МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

© МФТИ, 2020

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

Произведение 8 цифр равно $64827 = 3^3 \cdot 7^4$, значит в таких числах цифры могут быть только 7, 9, 3, 1.

$3^3 = 9 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$, $7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$, тогда такие числа бывают 2-х видов: 1 - 4 семерки, 1 девятка, 1 тройка, 2 единицы

2 - 4 семерки, 3 тройки, 1 единица.

Чисел 1-го вида: $\frac{8!}{4!\,2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 120 \cdot 7$

Чисел 2-го вида: $\frac{8!}{4!\,3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 40 \cdot 7$

Откуда всего чисел: $120 \cdot 7 + 40 \cdot 7 = 160 \cdot 7 = 1120$

Ответ: 1120

Задача №2

$$\cos(7x) + \cos(3x) + \sin(7x) - \sin(3x) + \sqrt{2}\cos(4x) = 0$$

$$2 \cdot \cos(5x) \cdot \cos(2x) + 2 \cdot \cos(5x) \cdot \sin(2x) = -\sqrt{2}\cos(4x)$$

$$2\cos(5x)(\cos(2x) + \sin(2x)) = -\sqrt{2}(\cos^2(2x) - \sin^2(2x))$$

$$(\cos(2x) + \sin(2x))(2\cos(5x) + \sqrt{2}(\cos(2x) - \sin(2x))) = 0$$

$\cos(2x) + \sin(2x) = 0$ или $2\cos(5x) + \sqrt{2}\cos(2x) - \sqrt{2}\sin(2x) = 0$

$\operatorname{tg} 2x = -1$ $\qquad \cos(5x) + \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$

$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$ $\qquad 2\cos\left(\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$

$\cos\left(\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$ или $\cos\left(\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$

$x = \frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}l, l \in Z$ $\qquad x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}m, m \in Z.$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$ или $x = \frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}l$ или $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}m$, $m, l, k \in Z$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Задача № 3.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{-x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

О.Д.З. : $\begin{cases} y \neq 0 \\ y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$$y^2 + (2x+4)y - 3x^2 + 12x = 0$$

$$D = (2x+4)^2 + 4(3x^2 - 12x) = 16(x-1)^2$$

$$y = \frac{-2(x+2) \pm 4(x-1)}{2} = \left[\begin{matrix} x-4 \\ -3x \end{matrix}\right.$$

$$\frac{(x^7)^{\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} = x^{2\ln(xy^2)} \quad \Big| \cdot \frac{(-y)^{\ln(-y)}}{x^{2\ln(xy^2)}} \neq 0 \text{ по О.Д.З.}$$

$$x^{7\ln(-y) - 2\ln(xy^2)} = (-y)^{\ln(-y)}$$

1). $y = -3x$

$$x^{7\ln(3x) - 2\ln(x^3 \cdot 9)} = (3x)^{\ln(3x)}$$

$$(3x)^{\ln(3x)} = 3^{\ln(3x)} \cdot x^{\ln(3x)}$$

$$x^{6\ln(3x) - 2\ln(x^3 \cdot 9)} = 3^{\ln(3x)}$$

Прологарифмируем ~~обе~~ обе части по основанию 3.

$$(6\ln(3x) - 2\ln(x^3 \cdot 9)) \cdot \log_3 x = \ln(3x)$$

$$6\ln 3 \cdot \log_3 x + 6\ln x \cdot \log_3 x - 6\ln x \cdot \log_3 x - 4\ln 3 \cdot \log_3 x = \ln 3 + \ln x$$

$$2\ln 3 \cdot \log_3 x = \ln 3 + \ln x$$

$$\ln 3(2\log_3 x - 1) = \ln x$$

$$2\log_3 x - 1 = \log_3 x$$

$$\log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = -9.$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2). $y = x - 4$

$0 < x < 4$

$$x^{7\ln(4-x) - 2\ln(x(4-x)^2)} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$\underbrace{x^{3\ln(4-x) - 2\ln x}}_{>0} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$x \neq 3$ (нет. мет.) тогда прологарифмируем обе части по основанию $4-x$

$$(3\ln(4-x) - 2\ln x)\cdot \log_{4-x} x = \ln(4-x)$$

$$3\ln(4-x)\cdot\log_{4-x} x - 2\ln x \cdot \log_{4-x} x = \ln(4-x)$$

$$\ln(4-x)(3\log_{4-x} x - 1) = 2\ln x \cdot \log_{4-x} x \quad | : \ln(4-x)$$

$$3\log_{(4-x)}(x) - 1 = 2\log^2_{4-x} x$$

Пусть $t = \log_{4-x} x$, $t \geq 0$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$D = 1 \Rightarrow t = \frac{3 \pm 1}{4} = \left[\begin{array}{l} 1 = \log_{4-x} x \\ \frac{1}{2} = \log_{4-x} x \end{array}\right.$$

$\log_{4-x} x = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -2$

$\log_{4-x} x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4 - x = x^2 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \underset{\text{по О.Д.З.}}{\Rightarrow} x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{17} - 7}{2}$

Ответ: $(3; -9)$, $(2; -2)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-7}{2}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задание №7.

$$\begin{cases} y > 3^x + 4\cdot 3^{28} \\ y \le 93 + 3(3^{27}-1)x \end{cases}$$

$$3^x + 4\cdot3^{28} < y \le 93 + 3(3^{27}-1)x$$

$$3^x + 4\cdot 3^{28} < 93 + 3^{28}x - 3x$$ (иначе реш. нет)

$x = 4$: $$3^4 + 4\cdot 3^{28} < 93 + 4\cdot 3^{28} - 12$$

$81 < 81$ – неверно $\Rightarrow$ $x \geq 5$

(Представим $93 + 3(3^{27}-1)x$ как функцию, тогда

$y = 0$ при $x_0 = \frac{-31}{3^{27}-1}$ $\Rightarrow -1 < x_0 < 0$

$x = 0$ при $y_0 = 93$. А ~~не~~ функция $f(x) = 3^x + 4\cdot 3^{28}$ пересекает ось y в $y_0' = f(0) = 4\cdot 3^{28} + 1$ $\Rightarrow$ $y_0' > y_0$ $\Rightarrow$ минимальный x пересечения двух функций больше 0, а именно равен 5)

$x = 31$ $\Rightarrow$ $3^{31} + 4\cdot 3^{28} = 93 + 3^{28}\cdot 31 - 3\cdot 31$

$\cancel{3^{28}}$ $3^{31} + 3\cdot 31 = 3\cdot 31 + 3^{28}\cdot 27$ – верно $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $x \le 30$

Тогда кол-во решений будет: $$\sum_{x=5}^{30} (93 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4\cdot 3^{28}) =$$

$$= 93\cdot 26 - 4\cdot 26\cdot 3^{28} + 3^{28}\cdot\frac{5+30}{2}\cdot 26 - 3\cdot\frac{5+30}{2}\cdot 26 - \frac{3^5(3^{25}-1)}{2} =$$

$$= 2418 - 104\cdot 3^{28} + 3^{28}\cdot 455 - 3\cdot 455 - \frac{3^{30}-243}{2} =$$

$$= 1053 + 351\cdot 3^{28} - \frac{3^{30}-243}{2} = \frac{2106 + 243 + \cancel{702}\cdot 3^{28} - 9\cdot 3^{28}}{2} =$$

$$= \frac{2349 + \cancel{711}^{693}\cdot 3^{28}}{2}$$

Ответ: $\frac{2349 + \cancel{711}^{693}\cdot 3^{28}}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^{7\ln(-y)-2\ln(xy^2)}=(-y)^{\ln(-y)} \qquad y=\left[\begin{array}{l}x-4\\-3x\end{array}\right.$$

$y=-3x$

$$x^{7\ln(3x)-2\ln(x\cdot 9x^2)}=(3x)^{\ln(3x)} \qquad (3x)^{\ln(3x)}=3^{\ln(3x)}\cdot x^{\ln(3x)}$$

$$x^{7\ln(3x)-2\ln(x^3\cdot 9)-\ln(3x)}=3^{\ln(3x)}$$

$$x^{6\ln(3x)-2\ln(x^3\cdot 9)}=3^{\ln(3x)}$$

$$\log_3 x^{6\cdot\ln(3x)-2\ln(x^3\cdot 9)}=\ln(3x)$$

$$(6\ln(3x)-2\ln(x^3\cdot 9))\log_3 x=\ln(3x)$$

$$6\ln 3\cdot\log_3 x+6\ln x\cdot\log_3 x-6\ln x^{\cdot\log_3 x}-4\ln 3\cdot\log_3 x=\cancel{\ln(3x)}\ \ln 3+\ln x$$

$$\cancel{4\ln 3\cdot\log_3 x+3\ln x\cdot\log_3 x=\ln 3+\ln x}$$

$$2\ln 3\cdot\log_3 x=\ln(3x)$$

$$2\ln 3\cdot\log_3 x=\ln 3+\ln x$$

$$\ln 3(2\log_3 x-1)=\ln x$$

$$2\log_3 x-1=\frac{\ln x}{\ln 3}$$

$$2\log_3 x-1=\log_3 x$$

$$\log_3 x=1 \Rightarrow \underline{\underline{x=3}} \Rightarrow y=-9$$

$(3;-9)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$x^{7\ln(-y)-2\ln(xy^2)}=(-y)^{\ln(-y)} \qquad y=x-4$$

$$x^{7\ln(4-x)-2\ln(x(\cancel{x^2-8x+16}))} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$
$(\cancel{4-x})^2$

$$x^{7\ln(4-x)-2\ln x-4\ln(4-x)}=(4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$x^{3\ln(4-x)-2\ln x}=(4-x)^{\ln(4-x)}$$

$x\neq 4$
$x\neq 3$ >0

$$\log_{4-x} x^{3\ln(4-x)-2\ln x}=\ln(4-x)$$

$$(3\ln(4-x)-2\ln x)\log_{4-x}x=\ln(4-x)$$

$$3\ln(4-x)\cdot\log_{4-x}x-2\ln x\cdot\log_{4-x}x=\ln(4-x)$$

$$\ln(4-x)(3\log_{4-x}x-1)=2\ln x\cdot\log_{4-x}x \;\Big|:\ln(4-x)$$
$x\neq 3$

$$3\log_{4-x}x-1=2\frac{\ln x}{\ln(4-x)}\cdot\log_{4-x}x$$

$$3\log_{4-x}x-1=2\log^2_{4-x}x$$

$$2\log^2_{4-x}x-3\log_{4-x}x+1=0$$

$t=\log_{4-x}x$, $t\geq 0$

$(2;-2)$

$\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\ \frac{\sqrt{17}-7}{2}\right)$

$$2t^2-3t+1=0$$

$$D=9-4\cdot2\cdot1=9-8=1$$

$$t=\frac{3\pm1}{4}=\left[\begin{array}{l}1=\log_{4-x}x\\ \frac{1}{2}=\log_{4-x}x\end{array}\right.$$

$\log_{4-x}x=1 \Rightarrow 4-x=x \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=-2$

$\log_{4-x}x=\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{4-x}=x$

$4-x=x^2$ $\quad \cancel{x^2-4+x=0}$ $\quad x^2+x-4=0$

$\cancel{D=1+4}$ $\quad D=1+4\cdot4=17$

$y=\frac{-1+\sqrt{17}-8}{2}=\frac{\sqrt{17}-7}{2} \Leftarrow x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Leftarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\cos(5x)\cdot(\cos 2x + \sin 2x) = -\sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$

$2\cos(5x)(\cos 2x + \sin 2x) = -\sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$

$(\cos 2x + \sin 2x)(2\cos(5x) + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)) = 0$

$\cos 2x = -\sin 2x \,|: \cos 2x \neq 0$ $\vee$ $2\cos(5x) + \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x = 0$

~~cos x = sin x~~

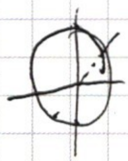
$\cos(5x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = 0$

$tg\, 2x = -1$

$\cos(5x) + \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$

$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

$2\cdot\cos\left(\frac{5x+2x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3x+\frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$



$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z$

$\cos\left(\frac{7x-\frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \vee \cos\left(\frac{3x+\frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$

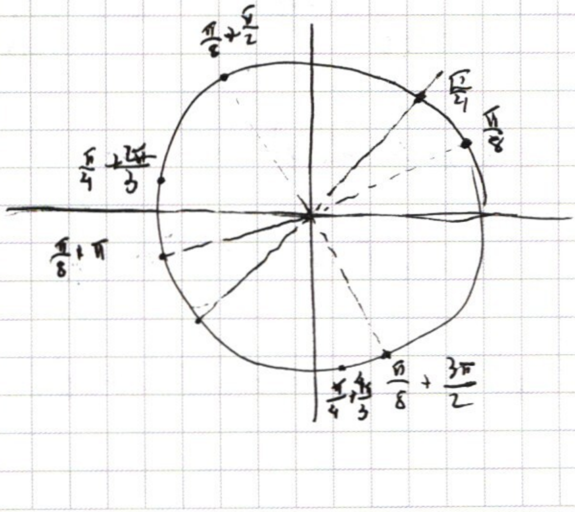
$\frac{3x+\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z$ $\vee$ $\frac{7x-\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi l,\ l \in Z$

$3x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi m$ $\qquad$ $7x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi l$

$3x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$ $\qquad$ $7x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi l$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}m$ $\qquad$ $x = \frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}l$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$ или $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}m$ или $x = \frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}l$; $k, m, l \in Z$.



$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k = \frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}l \,\Big|\cdot 7\cdot 8$ $\quad 56$

$\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}m = \frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}l \,\Big|$ $\quad 7\pi + 28\pi k = 10\pi + 16\pi l$

$28\cdot 3 = 4\cdot 7\cdot 3$

$21\pi + 56\pi m = 15\pi + 24\pi l$ $\qquad$ $28k = 16l + 3$

$56m = 24l - 6$ $\qquad$ $k = \frac{16l+3}{28}$ $\to$ пересеч. нет.

$m = \frac{24l-6}{56} = \frac{6(4l-1)}{56} = \frac{3(4l-1)}{28}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

$-y > 0 \Rightarrow y < 0$

$xy^2 > 0 \Rightarrow x > 0$

$\Rightarrow \cancel{(y+x)^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0}$

$\cancel{(y+x)^2 = 4x^2 - 12x + 4y}$

$\cancel{(y+x)^2 = 4(x^2 - 3x + y)}$

$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$

$y^2 + (2x+4)y - 3x^2 + 12x = 0$

$D = (2x+4)^2 + 4(3x^2 - 12x) = 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x =$

$= 16x^2 - 32x + 16 = 16(x^2 - 2x + 1) = 16(x-1)^2$

$y = \dfrac{-2(x+2) \pm 4(x-1)}{2} = \dfrac{-x-2 \pm 2x \mp 2}{} = \left[\begin{array}{l} x-4 \\ -3x \end{array}\right.$

$-x-2+2x-2 = x-4$

$-x-2-2x+2 = -3x$

$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = (y - x + 4)(y + 3x) = 0$

$\left[\begin{array}{l} y = x-4 \\ y = -3x \end{array}\right.$

$y = x - 4 \Rightarrow 0 < x < 4$

$\cancel{y = x-4}$

$\dfrac{(-x^7)^{\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} = x^{2\ln(xy^2)} \quad \Big|: x^{2\ln(xy)^2} \quad \cancel{\neq 0}$

$\cancel{\ln e^{(-y)^{\ln(-y)}}}$

$\ln(-y)^{\ln(-y)} = \ln^2(-y)$

$\cancel{(-1)^{\ln(-y)}} \cdot \dfrac{x^{7\ln(-y)}}{x^{2\ln(xy^2)}} = (-y)^{\ln(-y)}$

$\ln x^{7\ln(-y) - 2\ln(xy^2)} = (7\ln(-y) - 2\ln(xy^2)) \cdot \ln x$

$\cancel{(-1)^{\ln(-y)}} \cdot x^{7\ln(-y) - 2\ln(xy^2)} = (-y)^{\ln(-y)}$

$7\ln(-y) - 2\ln(xy^2) = 7\ln(-y) - 2\ln x - 2\ln y^2 =$

$2\ln y^2 = 4\ln|y|_{y<0} \Rightarrow 2\ln y^2 = 4\ln -y$

$= 7\ln(-y) - 4\ln(-y) - 2\ln x = 3\ln(-y) - 2\ln x = 3\ln(4-x) - 2\ln(x) =$

$=$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$

$\cancel{\sin\frac{\pi}{4} + \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{4}}$

$\cancel{\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = -1 = 2\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin -\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot -\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cdot\frac{2}{4} = 1}$

$64827 \quad n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$

$64827 = 9\cdot 7203 = 9\cdot 3\cdot 2401 = 9\cdot 3\cdot 7\cdot 343 = 9\cdot 3\cdot 7\cdot 7\cdot 49$

$10+8+9 = 18+9 = 27$

$64827 : 9 = 7203$; $7203 : 3 = 2401$; $2401 : 7 = 343$; $343 : 7 = 49$

$64827 = 3^3\cdot 7^4 \Rightarrow 4$ семерки.

нет $0, 2, 4, 6, 8$ (нет четных)

7^4: 4 семерки

3^3: $3\cdot 9$; $3\cdot 3\cdot 3$

$\Rightarrow n = \left[\begin{array}{l} 77773911 \text{ и все перестановки (1)} \\ 77773331 \text{ и все перестановки (2)} \end{array}\right.$

(1): $\frac{8!}{4!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2} = 30\cdot 7\cdot 4$

(2): $\frac{8!}{4!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3} = 40\cdot 7$

$\Rightarrow N = 120\cdot 7 + 40\cdot 7 = 160\cdot 7 = \underline{\underline{1120}}$

$160\cdot 7 = 1120$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cdot\cos\frac{7x+3x}{2}\cdot\cos\frac{7x-3x}{2} + 2\cdot\cos\frac{7x+3x}{2}\cdot\sin\frac{7x-3x}{2} = -\sqrt{2}\cos 4x$

$2\cdot\cos 5x\cdot\cos 2x + 2\cdot\cos 5x\cdot\sin 2x = -\sqrt{2}\cos 4x$

$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) = -\sqrt{2}\cos 4x$

$\cancel{2\cos 5x(1 - 2\cos^2 x)}$

$\cancel{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x}$

$2\cos^2 x - 1$

~~cos~~ cos

$\cancel{\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x = 2\cdot\sqrt{1-\cos^2 x}\cos x}$

$\cancel{\cos^2 x - \sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\cos x = \cos^2 x + \sin x(2\cos x - \sin x)}$

$2\cos(5x)\cdot\cos^2 x - 2\cos(5x)\cdot\sin^2 x + 4\cdot\cos(5x)\cdot\sin x\cdot\cos x =$

$\boxed{:\cos 5x \neq 0}$

$= -\sqrt{2}\cos^2 2x + \sqrt{2}\sin^2 2x \quad |:\cos 5x$

$\cos(5x - x) = \cos(5x)\cdot\cos x) +$

$+ \sin 5x\cdot\sin x$

$2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x = -\sqrt{2}\cdot\cos x + \operatorname{tg} 5x\cdot\sin x$

$2\cos^2 x + 2\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x = 4\sin^2 x - \sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\operatorname{tg} 5x\cdot\sin x$

$2(\cos x + \sin x)^2 = 4\sin^2 x - \sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\operatorname{tg} 5x\cdot\sin x$

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0 \quad |\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x +}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x = -\cos 4x$

$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) = -\cos 4x$

$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

$\cos(5x)(\cos 2x + \sin 2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos^2 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2 2x$

~~cos~~ $\cos 2x(\cos(5x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x) + \sin 2x(\cos(5x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

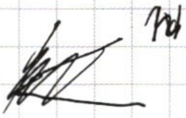
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y > 3^x + 4\cdot 3^{28}$

$y \le 93 + 3(3^{27} - 1)x$

$(3^9+1)(3^{18} + 3^9 + 1)$



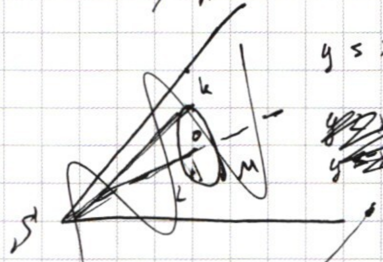
$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$

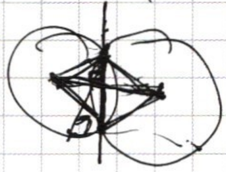
$(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$

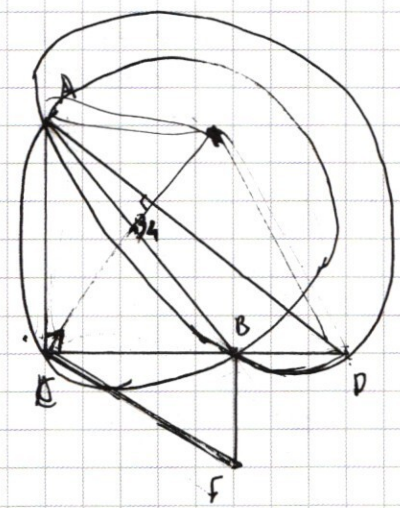
$x+y+8=0$

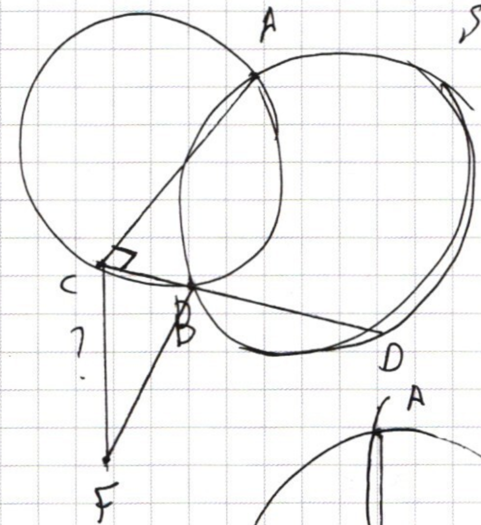
$y = -x-8$

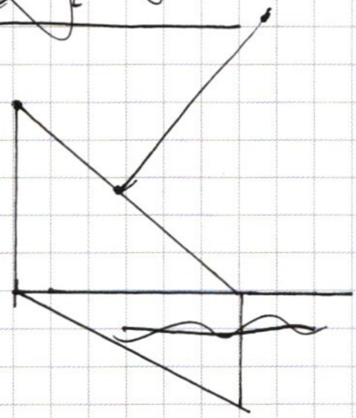
$y = x+8$

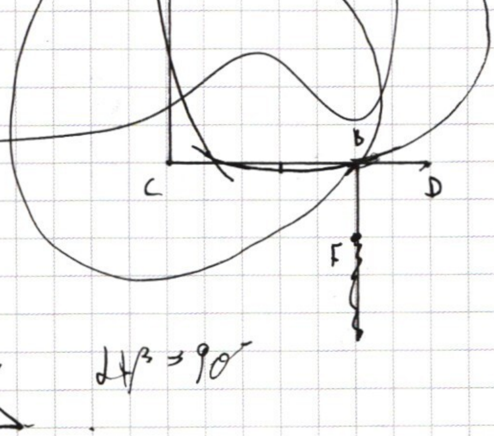






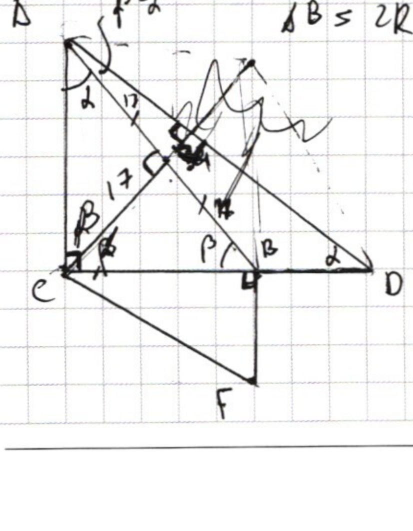


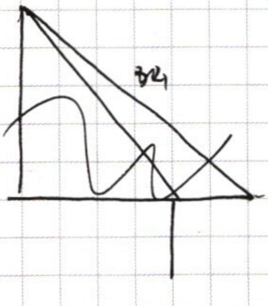




$\frac{AB}{\sin 90} = 2R$

$AB = 2R = 34$





$\angle\alpha+\beta = 90^\circ$

$y > 3^x + 4\cdot 3^{28}$ $\quad x=0 \quad y\le 93 \quad x = \frac{-31}{3^{27}-1} \quad (3^{28}-3)x = -93 \quad (3^{28}-1)x = 31$

$y \le 93 + 3(3^{27}-1)x$

$3^x + 4\cdot 3^{28} < y \le 93 + 3(3^{27}-1)x$ $\quad 1860$

$3^x + 4\cdot 3^{28} < 93 + 3(3^{27}-1)x$

$3^x + 4\cdot 3^{28} < 93 + 3^{28}x - 3x$

$3^x + 3x < 93 + 3^{28}(x-4)$

$0 < x < 4 \Rightarrow 93 + 3^{28} < 0$

$3^x + 3x > 0$

$3^{28} + 3\cdot 28 < 93\cdot 3^{28}\cdot 24$

$3^{29} + 3\cdot 29 < 3\cdot 31 + 3^{28}\cdot 25$

$3^{30} + 3\cdot 30 < 3\cdot 31 + 3^{28}\cdot 26$

$3^{31} + 3\cdot 31 \ge 3\cdot 31 + 3^{28}\cdot 27 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < 31$

$x \le 30$

$3^3 = 27 \quad 3^4 = 81 \quad 3^5 = 243$

$35\times 13 = 455$; $35\times 3 = 105$; $105 \times 13 = 1365$; $93\times 26 = 2418$; $455\times 3 = 1365$; $2418 - 1365 = 1053$

$x < 0$

$x = -x_0$ $\quad 455 - 104 = 351$

$\frac{1}{3^{x_0}} - 3x_0 < 93 - 3^{28}(x_0+4)$

$3^5(1-3^{25})$

$x = 0 \quad 1 < 93 - 3^{28}\cdot 4$ – неверно $\Rightarrow$ $26\times 4 = 104$

$\Rightarrow \cancel{x \in [4;}$

$35\cdot 13$

$x < 4$

$5 \le x \le 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{x=5}^{30} 93 + 3^{28}x - 3x - 3^x$

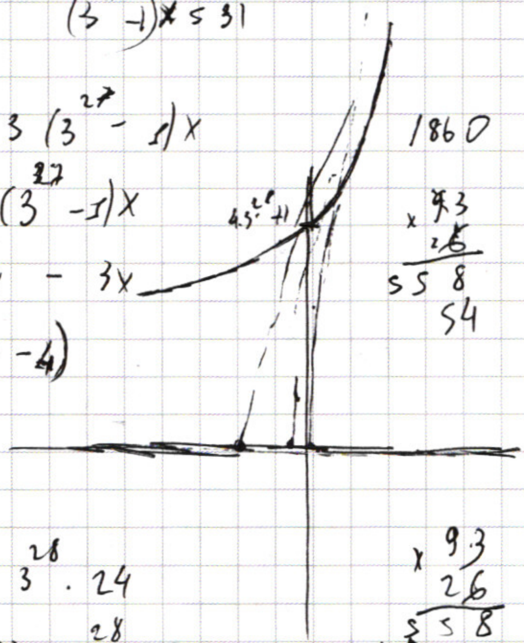
$\sum_{5}^{30} 3^x + 4\cdot 3^{28} = 26\cdot 4\cdot 3^{28} + \sum_{5}^{30} 3^x$

$\sum_{5}^{30} 93 + 3\cdot(3^{27}-1)x = 93\cdot 26 + \sum_{5}^{30} 3^{28}x - 3x = \sum_{x=5}^{30} 93 + 3(3^{27}-1)x - 3^x - 4\cdot 3^{28}$

$= 93\cdot 26 - 3\cdot\frac{5+30}{2}\cdot 26 + \sum_{5}^{30} 3^{28}x <$ $\quad 3\cdot 31 + 3^{28} - 3x - 3^x - 4\cdot 3^{28}$

$= 93\cdot 26 - 3\cdot 35\cdot 13 + \sum_{5}^{30} 3^{28}x$ $\quad \Rightarrow \cancel{S} N = -104\cdot 3^{28} + \sum_{5}^{30} 3^x + 93\cdot 26 - 2365 + \sum_{5}^{30} 3^{28}x$

$= -104\cdot 3^{28} + \sum_{5}^{30}\cdot 3^x +$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)