

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

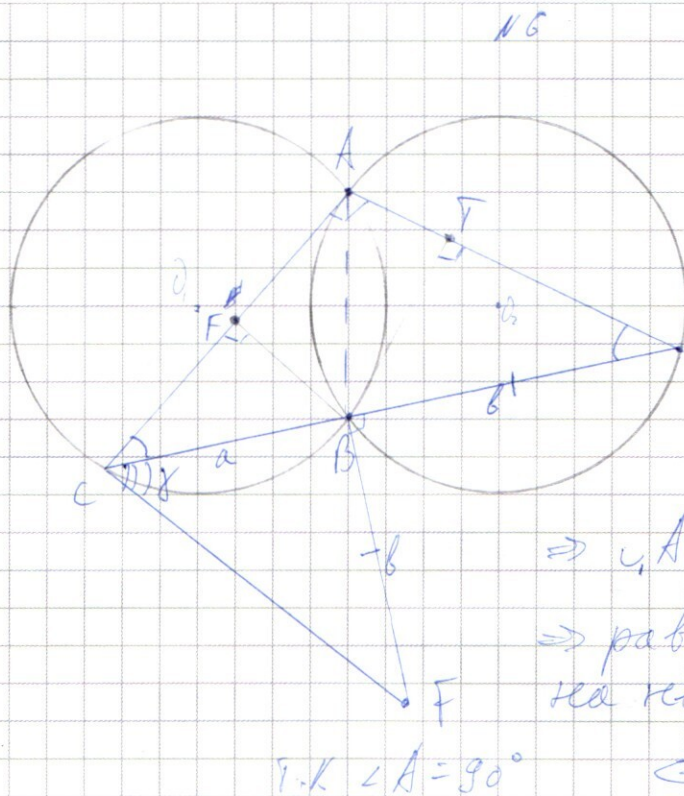
имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



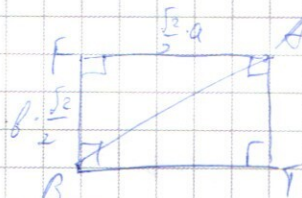
1) $w_1(O_1; R), w_2(O_2; R)$;
 $R = 17$;
 $w_1 \cap w_2 = A, B$
 $CB \cap w_2 = D; CB = a; BD = b$
 $FB = BD$; $FB \perp CD$

2) т.к. радиусы равны $\Rightarrow \angle AOB = \angle AOB$ т.е. дуги равны $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ равные углы опирающиеся на них:
 $\angle ACB = 2 \angle ADB$

$\angle C = \angle D = 45^\circ \Rightarrow AC = AD$

3) По $\sin$ в $\triangle ABD$: $\frac{AB}{\sin \angle D} = 2R \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2R = 17\sqrt{2}$

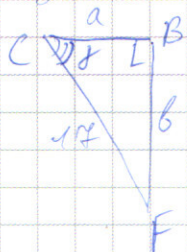
4) Опустим перпендикуляры из A и B на CF и DF из F на AB
 $BF \perp AC; BF \perp AD \Rightarrow AFBF$ - прямоугольник



5) Из $\triangle CFB$; $\triangle CBF$
 $FB = \frac{\sqrt{2}}{2} a$ $FB = \frac{\sqrt{2}}{2} b$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора: $AB^2 = \frac{2}{4} (a^2 + b^2) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = AB \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

6) Задача решена:



$$\Rightarrow CF = \sqrt{a^2 + b^2} = AB \frac{\sqrt{2}}{2} = 17$$

$$\Rightarrow \sin \gamma = \frac{b}{17}; \cos \gamma = \frac{a}{17}$$

7) 6) $BC = 16 \Rightarrow AB = 33 \Rightarrow AC = \frac{33}{2} \Rightarrow BF = \sqrt{289 - 16^2}$

$$BF = 4\sqrt{17}$$

$$BF = \sqrt{33}$$

8) $\sin(\gamma + \frac{\pi}{4}) = \sin \gamma \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \gamma$

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{33}}{17}$$

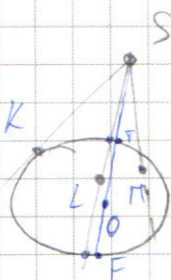
$$\cos \gamma = \frac{16}{17}$$

$$\Rightarrow \sin(\gamma + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{16 + \sqrt{33}}{17} \right)$$

9) $S_{ACF} = \frac{1}{2} CA \cdot CF \cdot \sin(\gamma + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow S_{ACF} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} (16 + \sqrt{33}) \cdot 17 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(16 + \sqrt{33})}{17}$

$$CA = (16 + \sqrt{33}) \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{2}}{2} (16 + \sqrt{33})$$

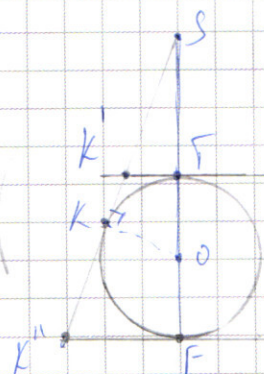
Отв.: $CF = 17$; $S_{ACF} = \frac{1}{4} (16 + \sqrt{33})^2$ $S_{ACF} = \frac{1}{4} (16 + \sqrt{33})^2$



н 4

1) $\Omega(0; R)$; $\Rightarrow SK = SM = SL$ - т.к. касательные

т.к. плоскость касается и перпендикулярна SO -диаметру $\Rightarrow L$ и F - точки пересечения SO с сферой, а так же и есть точки касания плоскостей. Рассмотрим сечение (KSO)



Пусть верхняя плоскость пересечет SL в L' ; SM в M' ; SK в K'

Аналогично отметим в K'' ; M'' ; L''

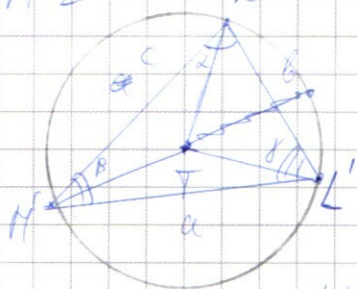
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.к. $SK = SO = SK = SM = SL \Rightarrow$ конфигурация
сечения $SKO, SLO,$
 SMO

$K'T = L'T = M'T \leftarrow$ аналогично

T - центр описанной окружности

$\triangle K'P'L'$



$$S_{\triangle K'P'L'} = \frac{1}{2} c b \cdot \sin \gamma$$

$$c = 2R \sin \alpha$$

$$b = 2R \sin \beta$$

$\triangle KLM \sim \triangle K'L'M' \sim \triangle K''L''M''$

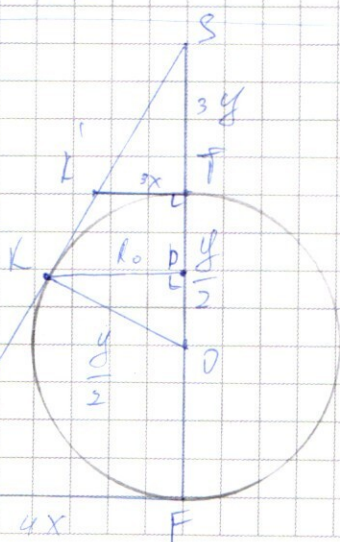
Из подобия: $\frac{S_{\triangle K'P'L'}}{S_{\triangle KLM}} = \frac{R_1^2}{R_0^2} \Rightarrow$

Аналогично для другого

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle K'P'L'}}{S_{\triangle K''P''L''}} = \frac{9}{16} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{4}$$

Из подобия $K'T = 3x \Rightarrow K''F = 4x$
 $ST = 3y, SF = 4y \Rightarrow$

$$\Rightarrow T.O = \frac{y}{2} = KO \Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{\frac{y}{2}}{3.5} = \frac{1}{7}$$



Т.к. $\angle KSO = \angle MSO = \angle LSO \Rightarrow$ плоскость
 $KS = MS = LS$
 $(KLM) \perp SF$
 $(KLM) \cap SF = D; KD = R.$

$$SK = \sqrt{KO^2 + SO^2} = y \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{y}{2} \sqrt{48} = y \sqrt{12} = 2y \sqrt{3}$$

$$\text{Из подобия} \Rightarrow \frac{SK}{SO} = \frac{KO}{SO} = \frac{K'F}{FS} = \frac{3x}{3y} \Rightarrow \frac{K'F}{FS} = \frac{KO}{SK} \Rightarrow \Rightarrow x = y \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{KO}{SO} = \frac{KD}{SK} \Rightarrow KD = \frac{1}{2} \cdot 2y \sqrt{3} = \frac{2}{3} \sqrt{3} y$$

$$x = \frac{y}{4\sqrt{3}}$$

$$\text{Из подобия} \Rightarrow \frac{S_{KML}}{S_{K'NL}} = \frac{R_o^2}{R_i^2} \Rightarrow S_{KML} = 9 \cdot \frac{4 \cdot 3}{49} =$$

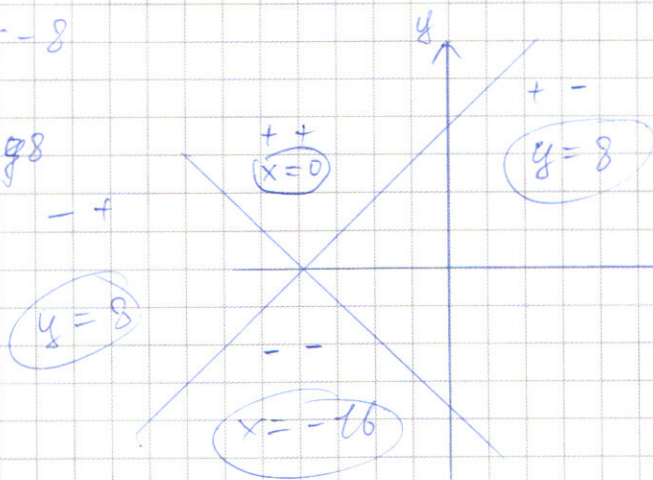
$$S_{KML} = \frac{4 \cdot 3}{49} \cdot 16 \cdot 3 = \frac{528}{49}$$

$$\begin{cases} (x+y+8) + |x-y+8| = 16 \\ (x+1-8)^2 + (y+1-15)^2 = a \end{cases}$$

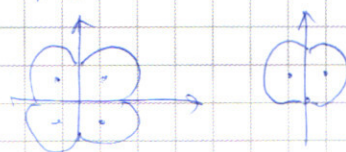
1) Рассмотрим как раскр. модуль:

$$1) y = -x - 8$$

$$2) y = x + 8$$



2) Второе ур-е - это либо окруж. либо:

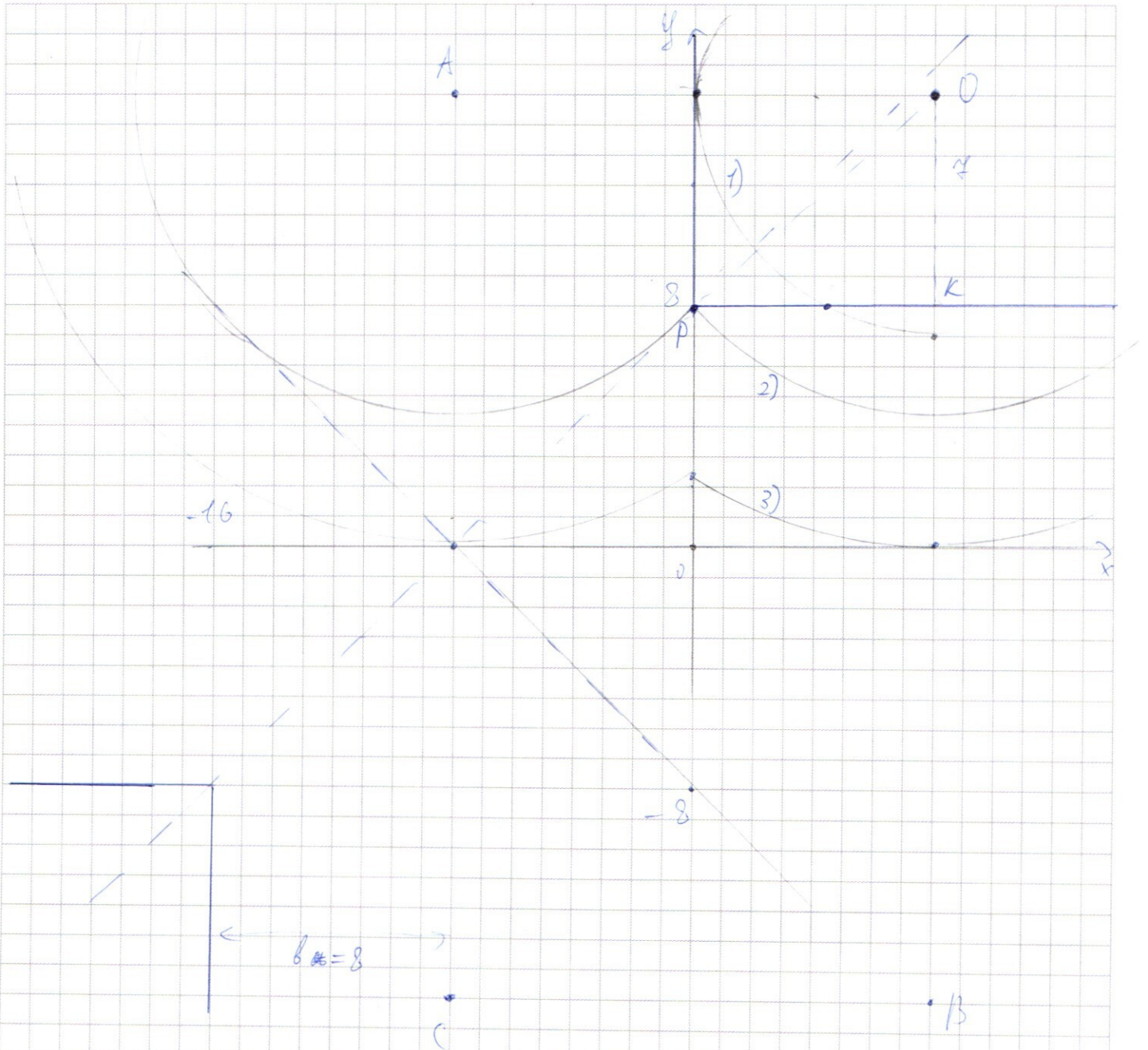


с радиусом $R = \sqrt{a}$

центр $8; 15$

Построим в сетке $(x; y)$ (A; B; C) - центры дуг, модульных окружностей

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1) Увеличивая a - увеличиваемся радиусе окружности.
 Когда окр. касается оси y мы имеем 2 реш.
 Увеличивая дальше - она отразится (за счет модуля)
 влево (центр A) и будет 3 решения: 2 с $xy=0$ и
 один с $y=8$

2) Так будет до точки $(0; 8)$ - крайний случай 3 решений.

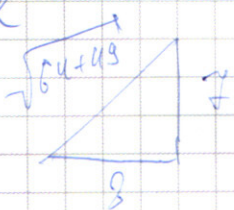
Потом будет два ^{и одно} одно с $y=8$ и с $x=0$

3) Соответственно до того как окр. коснется оси x т.е. после пересечения; двойная окружн. отразится вниз и будет пересекаться с ^{нижней} частью графика.

Как факт-во: в расстоянии от E до B $x = -16$ и $b = 8$

роднее при этом $R > 15 \Rightarrow$ Далее не подходит случаи

т.е. при $R = 8$ - 2 реш.

$\Rightarrow$ ОРК  $\Rightarrow$ при $R \in (\sqrt{145}; 15]$ - так же 2 решения

Отв.: $a \in \{64\} \cup (145; 225]$

н 1

$64827 = 3^3 \cdot 2^4 \Rightarrow$ само число должно состоять из 3 троек и 4 единиц (случай $3 \cdot 2^4$ - отбрасываем) и 1 единицы

Рассм. 3 тройки и 4 ~~и~~ 4 единицы

•

•

•

|□|□|□|□|

Если ~~и~~ 5 мест расположить 3 тройки $\Rightarrow C_5^3$

Но это случаи $\dots \square \dots \Rightarrow C_5^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а так же $15 \dots 15$ т.е еще 5 вариантов.

В итоге еще 8 вариантов расставить
сегменты

$$|0|0|0|0|0|0| \Rightarrow S = 8(C_5^3 + C_5^2 + 5) = 8 \cdot \left(\frac{5 \cdot 4}{2} + \frac{5 \cdot 4}{3} + 5 \right) =$$

Отв.: 280

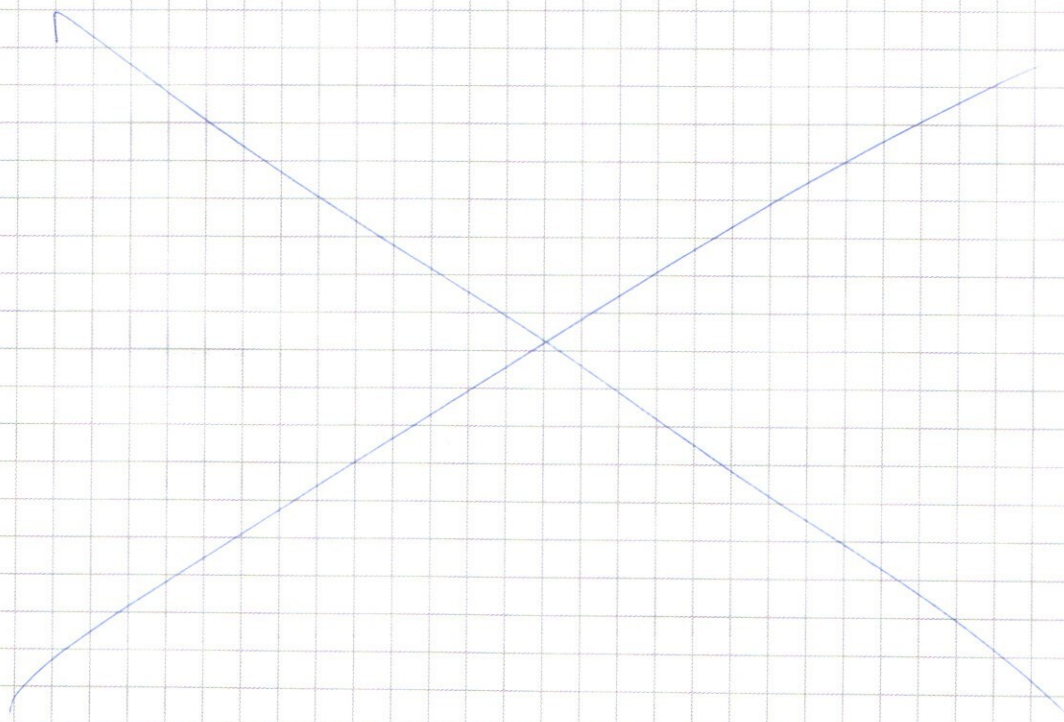
$S = 280$

№ 2

$\cos(2x - 3x)$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \int_2 \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \int_2 (\cos 7x \cos 3x + \cos 7x \cdot \sin 3x) = 0$$



$$\begin{cases} \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -\frac{x^2}{y} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

9) $y^2 + 2(x+2)y - 3x^2 + 12x = 0$

$$\frac{D}{4} = x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x = 4x^2 - 8x + 8 = 4(x^2 - 2x + 2)$$

$$y = -x - 2 \pm \sqrt{4(x^2 - 2x + 2)} = \begin{cases} -x - 2 + 2x - 2 = x - 4 \\ -x - 2 - 2x + 2 = -3x \end{cases}$$

1) $\ln(-y) \ln\left(-\frac{x^2}{y}\right) = 2\ln(xy^2) \ln x$ — прологарифмируем

~~$$\ln(4-x) \ln\left(-\frac{x^2}{4-x}\right) = 2\ln(x(3x+1)) \ln x$$~~

~~$$\ln(4-x) \ln(x) - \ln^2(4-x) = 2\ln^2 x + 2\ln(3x+1) \ln x$$~~

~~$$\ln(4-x) \ln\left(\frac{x^2}{4-x}\right) = 2\ln^2 x + 4\ln y \ln x$$~~

~~$$\ln(4-x) \ln x - \ln^2(4-x) = 2\ln^2 x + 4\ln(x-4) \ln x$$~~

~~$$2\ln^2 x + \ln^2(4-x) - 3\ln(x-4) \ln x = 0$$
 — ~~кбодра~~~~

~~$$\begin{cases} \ln x = 1 \\ \ln x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e \\ x = e^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = e - 4 \\ y = e^{\frac{1}{2}} - 4 \end{cases}$$~~

~~$$2) \ln(3x+1) \ln x - \ln^2(3x+1) = 2\ln^2 x + 4\ln x \ln(3x+1)$$~~

см.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) \pm \ln(-y) \ln x - \ln^2(-y) = 2\ln^2 x + 4\ln(y) \ln x$$

$$2\ln^2 x - 3\ln(-y) \ln x + \ln^2(-y) = 0$$

кв. ур-е

$$\ln x = \frac{3\ln(-y) \pm \sqrt{9\ln^2(-y) - 8\ln^2(-y)}}{2} = \frac{\ln(-y)}{2}$$

Проверим.

$$y = x - 4$$

$$1) \ln x = \ln(x-4) \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$y = -3x - 1$$

$$2) \ln x = \ln(3x+1) \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-4,5 \end{cases}$$

$$y = -(3x+1)$$

$$4) \ln x^2 = \ln(3x+1)$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{10}}{2}$$

$$y = -\left(\frac{9 + 3\sqrt{10}}{2}\right) - 1$$

$$y = x - 4$$

$$3) \ln x = \frac{1}{2} \ln(-y)$$

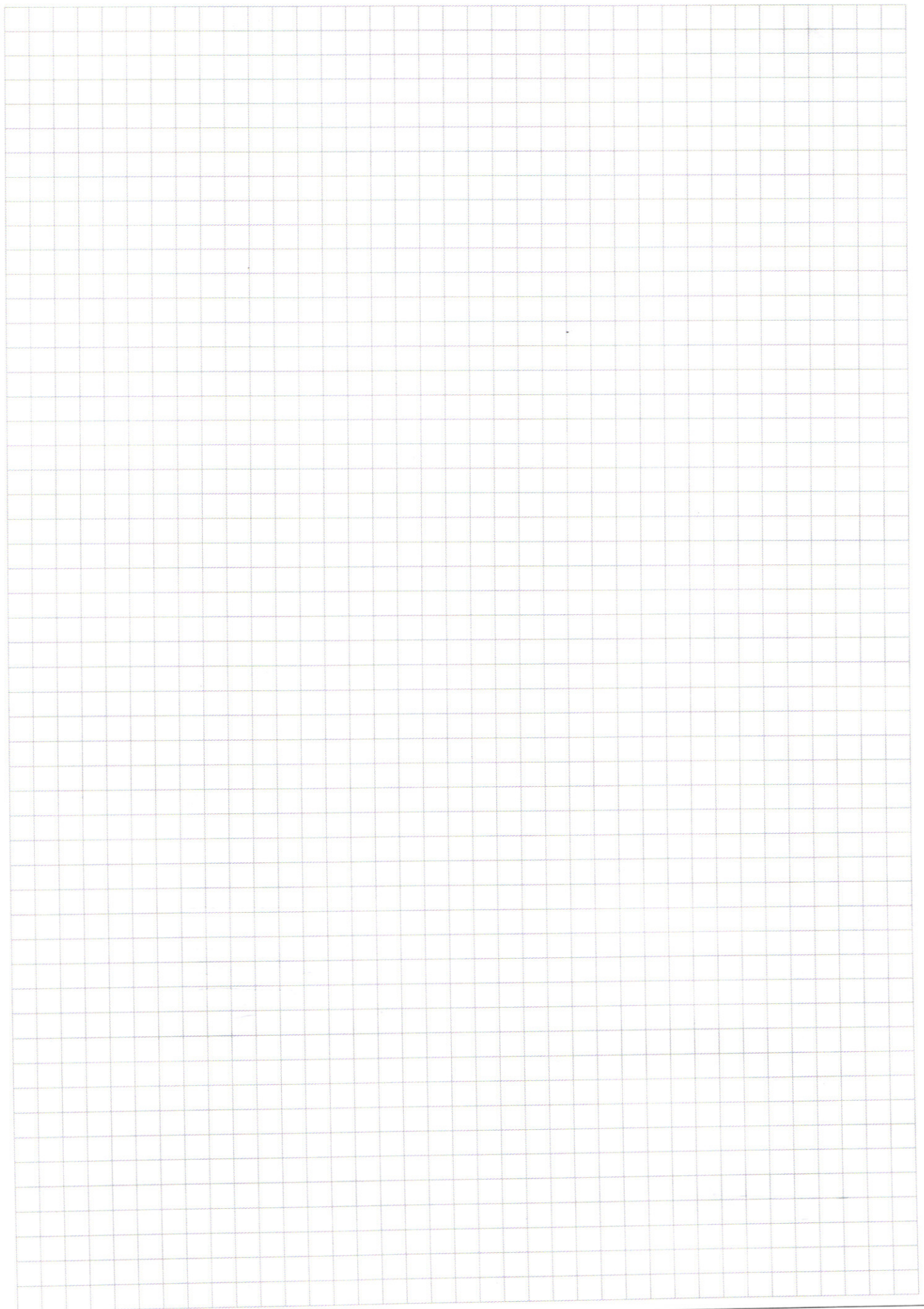
$$x^2 = 4 - x \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{17} - 8}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \\ y = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Рез

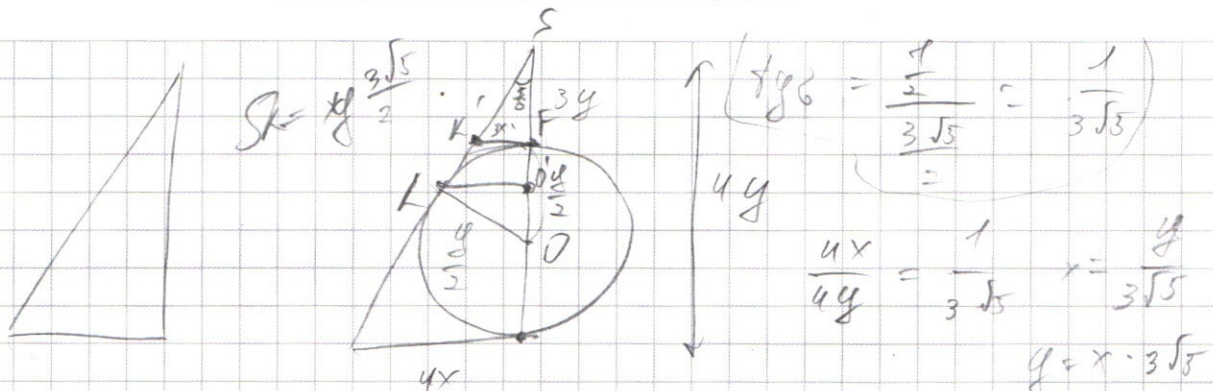
x	y
2	-2
$-\frac{1}{2}$	-4,5
$\frac{\sqrt{17} - 1}{2}$	$\frac{-9 + \sqrt{17}}{2}$
$\frac{3 + \sqrt{10}}{2}$	$-\left(\frac{9 + 3\sqrt{10}}{2}\right) - 1$



☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 10
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{KO}{KS} = \frac{KO'}{SK} \Rightarrow KO' = \frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{3.5} \cdot 4$$

$$\frac{3\sqrt{5}}{2 \cdot 7} = R'$$

$$\frac{S'}{g} = \frac{S'}{S} = \left(\frac{g \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2 \cdot 7}}{3x} \right)^2 = \left(\frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 7} \right)^2$$

$$\frac{225}{(14)^2} = \frac{225}{196}$$

$$S' = g \cdot \frac{225}{196}$$

$$y^2 + (2x+4)y - 3x^2 + 12x = 0$$

$$D = 4x^2 + 16x + 16 -$$

$$\frac{D}{4} = x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x$$

$$4x^2 - 8x + 4$$

$$4(x^2 - 2x + 1)$$

$$\frac{x^{\frac{3 \ln(-y)}{2}}}{-y^{\ln(-y)}} = x^{2 \ln(xy)}$$

$$x^{3 \ln(y) - 2 \ln(xy)} = (-y)^{\ln(-y)} \\ = \ln^2(-y)$$

$$a+b+c+d=1$$

$$\sqrt{2} \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos 7x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 7x \sin \frac{\pi}{4}$$

$$a+b+c+d + 2ac + 2bd + \dots = 2$$

$$\sqrt{2}ac + \sqrt{2}$$

$$a(c+1)(c+1)$$

$$\frac{1}{2}$$

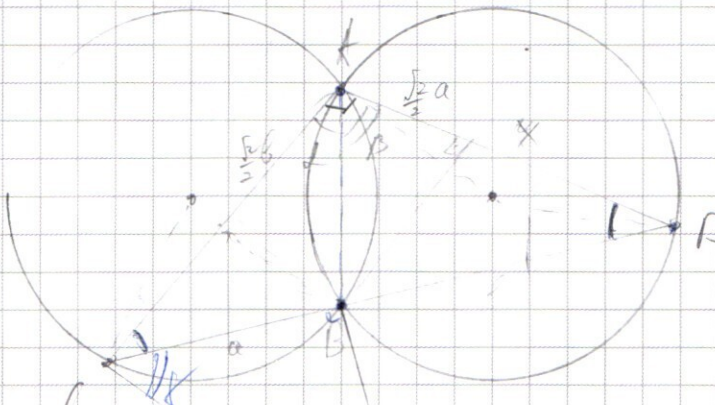
$$a(\sqrt{2}+1)$$

$$2\sqrt{2}$$

$$7ab - a^2 = 2b^2 + 4ab$$

$$\ln x = \frac{3 \ln(y) \pm \sqrt{9 \ln^2(y) - 4 \ln^2(-y)}}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



CP
 BP
 $AC = AD$

$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R$
 $AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot 14 = 14$

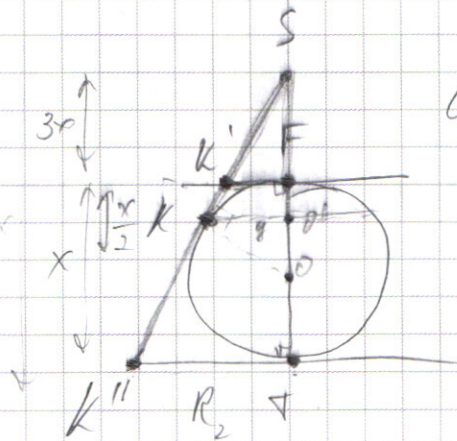
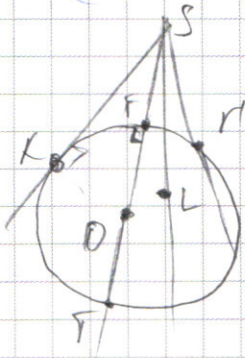
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = h^2$
 $b^2 + a^2 = 2h^2 = CF^2$
 $CF = \sqrt{2}h$
 $CF = 34$

$a = BC = 16 \Rightarrow BP = \sqrt{16^2 - a^2}$
 $\Rightarrow \sqrt{5}$

$\sin \left(\frac{\pi}{4} + \delta\right)$

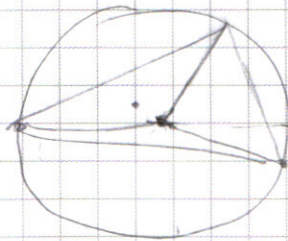
$14 + 16$

$$93 + 3(3^9 - 1)(3^{18} + 3^9 + 1)x$$



аналогично
для верш
(KLF) и (KLF) II
и (верш)

$$SK^2 = 4R \cdot SF$$



∇ - центр. вене

$\sin \gamma$

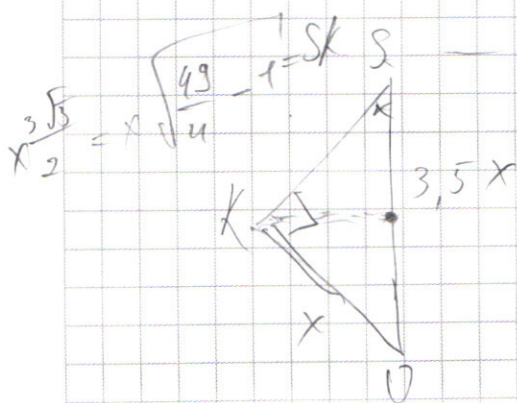
$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{b}{\sin \beta} = 2R$$

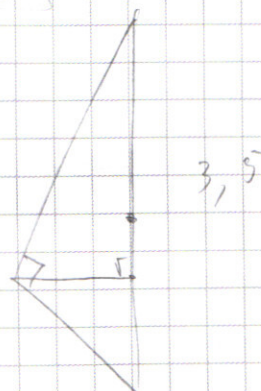
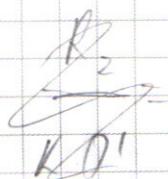
$$\sin \gamma \cdot \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot 4R_1^2 = S_1 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

$$\sin \beta \cdot 4R_2^2 = S_2$$

S_2



$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{3}$$



$$\frac{K'F}{K''F} = \frac{3}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{5 \cdot 4}{3!}$$

8 см.

6 482 7	3.
2 160 9	3.
2 203	3.
2 401	7
3 43	7
49	7
2	2

6 482 7 / 3

2 160 9

2 203

2 401

3 43

49

2

8 см.

1

на том же...

2 401 / 5

30

28

= 1

3 43 / 7

28

63

35

8

40

240

$\left(-\frac{x}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy)}$

$\ln(-y) \ln\left(-\frac{x}{y}\right) = 2 \ln x \cdot \ln(xy)$

$2 \ln y \ln x - \ln^2(-y) = 2 \ln^2 x + 2 \ln x \ln y$

$\frac{x^2}{y} < 0 \Rightarrow \begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$x > 0$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \cos 7x \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\sqrt{2} \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$(y+x)^2 - 3(x^2 + 12x + 36 - 36) = 0$$

$$(y+x)^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$2xy + y(y+4) - 3x(x-4) = 0$$

$$\cos(5x+2x) + \cos(5x-2x)$$

$$\sin(5x+2x) - \sin(5x-2x)$$

$$\sin 5x \cos 2x + \cos 5x \sin 2x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - 2(\sin 5x \cos 2x) + \sqrt{2} \cos 4x$$

$$1 - 2 \cos^2 2x$$

$$\sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x$$

$$\sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x$$

$$(x-8+8) + (x-y+8) = 16$$

$$(x-8)^2 + (y-15)^2 = a$$

$$2x=0$$

$$x=0$$

$$y = -x - 8$$

$$y = x + 8$$

$$-2y = 16$$

$$y = -8$$

$$y = 8$$

$$-2x = 32$$

$$x = -16$$

$$a \in 8; \sqrt{\dots}$$

