

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Заметим, что $64827 = 3^3 \cdot 7^4$

тогда возьмем 2 варианта выбора базисных чисел:

составим из цифр $\{1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7\}$ или составим

из цифр $\{1, 1, 9, 7, 7, 7, 7, 3\}$

чисел из цифр первой группы: $\frac{8!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 280$

или из цифр второй группы: $\frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 840$

$\Rightarrow$ всего $280 + 840 = 1120$

Ответ. 1120

№2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos(4x) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + \sqrt{2} \cos(4x) = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + \cos(4x) = 0$$

пусть $7x + \frac{\pi}{4} = \alpha$, $\frac{\pi}{4} - 3x = \beta$, тогда

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \cos\left(-\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta)\right) = 0$$

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\alpha + \beta) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0 \\ \cos \alpha = 0 \\ \cos \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 & (1) \\ \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 & (2) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} - 3x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$3x = -\frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ.

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z}$$

№3

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)} \quad (1)$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \quad (2)$$

$$(2) \quad y^2 + 2y(x+2) + 12x - 3x^2 = 0 \quad \text{кв-е уравнение относительно } y$$

$$\frac{D}{4} = (x+2)^2 - (12x - 3x^2) = 4x^2 - 8x + 4 = 4(x^2 - 2x + 1) = 4(x-1)^2$$

$$y = \cancel{x+2} = x+2 \pm 2|x-1| \Rightarrow \begin{cases} y = -3x \\ y = x-4 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 случай

$$y = -3x$$

$$\left(\frac{x^7}{3x}\right)^{\ln(3x)} = (x^2)^{\ln(9x^3)} \quad x > 0, \text{ прологарифмируем обе части}$$

$$\ln(3x) \cdot \ln\left(\frac{x^6}{3}\right) = \ln(x^2) \cdot \ln(9x^3)$$

пусть $\ln(x) = a$, $\ln(3) = b$

$$(a+b) \cdot (6a-b) = 2a \cdot (2b+3a)$$

$$6a^2 + 6ab - ab - b^2 = 4ab + 6a^2$$

$$ab - b^2 = 0$$

$$b(a-b) = 0$$

$$a-b = 0$$

$$b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln 3 = \ln x \Rightarrow x = 3 \\ \ln 3 = 0 - \text{не может быть} \end{cases}$$

2 случай

$$y = (x-4)$$

$$\left(\frac{x^7}{(4-x)}\right)^{\ln(4-x)} = (x^2)^{\ln(x(4-x)^2)} \quad x > 0, \text{ прологарифмируем обе части}$$

$$\ln(4-x) \cdot \ln\left(\frac{x^7}{4-x}\right) = \ln(x^2) \cdot \ln(x(4-x)^2)$$

пусть $\ln(4-x) = b$, $\ln x = a$

$$b \cdot (7a - b) = 2a \cdot (a + 2b)$$

$$7ab - b^2 = 2a^2 + 4ab$$

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$(a-b)(2a-b) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=b & (1) \\ 2a=b & (2) \end{cases}$$

$$(1) \ln(x) = \ln(4-x)$$

$$x = 4-x$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$(2) 2 \ln(x) = \ln(4-x)$$

$$x^2 = 4-x$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \text{ не подходит, т.к. } x > 0 \\ x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} - 4 = \frac{\sqrt{17} - 9}{2} \end{cases}$$

Ответ.

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17} - 9}{2} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

рассмотрим ур-е (1) рассмотрим модули в 4-х углах

$$1) \begin{cases} x+y \geq -8 \\ x-y \geq -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \text{здесь прямую } x=0 \text{ при } y \text{ от } -8 \text{ до } 8 \text{ включительно}$$

$$2) \begin{cases} x+y \leq -8 \\ x-y \leq -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=-32 \\ x=-16 \end{cases} \Rightarrow \text{прямая } x=-16 \text{ при } y \text{ от } -8 \text{ до } 8 \text{ включительно}$$

$$3) \begin{cases} x+y \geq -8 \\ x-y \leq -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=16 \\ y=8 \end{cases} \Rightarrow \text{прямая } y=8 \text{ при } x \text{ от } -16 \text{ до } 0 \text{ включительно}$$

$$4) \begin{cases} x+y \leq -8 \\ x-y \geq -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=-16 \\ y=-8 \end{cases} \Rightarrow \text{прямая } y=-8 \text{ при } x \text{ от } -16 \text{ до } 0 \text{ включительно}$$

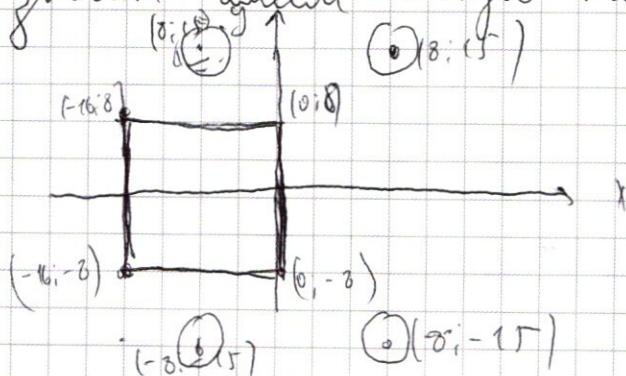
значит (1) задает 4 отрезка на плоскости

рассмотрим ур-е (2) —

оно задает 4 окружности в центрах в точках

$(0; 15)$, $(-8; -15)$, $(8; -15)$, $(-8; 15)$ и радиусом $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$)

значит целиком такую картинку:



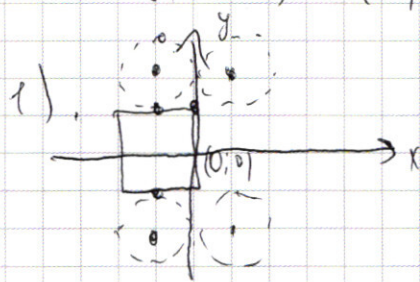
тогда решившие систему
это точки пересечения
4 отрезков и 4-х окружностей

тогда возможны случаи, когда будет всего 2 точки пересечения:

- 1) окр-ты с ~~на~~ центрами $(-8; 15)$ и $(8; -15)$ касаются "квадрата"
- 2) окр-ты с центрами $(8; 15)$ и $(8; -15)$ касаются квадрата в точке $(0; 8)$ и $(0; -8)$ соответственно
- 3) т.к. окр-ты с центрами $(-8; 15)$ и $(-8; -15)$ никогда не пересекут квадрат 0,1 или 2 раза, то возможны случаи, это касание из п.1)

или пересекать в 2-х одинаковых точках

- 4) квадрат внутренним образом касается окр-тей с центрами $(-8; 15)$ и $(8; -15)$

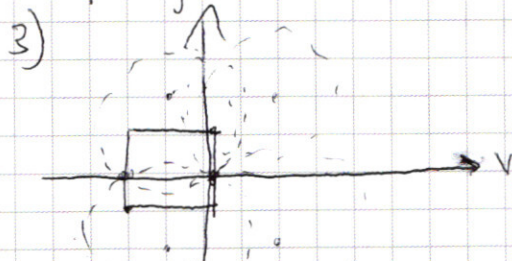


касание происходит с 2-х сторон при $r = 7$, расстояние от $(8; 15)$ и $(8; -15)$ до ближайшей точки квадрата > 7 , значит при $r = 7$, т.е. $a = 49$ - 2 решения

2) $r = \sqrt{8^2 + 7^2} = \sqrt{64 + 49} = \sqrt{113}$ $10 < \sqrt{113} < 11$

но заметим, что при таком радиусе окр-ты с центрами $(-8; 15)$ и $(-8; -15)$ могут пересекать квадрат $\Rightarrow$ будет больше

2 решений



т.к. центры $(-8; 15)$ и $(8; 15)$ симметричны

относительно оси Ox , то этот случай возможен,

поскольку если окр-ты пересекут квадрат

в точках $(0; 0)$ и $(-16; 0)$, то тогда $r = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$

тогда окр-та с центром $(8; 15)$ пересечет квадрат

в не менее одной точке (пересекает в $(0; 0)$ и это не касание $\Rightarrow$

еще пересечет и в точке $(-16; 0)$ $\Rightarrow$ 2 решения

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

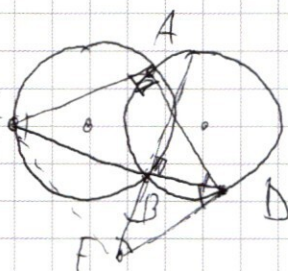
4) $r = \sqrt{24^2 + 23^2} = \sqrt{1105}$, никакая из окружностей с центрами $(-8; 15)$ и $(-8; -15)$ не будет пересекать квадрат, а другие две будут пересекать квадрат в точках $(-16; 8)$ и $(-16; -8)$ — 2 точки

знаем $\alpha = 1105$

Ответ: $\alpha = 49$, $\alpha = 1105$

✓ 6

а)



1) $\angle ACD = \angle AED$ т.к. они опираются

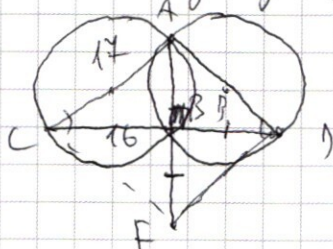
на дугу $AB \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$

2) FD — диаметр $\Rightarrow \angle FDB = \frac{1}{2} \angle BD = 2 \angle BAD = 45^\circ$
 $\Rightarrow AB$ — биссектриса $\angle ACD$ по т.к. $\angle FDB = \angle BDF = \frac{50^\circ}{2} = 45^\circ$

$\angle ACD = \angle ADC$, но AB тангенс и хорда по св-ву равенств.

кр-ка, и т.к. через одну точку можно провести 2 перпендикуляра — AB — их общий перпендикуляр

2)



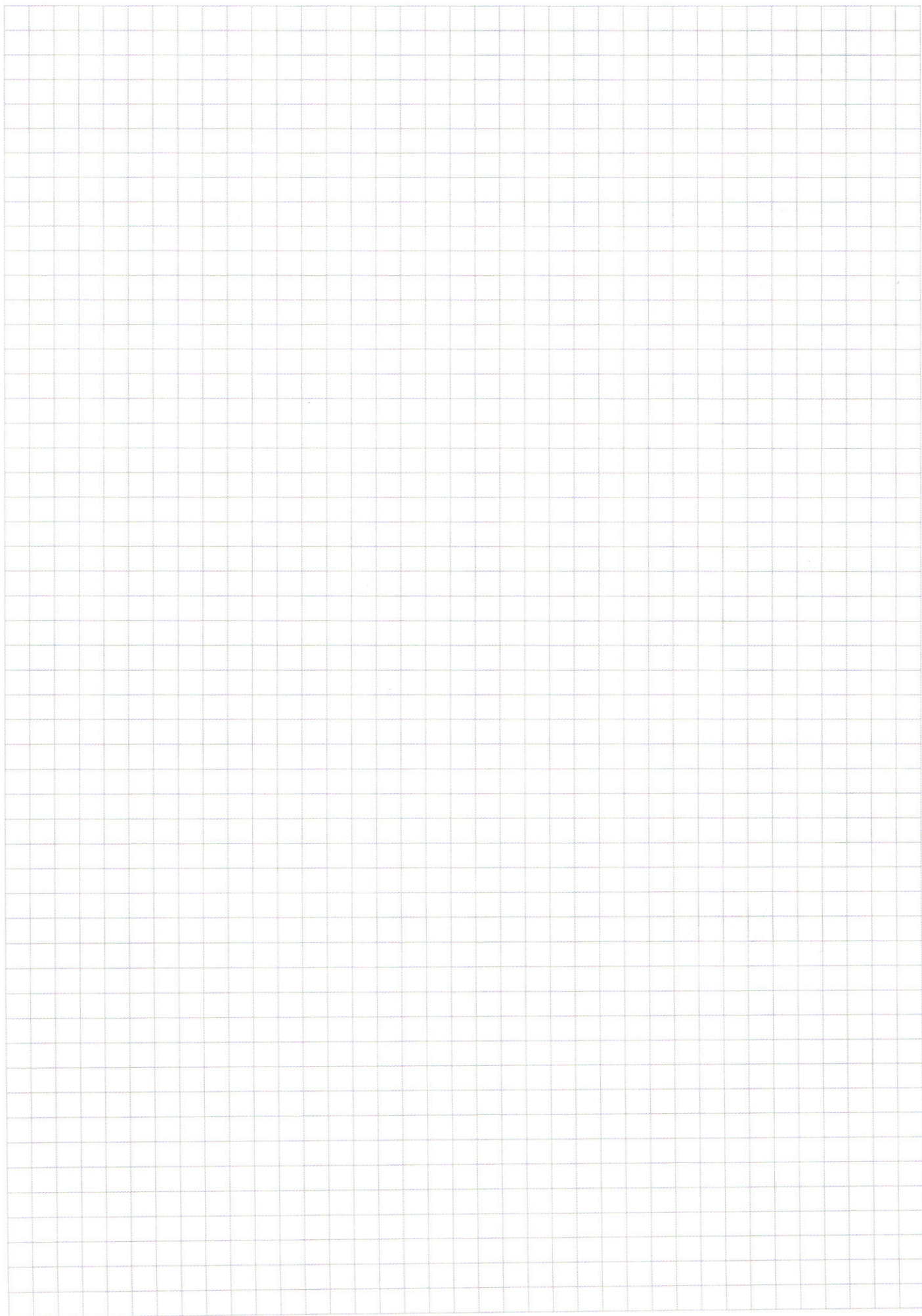
заменим, что $\angle ADB = 90^\circ \Rightarrow$ опирается на диаметр $\Rightarrow AD = 34$

также заменим, что $ADFC$ — ромб $\Rightarrow CF = AD = 34$
Ответ: а) 34

б) $S_{ACF} = ?$ если $BC = 16$, то по т. Пифагора $AB = \sqrt{17^2 + 16^2} = \sqrt{53}$

$$= S_{AF} = \frac{1}{2} \sqrt{53} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{53} = 16\sqrt{53}$$

Ответ: б) $16\sqrt{53}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) y = x - 4$$

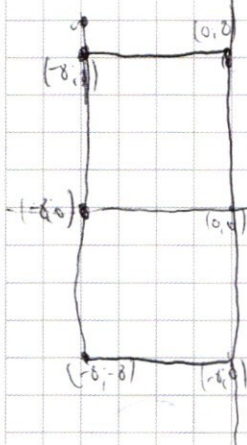
$$L_y = 3x \quad (1)$$

$$\binom{7}{3} \ln(3\lambda) = \cancel{\times} 2 \ln(9\lambda^3)$$

$$1_n 3 + 1_n |x|$$

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(3)



$$-2x = 16$$

$q_v = 0$

$$2x^2 - 16$$

24-0

$$2y = 16$$

$$-2y = -16$$

$$(x^2)^3 = x^6$$

2.2

$$1_n(4-x)$$

$$= x^2 \ln(x(x-4)^2)$$

$$\ln(4-x) \cdot \ln\left(\frac{x^2}{4-x}\right) = \ln(x^2) \cdot \ln(x(4-x))$$

$$\ln(1-x) = 0, \quad \ln x = 0$$

$$b. (7a - b) = 2a \cdot (a + 2b)$$

$$7ab - b^2 = 2a^2 + 4ab$$

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$(a-b)(2a-b)$$

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

$$\ln 3x = \frac{\ln x^3}{\ln x^2}$$

$$\ln\left(\frac{x^7}{3}\right) = \ln(3x) \equiv \ln(g_{x^3}) \cdot \ln(x^2)$$

$$(2 \ln x - \ln 3) \cdot (\ln 3 + \ln x)$$

$$= (2 \ln 3 + 3 \ln x) (2 \ln x)$$

$$\ln x = \theta$$

$$\ln 3 = 6$$

$$(7a - b)(b + a) = (1b + 3a)(2a)$$

$$7ab - b^2 + 7a^2 - ab = 4ab + 6a^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 0$$

$$J = b^2 + b^2 = 2b^2$$

$$\ln x = -\ln 3 \pm \ln 3\sqrt{2}$$

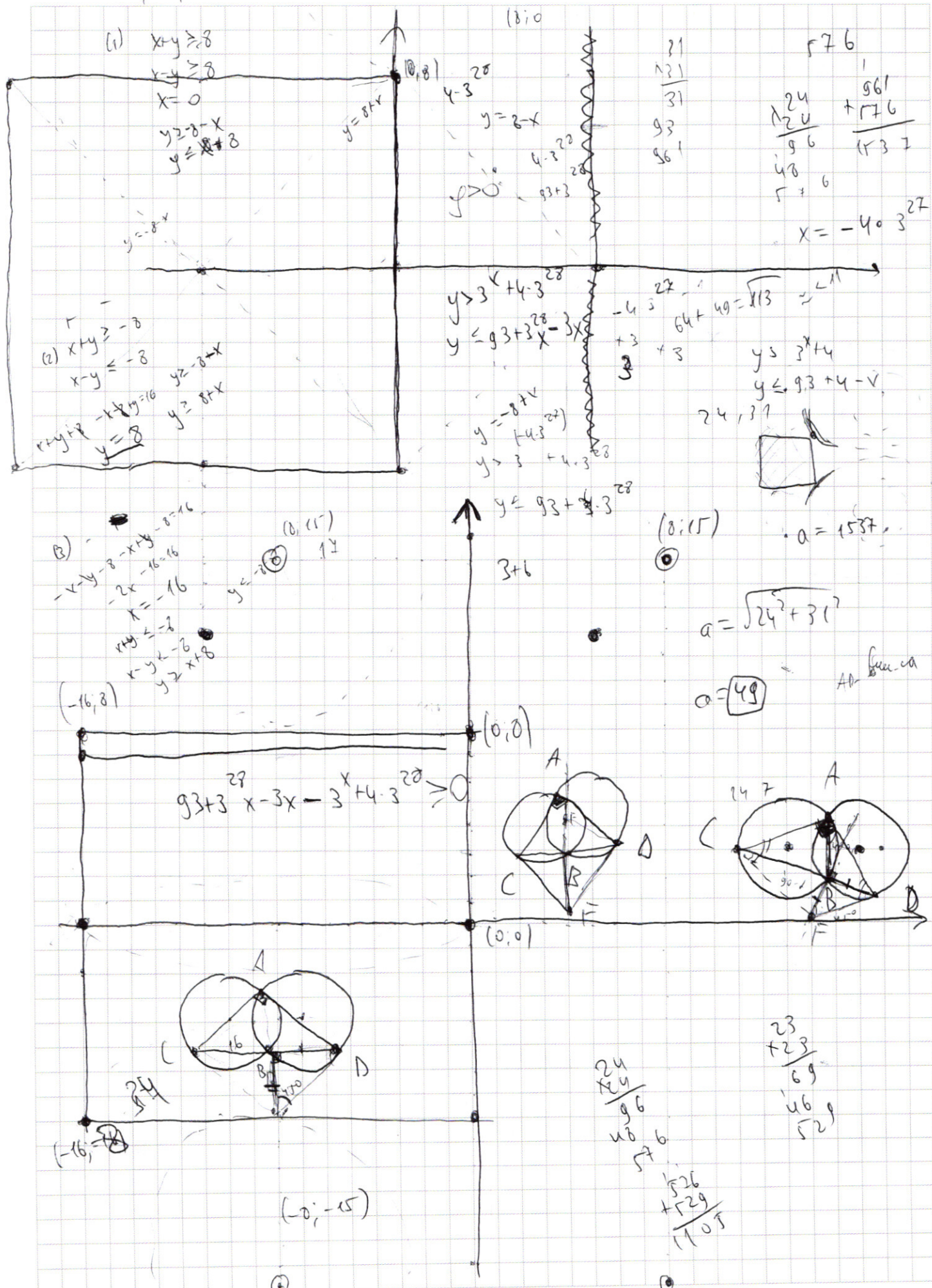
$$\ln x = -\ln 3 - \ln 3\sqrt{2} \text{ co}$$

$$L_{\ln x} = \sqrt{2}(\ln 3) - \ln 3$$

$$\ln\left(\frac{3^{\sqrt{2}}}{3}\right) = \ln\left(\frac{3^{\sqrt{2}-1}}{3^{\sqrt{2}-1}}\right)$$

$x = 3$

$$\begin{cases} a = b \\ a = \frac{b}{2} \end{cases}$$

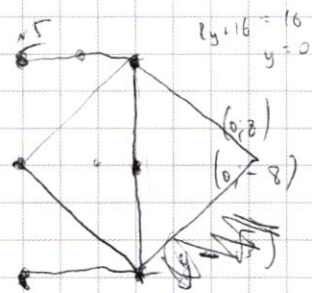


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten calculations on grid paper:

$64827 \div 7203 = 9$
 90307
 $7203 \div 3 = 2401$
 $2401 \div 7 = 343$
 $343 \div 7 = 49$
 $49 \div 7 = 7$
 $64827 = 3^3 \cdot 7^4$
 $13337777 = \frac{8!}{4!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 280$
 $91177773 = \frac{8!}{4!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 64027$
 $80 \cdot 18 = 1440$
 $1440 + 280 = 1720$

⑦ $\sqrt{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$
 $\sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) = 2 \sin(\frac{\pi}{4} + 2x) \cos(5x)$
 $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
 $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
 $\sqrt{2} \cos(7x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} + 3x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$
 $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
 $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$



$$4y + (4-y) = 16$$

$$(y+x)^2 - 4x^2 + 12x + 4y - 4(x^2 - 3x + y)$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

√2

$$\sqrt{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \cos(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\sin(\frac{\alpha + \beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha - \beta}{2}) + \sin(\alpha + \beta)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\alpha = 7x + \frac{\pi}{4}$$

$$\beta = \frac{\pi}{4} - 3x$$

$$2 \sin(\frac{\alpha + \beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha - \beta}{2}) = 0$$

$$|8y| + |9-y| = 16$$

$$\sin(\frac{\alpha + \beta}{2}) = 0$$

$$\sin(4x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{0} = 2$$

$$2 \sin(\frac{\alpha + \beta}{2}) (\cos(\frac{\alpha - \beta}{2}) + \cos(\frac{\alpha + \beta}{2})) = 0$$

$$4 \sin(\frac{\alpha + \beta}{2}) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = 0$$

$$1 + 1 = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$(x^2) (y^2)$$

$$(x^2) (\ln x + \ln y^2)$$

$$(y+2)^2 - 4 = 3(x-2)^2 + 12 + 2xy = 0$$

$$(y+2)^2 = 3(x-2)^2 + 8 + 2xy = 0$$

$$x > 0$$

$$y + 6y - 19 = 0$$

$$y = 3$$

$$y^2 + 2y(x+2) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$= (x+2)^2 - (-3x^2 + 12x) = 4x^2 - 8x + 4$$

$$y - 4y = 0$$

$$y(y-4) = 0$$

$$y = 0$$

$$9 + 6x - 3x^2 = 0$$

$$-3 - 3x^2 + 18x = 0$$

$$x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$y = \frac{-2-x \pm \sqrt{4-x^2}}{2}$$

$$= -\frac{3}{4} \sqrt{x-4}$$

$$y = \frac{-2-x \pm \sqrt{4-x^2}}{2}$$

$$-3x$$