{a=49}$

далее, при увеличении a решений будет больше 2-х.

Даже если две или более окр. будут иметь общие точки, то всего точек пересечения будет больше 2-х.

2) Однако, если взять a такое, чтобы $\sqrt{a} > O_2D$, то все ещё решений может быть 2. Это возможно, когда $\sqrt{a} = O_1D$ и решений будет 2: т. D и т. C (для окр. O_1 и O_4 соотв.)

$O_1D = O_4C$

т.е. $\begin{cases} \sqrt{a} > \sqrt{23^2+64} \\ \sqrt{a} = \sqrt{24^2+23^2} \end{cases}$ $\boxed{a=1105}$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ +48\ \ \\ \hline 576 \\ +529 \\ \hline 1105 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 46\ \ \\ \hline 529 \end{array}$$

3) Ещё 2 решения может быть, если окр. O_2 и O_3 пересекают ABCD в одних и тех же точках однако тогда $\sqrt{a} = O_2H$, $H(-16;0)$

$\sqrt{a} = \sqrt{64+225} = 17$ ~~одно~~ но при таком a окр. O_1 и O_4 будут пересекать ABCD в 2-х точках и решений будет более 2х.

~~Аналогично не~~

Ответ: $a = 1105$; $a = 49$.

№2.

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 5x + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

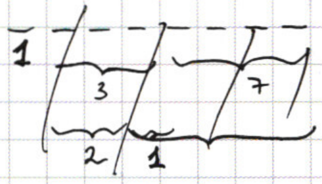
$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$64827 = 3^3 \cdot 7^4$

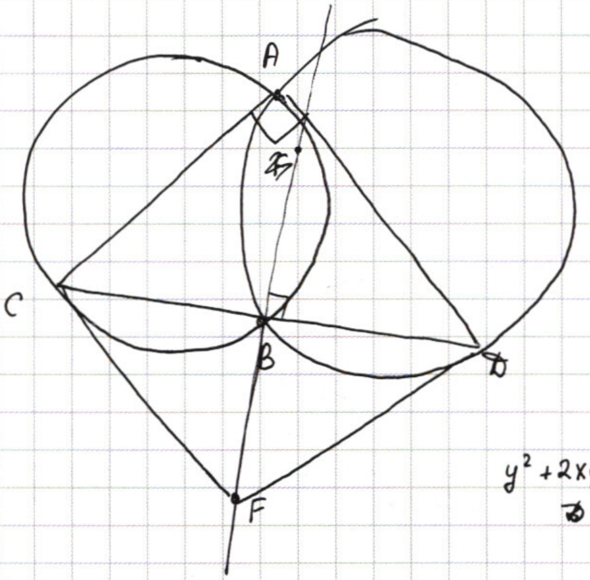
Всего делителей, которые могут быть цифрами 8-значного числа 7, значит, одна из цифр числа · 1.

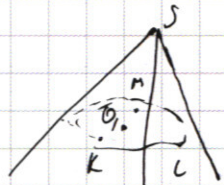
$a^{\log_b a}$

$\log_b a = c$



1 _ _ _ _ _ _





$y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0$

$y^2+2y(x+2)-3x^2+12x=0$

$D/4 = x^2+4x+4+3x^2-12x = 4x^2-8x+4 = (2x-2)^2$

$y_1 = -x-2-2x+2 = -3x$

$y_2 = -x-2+2x-2 = x-4$

1) $y=-3x$

$\left(\frac{x^7}{3x}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(x\cdot 9x^2)}$

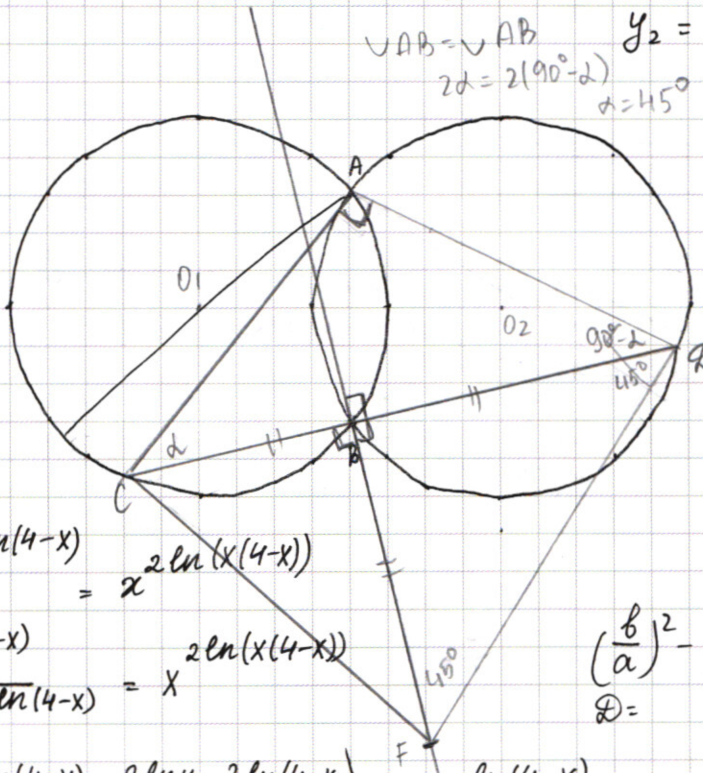
$\triangle O_1AB = \triangle O_2AB$

$\Downarrow$

$\smile AB = \smile AB$

$2\alpha = 2(90^\circ-\alpha)$

$\alpha = 45^\circ$



$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}$

$\frac{x^{6\ln(3x)}}{3^{\ln 3x}} = x^{6\ln(9x)}$

$x^{6(\ln 3x - \ln 9x)} = 3^{\ln 3x}$

$x^{6\cdot\ln\frac{1}{3}} = 3^{\ln 3x}$

$x^{-6\ln 3} = 3^{\ln 3x}$

$-6\cancel{\ln 3}\ln x = \ln 3x\ \cancel{\ln 3}$

$\ln x^{-\frac{1}{6}} = \ln 3x$

$\frac{1}{x^6} = 3x$

$x^7 = \frac{1}{3}$

$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} + 2 = 0$

$D =$

$\left(\frac{x^7}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln(x(4-x))}$

$\frac{x^{7\ln(4-x)}}{(4-x)^{\ln(4-x)}} = x^{2\ln(x(4-x))}$

$x^{7\ln(4-x)-2\ln x-2\ln(4-x)} = (4-x)^{\ln(4-x)}$

$x^{5\ln(4-x)-2\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)}$

$\ln(4-x)\ln(4-x) = \underbrace{\ln x}_{a}\,(\underbrace{5\ln(4-x)-2\ln x}_{b})$

$b^2 = a(b-2a) \quad b^2-ab+2a^2=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left[\begin{array}{l}\cos 2x+\sin 2x=0\\ 2\cos 5x+\sqrt{2}(\cos 2x-\sin 2x)=0\end{array}\right.$ $\quad$ $\left[\begin{array}{l}\cos 2x+\sin 2x=0\\ \cos 5x+\cos(2x+\frac{\pi}{4})=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin(2x+\frac{\pi}{4})=0\\ 2\cos(\frac{7x}{2}+\frac{\pi}{8})\cos(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8})=0\end{array}\right.$ $\quad$ $\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{4}=\pi n, n\in Z\\ \frac{7x}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\\ \frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z\end{array}\right.$ $\quad$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{8-2}{2\cdot 8}=\frac{6}{2\cdot 8}=\frac{3}{8}$

$\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z\\ \frac{7x}{2}=\frac{3\pi}{8}+\pi k, k\in Z\\ \frac{3x}{2}=\frac{5\pi}{8}+\pi m, m\in Z\end{array}\right.$ $\quad$ $\left[\begin{array}{ll}x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z & (1)\\ x=\frac{3\pi}{28}+\frac{2\pi k}{7}, k\in Z & (2)\\ x=\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi m}{3}, m\in Z & (3)\end{array}\right.$

(1) и (2); (1) и (3) серии не совпадают никогда. (2) и (3) совпадают, когда $3k=3+7m$

$k=1+\frac{7}{3}\cdot m$, т.е. при $m=3\ell$, $\ell\in Z$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$; $x=\frac{3\pi}{28}+\frac{2\pi k}{7}$; $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi m}{3}$; $n,k,m\in Z$

№ 3.

$\begin{cases}\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)}=x^{2\ln(xy^2)} & (1)\\ y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0 & (2)\end{cases}$

(2) $y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0$

$y^2+2y(x+2)-3x^2+12x=0$

решим это ур-ие как квадрат. ное отн-но y:

$D/4=x^2+4x+4+3x^2-12x=4x^2-8x+4=(2x-2)^2$

$y_1=-x-2-2x+2=-3x$

$y_2=-x-2+2x-2=x-4$

I случай, если $y=-3x$:

(1) $-y>0$, $y<0 \Rightarrow x>0$

$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)}=x^{2\ln(9x^3)}$

$\frac{x^{6\ln(3x)}}{3^{\ln(3x)}}=x^{2\ln 9+6\ln x}$;

$\frac{x^{6\ln(3x)}}{3^{\ln(3x)}}=x^{2\ln 9+2\ln x^3}$

$\cancel{x^{2\ln 9}=3^{\ln(3x)}}$

прологарифмируем:

$-2\ln 9 \ln x = \ln 3x \cdot \ln 3$

$-4\ln 3 \ln x = \ln 3x \cdot \ln 3$

$\ln \frac{1}{x^4} = \ln 3x$

$\frac{1}{x^4} = 3x$

$\frac{1}{3} = x^5$

$\boxed{x = \sqrt[5]{\frac{1}{3}}}$

$\boxed{y = -3\sqrt[5]{\frac{1}{3}}}$

$x^{6\ln 3 + 6\ln x - 4\ln 3 - 6\ln x} = 3^{\ln 3x}$

$x^{2\ln 3} = 3^{\ln 3x}$

прологарифмируем:

$\ln x \cdot 2\ln 3 = \ln 3 \ln 3x$

$\ln x^2 = \ln 3x$

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -9 \end{array}$

II случай: $y = x - 4$; $y < 0 \Rightarrow x - 4 < 0$; $x < 4$

$0 < x < 4$

$4 - x > 0$

$\left(\frac{x^7}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln(x(4-x)^2)}$

$\frac{x^{7\ln(4-x)}}{(4-x)^{\ln(4-x)}} = x^{2\ln x + 2\ln(4-x)^2}$

$x^{7\ln(4-x) - 2\ln x - 4\ln(4-x)} = (4-x)^{\ln(4-x)}$

$x^{3\ln(4-x) - 2\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)}$

прологарифмируем: $(3\ln(4-x) - 2\ln x)\ln x = \ln(4-x)\ln(4-x)$

Пусть $\ln(4-x) = a$; $\ln x = b$, тогда

$(3a - 2b)b = a^2$

$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$

$\cancel{a = 3b}$ $\left[\begin{array}{l} a = 2b \\ a = b \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \ln(4-x) = \ln x^2 \\ \ln(4-x) = \ln x \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2 = 4 - x \\ x = 2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x^2 + x - 4 = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$ $D = 1 + 16 = 17$; $x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$; $0 < \frac{-1+\sqrt{17}}{2} < 4$

$x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0$ не подходит

$x = 2$; $y = -6$

$x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$; $y = 3 \cdot \frac{1-\sqrt{17}}{2}$

Ответ: $(3; -9)$; $(2; -6)$; $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{3(1-\sqrt{17})}{2}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

Дано: окр. $O_1(R)$; окр. $O_2(R)$

$R=17$; A и B - т. пересечения

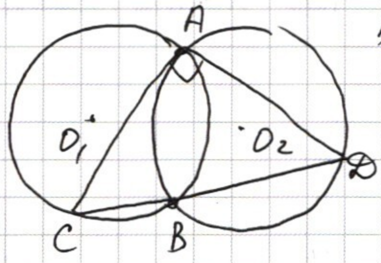
$B\in CD$; $\angle CAD=90°$

$BF=BD$

а) найти: CF

б) $BC=16$; найти: S_{ACF}

Решение:



1) Пусть $\angle ACD=\alpha$, тогда $\angle ADC = 90°-\alpha$

угол вписанный

$O_2A=O_2B=R$

$O_1A=O_1B=R$

AB-общая

$O_1A=O_1B=O_2A=O_2B$ $\Rightarrow \triangle O_1AB=\triangle O_2AB$ по 3-м сторонам $\Rightarrow$

$\angle AO_1B = \angle ADB$

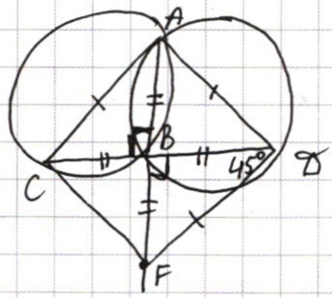
$\angle AO_1B$ - центральный; $\angle AO_1B = \cup AB = 2\alpha$

$\angle AO_2B$-центральный; $\angle AO_2B = \cup AB = 2(90°-\alpha)$

$\angle AO_1B = \angle AO_2B \Rightarrow \alpha = 90°-\alpha \Rightarrow \alpha = 45° \Rightarrow \triangle ACD$-р/б

т.к. $BF\perp CD$, то $A\in BF$; ~~$\angle ABC$~~

AF-медиана, биссектриса и высота



$\angle ABC=90° \Rightarrow AC$ - диаметр

$\angle ABD=90° \Rightarrow AD$ - диаметр $\Rightarrow AC=AD=34$

$BF=BD$, $\angle DBF=90° \Rightarrow \angle BDF=\angle BFD=45°$

$AB=\frac{1}{2}CD$

$BF=\frac{1}{2}CD$ $\Rightarrow AB=BF$

$AC=AD=DF=CF$

(из того, что $\triangle CAB=\triangle ABD=\triangle BDF=CBF$), $\angle CAD=90° \Rightarrow$

ADFC-квадрат; $\boxed{CF=AD=34}$

$\angle ACF=90° \Rightarrow \triangle ACF$-п/у, р/б ($AC=CF$) по т. Пифагора:

$AF=$ ~~$2\sqrt{34}$~~ $34\sqrt{2}$

$BC\perp AF \Rightarrow BC$- высота $\triangle ACF$ $\Rightarrow S_{ACF}=\frac{1}{2}\cdot 34\sqrt{2}\cdot 16 = 17\cdot 16\sqrt{2} =$

$= 17(17-1)\sqrt{2} = 289\sqrt{2} - 17\sqrt{2} =$ ~~$17(17$~~ $-$ ~~17~~

$= 272\sqrt{2}$

$$\begin{array}{r} 289 \\ -\ 17 \\ \hline 272 \end{array}$$

Ответ: а) $CF=34$; б) $S_{ACF}=272\sqrt{2}$.

№1.

64827	3
21609	3
7203	3
2401	7
343	7
49	7
7	7
1	

$64827 = 3^3 \cdot 7^4$

Следовательно, 8 значное число состоит из 3 троек, 4 семерок и 1.

Всего таких чисел будет: $8!$, но есть повторения из-за троек и семерок, поэтому всего чисел без повторений будет: $\frac{8!}{3!\,4!} = \cancel{\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{2\cdot3\cdot2\cdot3\cdot4}} =$

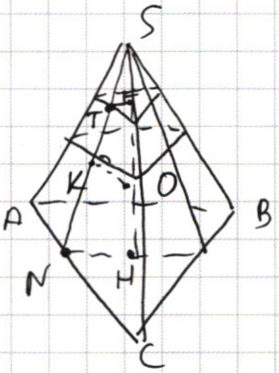
$= 40\cdot7 = 280$

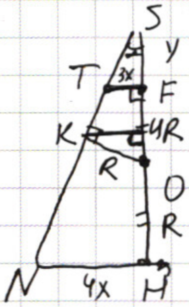
Ответ: 280.

№5.

Дано: сфера т $O(R)$
трехгранный угол
$S_1 = 9;\ S_2 = 16$

$\angle KSO = ?$
$S_{сеч} = ?$





т.к. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{16}$, то $\frac{TF}{NH} = \frac{3}{4}$

$\triangle STF:\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{3x}{y}$

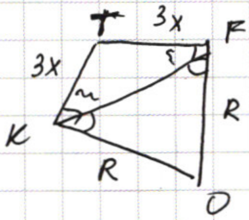
~~$\triangle SKO:\ \operatorname{tg}\alpha =$~~ $\triangle SNH:\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{4x}{2R+y}$

$\frac{3x}{y} = \frac{4x}{2R+y}$; $6R + 3y = 4y$; $y = 6R$; $\triangle SKO:\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{\sqrt{(7R)^2 - R^2}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{48}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$

$\boxed{\angle KSO = \operatorname{arctg}\frac{1}{4\sqrt{3}}}$;

TFKO:



$\triangle KOF$ – р/б $\Rightarrow$
$\angle KFO = \angle OKF \Rightarrow$
$\triangle KTF$ – р/б

аналогично $NK = 4x \Rightarrow$
KU – средняя линия $NTFH$
$FU = HU = R \Rightarrow$

$S_{сеч} = \sqrt{S_1 S_2}$; $S_{сеч} = 3\cdot4 = 12$

Ответ: $\angle KSO = \operatorname{arctg}\frac{1}{4\sqrt{3}}$, $S_{сеч} = 12$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

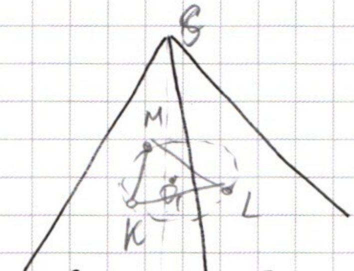
$\frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1}{\cancel{4}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}} = 5\cdot8\cdot7 = 40\cdot7 = 280$

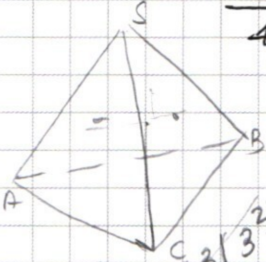
9 — 3x

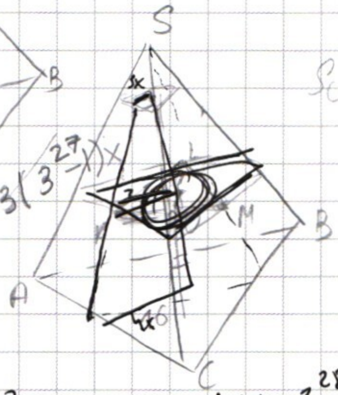
12 — y

$\sqrt{9/16} =$

$= 12$ Sсеч







$3^x+4\cdot3^{28} \le 93\cdot3(3^{27}-1)x+4\cdot3$

$3^{28} \ge 93+3(3^{27}-1)x$

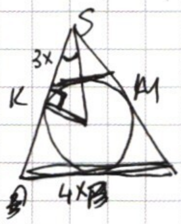
$3+4\cdot3^{28} \vee 93+3(3^{27}-1)\cdot3$

$y > 3^x+4\cdot3^{28}$

$y \le 93+3(3^{27}-1)x$

т.к. $x\in\mathbb{Z}$, то $y\in\mathbb{Z}$

$y \ge 1+4\cdot3^{28}$



$3^x+4\cdot3^{28} = 93+3(3^{27}-1)\cdot x$

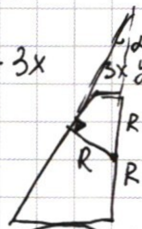
$3^x+4\cdot3^{28} = 93+3^{28}\cdot x-3x$

$3^x+4\cdot3^{28} \ge 93+3(3^{27}-1)x$

$= 3\cdot31+3(3^{27}-1)\cdot x$

$\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{3\cdot4}$

$= 48\cdot7\cdot10 = 70\cdot48 =$



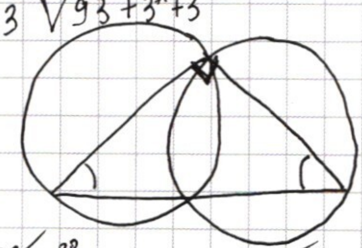
$\cancel{3\cdot4\cdot3}$ $3^{29}\cdot4+3 \vee 93+3^{28}+3x+4\cdot3^{28}-3^{28}\cdot x = 93$

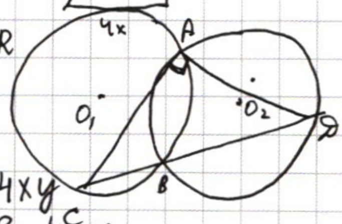
$+3^{29}-9$

$3^{29}+3^{28}+3 \vee 93+3^{28}+3^{29}$

$\frac{3x}{y} = \frac{4x}{y+2R}$

$\frac{R}{\sqrt{48R^2}} =$





$3x(y+2R) = 4xy$

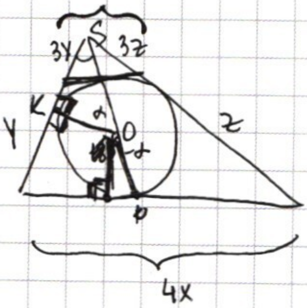
$3xy+6xR = 4xy$

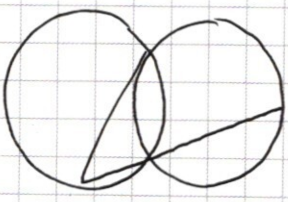
$xy = 6xR$

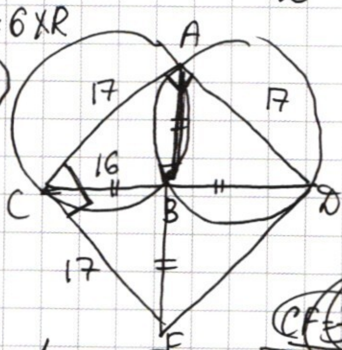
$y = 6R$

17×16: $102 + 17 = 272$

$3+\cancel{3^{29}}+3^{28} \vee 93+\cancel{3^{29}}-9$







$AF = 2\sqrt{17}$; $S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2}\cdot16\cdot2\sqrt{17} = 16\sqrt{17}$

$\frac{3x}{6R}$