

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$$\cos 4x + \cos 3x + \sin 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad | \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \cos 5x (\cos(\frac{\pi}{4} - 2x)) + \sin(\frac{\pi}{2} - 4x) = 0$$

$$2 \cos 5x \cos(\frac{\pi}{4} - 2x) + 2 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) \cos(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$$

$$2 \cos(\frac{\pi}{4} - 2x) (\cos 5x + \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \end{cases}$$

$$\leftarrow \frac{\pi}{4} - 2x = \frac{\pi}{2} + \pi T, T \in \mathbb{Z}$$

$$-2x = \frac{\pi}{4} + \pi T, T \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi T}{2}, T \in \mathbb{Z}$$

$$* \cos 5x + \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$$

$$*: \sin(\frac{\pi}{2} - 5x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - 5x = 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - 5x = \pi - 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}, k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} -7x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}, k, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi T}{2}$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k, T, k, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi n$$

1

$$64224 \pm 3 \cdot 21609 = 3^2 \cdot 4203 = 3^3 \cdot 2401 = 3^3 \cdot 4 \cdot 843 = 3^3 \cdot 4^4$$

Количество всех перестановок $8!$

Без повторов $\frac{8!}{3! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 280$

Ответ: 280

$$3. \left(-\frac{x^4}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} y \neq 0 \\ y < 0 \\ xy^2 > 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 + y(2x+4) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$D_1 = (x+2)^2 + 3x^2 - 12x = x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x = 4x^2 - 8x + 4 = 4(x-1)^2$$

$$y = -x - 2 \pm 2|x-1|$$

$$1) y = x - 4$$

$$2) y = -3x$$

$$2) \left(\frac{x^4}{-3x}\right)^{\ln 3x} = x^{2 \ln 9x^3} \cdot 3^{\ln 3x} \neq 0$$

$$x^{6 \ln 3x} = x^{2 \ln 9x^3} \cdot 3^{\ln 3x} \quad | : x^{2 \ln 9x^3} \neq 0$$

$$x^{6 \ln 3x - 2 \ln 9x^3} = 3^{\ln 3x} \cdot 3^{\ln x}$$

$$x^{6 \ln 3x - 2 \ln 9x^3} = 3^{\ln 3x} \cdot 3^{\ln x} \quad | : x^{\ln 3} \neq 0$$

$$x^{6 \ln 3x - 4 \ln 3x} = x^{2 \ln x} \cdot 3^{\ln 3x}$$

$$x^{2 \ln 3x} = x^{2 \ln x} \cdot 3^{\ln 3x} \quad | : x^{2 \ln 3x} \neq 0$$

$$x^{2 \ln x} = x^{2 \ln x} \cdot 3^{\ln 3x} \quad | : x^{2 \ln x} \neq 0$$

$$x^{\ln 3} = 3^{\ln x} \quad | : x^{\ln 3} (= 3^{\ln x}) \neq 0$$

$$x^{\ln 3} = 3^{\ln x}$$

$$x = 3$$

$$y = -9$$

$$1) y = x - 4, \quad y < 0 \Rightarrow x - 4 < 0 \Rightarrow x < 4$$

$$\left(\frac{x^4}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2 \ln(x(4-x)^2)}$$

$$x^{4 \ln 4-x} = x^{2 \ln x} \cdot x^{4 \ln(4-x)} \cdot (4-x)^{\ln 4-x} \quad | : x^{4 \ln(4-x)} \neq 0$$

$$x^{3 \ln 4-x} = x^{2 \ln x} \cdot (4-x)^{\ln 4-x}$$

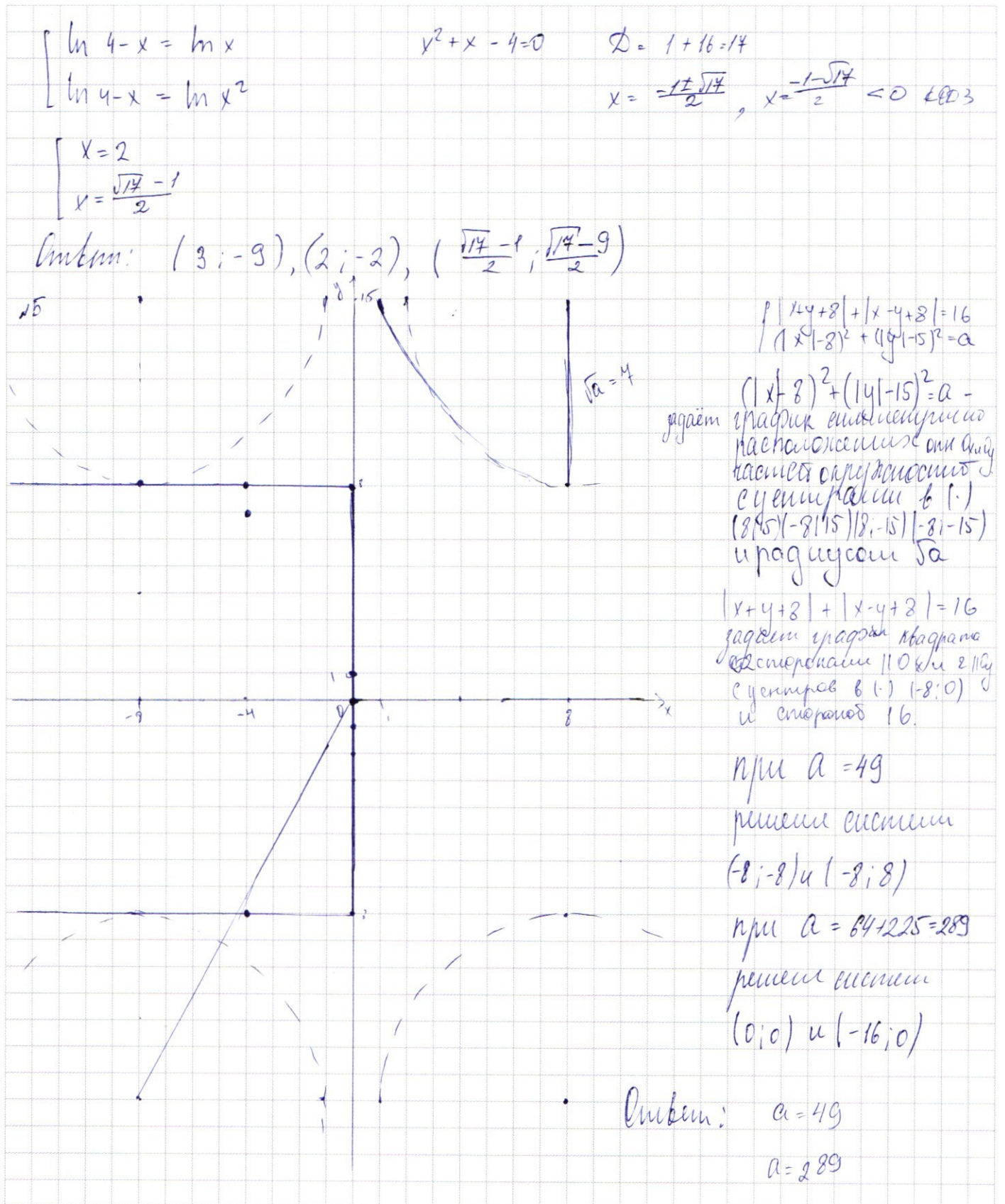
Логарифмируем уравнение по основанию e

$$\ln x^3 \cdot \ln 4-x = \ln x \cdot \ln x^2 + \ln^2(4-x)$$

$$\ln^2(4-x) - 3 \ln x \ln(4-x) + 2 \ln^2 x = 0$$

$$(\ln(4-x) - \ln x)(\ln 4-x - 2 \ln x) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$1) S = \frac{abc}{4R} \quad S = \frac{1}{2} h \cdot a$$

$$S_1 = \frac{CA \cdot BA \cdot BC}{4R} = \frac{1}{2} h \cdot CB$$

$$S_2 = \frac{AB \cdot BD \cdot DA}{4R} = \frac{1}{2} h \cdot BD$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{CA \cdot BC}{BD \cdot DA} = \frac{CB}{BD} = n$$

$$S_1 + S_2 = \frac{AB}{4R} (CA \cdot BC + AD \cdot BD)$$

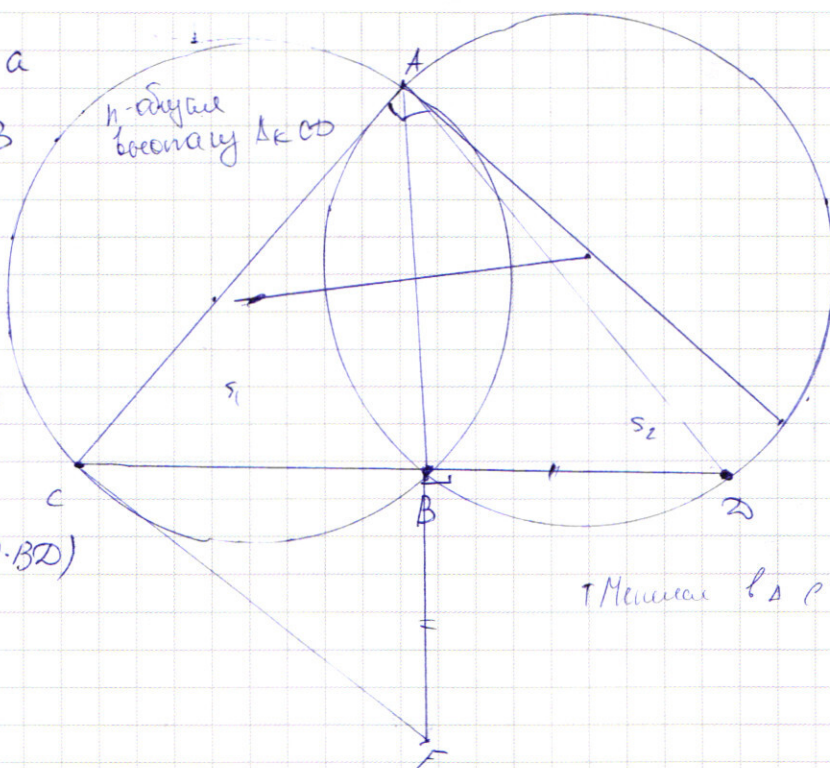
$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} CA \cdot AD$$

$$2R \cdot CA \cdot AD = AB (CA \cdot BC + AD \cdot BD)$$

$$2R = AB \left(\frac{BC}{AD} + \frac{BD}{CA} \right)$$

$$2R = AB \left(\frac{BD}{CA} \cdot n + \frac{BD}{CA} \right)$$

$$2R = \frac{AB \cdot BD}{CA} (n+1)$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(-\frac{x^4}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$x^{4+\ln(-y)} = x^{\ln x^2 + \ln y^4} \cdot y^{\ln(-y)}$$

$$x^{4+\ln(-y)-\ln x^2-\ln y^4} = -y^{\ln(-y)}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 + y(2x+4) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$\Delta = 4x^2 + 16x + 16$$

$$\Delta_1 = x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x = 4x^2 - 8x + 4 = 4(x-1)^2$$

$$y = -2x \quad -x - 2 + 2|x-1|$$

$$y = -x - 2 - 2|x-1|$$

$$1) y = -3x$$

$$\left(\frac{x^4}{3x}\right)^{\ln 3x} = x^2 \ln 9x^3$$

$$\cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x$$

$$\cos 3x + 2 \sin 4x \cos 3x$$

$$\frac{1}{T} \dots$$

$$\frac{\cos 4x}{\cos 3x + \sin 3x \sqrt{2}} = \sin 3x / \sin 4x$$

$$\frac{\cos 3x}{\cos 4x + \sin 4x} + \frac{\cos 3x}{\cos 4x + \sin 4x} - \frac{\sin 3x}{\cos 4x + \sin 4x}$$

$$\ln x^3 \ln(4-x) = \ln x^2 \ln x + \ln(4-x)^2$$

$$2 \ln^2 x + \ln x \ln(4-x) + \ln(4-x)^2$$

$$\ln(4-x) = -1 \cdot 2x^2 + 4x$$

$$\ln(4-x) = -1 \cdot 2x^2 + 4x$$

$$x^2 - xy - 2xy^2 = x^2 - 3xy + 2y^2 = (x-y)(x-2y)$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x \quad 2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x)$$

$$\sin 4x - \sin 3x = 2 \sin 2x \cos 5x \quad \sqrt{2} \cos 4x =$$

$$2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad / \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 5x \cdot \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x \cdot \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{2} - 4x) = 0$$

$$\cos 5x \cdot \sin(\frac{\pi}{4} + 2x) + 2 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) \cos(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$$

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) / (\cos 5x + 2 \sin(\frac{\pi}{4} - x)) = 0$$

$$\cos 5x + 2 \sin(\frac{\pi}{4} - x) = 0$$

$$\cos 5x + 2 (\sin \frac{\pi}{4} \cos x - \cos \frac{\pi}{4} \sin x) = 0$$

$$\cos 5x + \sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x = 0$$

$$\cos x (\cos 4x + \sqrt{2}) - \sin x (\sin 4x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\cos 4x + \cos 3x + \sin 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos(\frac{\pi}{4} - 2x) + 2 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) \cos(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} - 2x) (\cos 5x + \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)) = 0$$

$$\cos x \cos 4x - \sin x \sin 4x + \sin \frac{\pi}{4} - 2x = 0$$

$$\cos x \cdot 2 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) \cos(\frac{\pi}{4} - 2x) - \sin x \sin 4x - \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$$

$$\cos 5x + \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \sin 2x \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\cos 3x \cdot \cos 2x - \sin 2x \cos 3x = 0$$

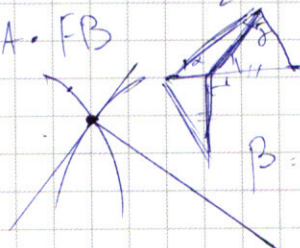
$$\cos 2x (\cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}) - \sin 2x (\sin 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$$

$$\cos 2x \cdot 2 \cos \frac{3x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \cos \frac{3x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} - \sin 2x \cdot 2 \sin \frac{3x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \cos \frac{3x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 0$$

$$5x = \arccos(\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)) \quad CF = FA \cdot FB$$

$$\cos \frac{\pi}{4} - 2x \cos 7x = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$CH =$$



$$-4x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\beta = \alpha + 90 - \alpha$$

$$\beta + \gamma + \varphi = 180$$

$$\beta + \gamma - \alpha = 90$$

$$\varphi = 90 - \alpha$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3³·4

$\frac{k}{n}$

$$\cos 4x + \cos 3x + \sin 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 3x \cos 4x - \sin 3x \sin 4x + \cos 3x + \sin 4x \cos 3x + \sqrt{2} \cos 4x \sin 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) = 0$$

$$\cos 5x = \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$\sin \frac{\pi}{4}$

$$\frac{\pi}{2} - 5x = 2x - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{2} - 5x = \pi - 2x + \frac{\pi}{4}$$

$$-4x = -\frac{3\pi}{4} \quad x = \frac{3\pi}{28}$$

$$3x = \frac{3\pi}{4} \quad x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$2x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} - 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$-2x = \frac{\pi}{4}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

$$2x = \frac{3\pi}{4}$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 93 + 3(3^{24} - 1)x$$

$$y > 3^x + (3-1) \cdot 3^{28} = 3^x + 3^{29} - 3^{28}$$

$$y \leq 93 + 3^{28} - 3x$$

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 93 + 3^{28} - 3x$$

$$3^x + 3^{28} - 3^{28} < 93 + 3^{28} - 3x$$

$$3^x + 3^{28}(3-2) < 93 - 3x$$

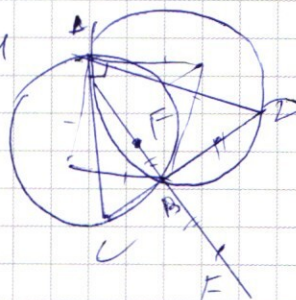
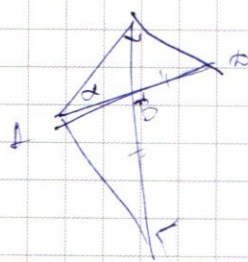
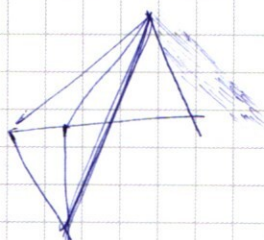
$$3^{28} < 93 - 3x - 3^x$$

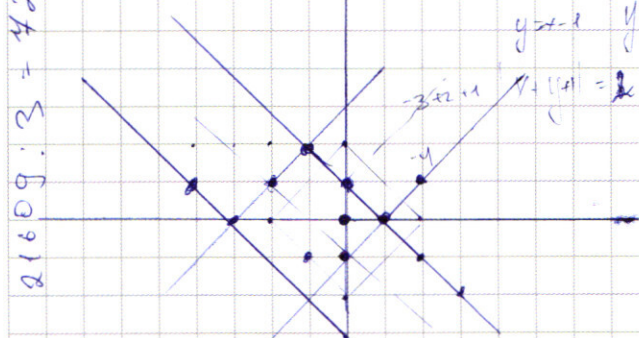
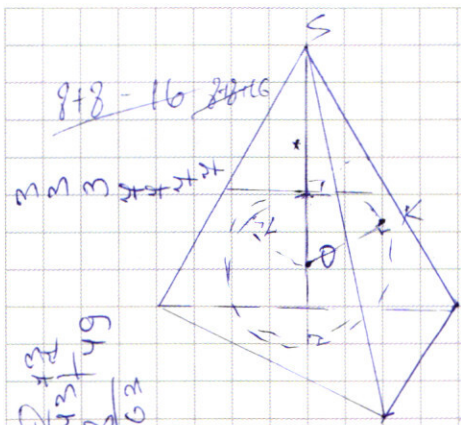
$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3(3^{24} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3^{28}x - 3x$$

$$3^x + 3^{28}(4-x) + 3x < 93 \quad : 3 \cdot 3^1$$

$$3^{x-1} + 3^{24}(4-x) + x < 31$$





$$x^2 + y^2 + 8y - 2xy + 16x + 16y + x^2 + y^2 + 64 - 2xy - 8y + 16x + 2(111) = 256$$

$$2x^2 + 2y^2 + 32x + 2(111) = 128 \quad | -2(-1-3) = 6$$

$$x^2 + y^2 + 16x + 1(111) = 64 \quad -16 \quad 8-8$$

$$(x+y+8)(x+y+8) = x^2 + xy + 8x + xy - y^2 - 8y + 8x + 8y + 64 = 12x + 4y + 64 = 16$$

$$x^2 + 16x + 64 - y^2 = 0$$

$$x^2 + 16x + y^2 + (x+8)^2 - y^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 64 + 2xy + 8x + 8y + x^2 + y^2 + 64 - 2xy - 8y + 8x + 2(111) = 256$$

$$x^2 + 8x + 64 + y^2 + 2(111) = 128$$

$$x^2 + 8x + 64 + y^2 + (x+8)^2 - y^2 = 128$$

$$x^2 \ln 4 - x^2 = x^2 \ln x (4-x) \ln 4 - x$$

$$3 \ln(4-x) = 2 \ln x + \ln(4-x) \ln(4-x)$$

$$S_1 = 9$$

$$S_2 = 16$$

$$\frac{S_1}{x} = \frac{S}{x+R}$$

$$1 + \frac{R}{x} = \frac{S}{S_1}$$

$$1 + \frac{S_2 - S_1}{2S_1} = \frac{S}{S_1} \Rightarrow S = S_1 + \frac{S_2 - S_1}{2}$$

$$\frac{S_1}{x} = \frac{S_2}{x+2R}$$

$$1 + \frac{2R}{x} = \frac{S_2}{S_1}$$

$$\frac{R}{x} = \frac{S_2 - S_1}{2S_1}$$

$$|-4+8+8| + |-4+8+8| = 12$$

$$-3+8+8 = 13$$

$$-16-9 = -25$$

$$-8$$

$$-5$$

$$\frac{S_2 - S_1}{2} = \frac{16-9}{2} = 3.5$$

$$9 + 3.5 = 12.5$$

$$-15 \quad 1-8 \quad -15 \quad -15$$

$$x+y+8$$

$$-4+8 = 4$$

$$4$$

$$-16+8+8$$

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$(x-8)^2 + (y-15)^2 = 2$$

$$-6 \quad 10$$

$$|-16+8-4| = 15$$

$$-16+8+1 = -7$$

$$-4+8$$

$$4$$

$$+x$$

$$-x$$

$$12$$

$$4$$

$$x^2 + xy + 8x - xy - y^2 - 8y + 8x + 8y + 64 = 12x + 4y + 64$$

$$x^2 + 64 + 8x - y^2 = 0$$

$$x^2 \ln 3x = x^2 \ln 3x - 3 \ln 3x$$

$$x^2 \ln 3x = x^2 \ln 3x - 3 \ln 3x$$

$$x^2 \ln 3x = x^2 \ln 3x - 3 \ln 3x$$

$$x^2 \ln 3x = x^2 \ln 3x - 3 \ln 3x$$

$$\ln(4-x)^2 = 2 \ln(1-x) + 2 \ln x$$

$$D = 9 - 8 \ln^2 x$$



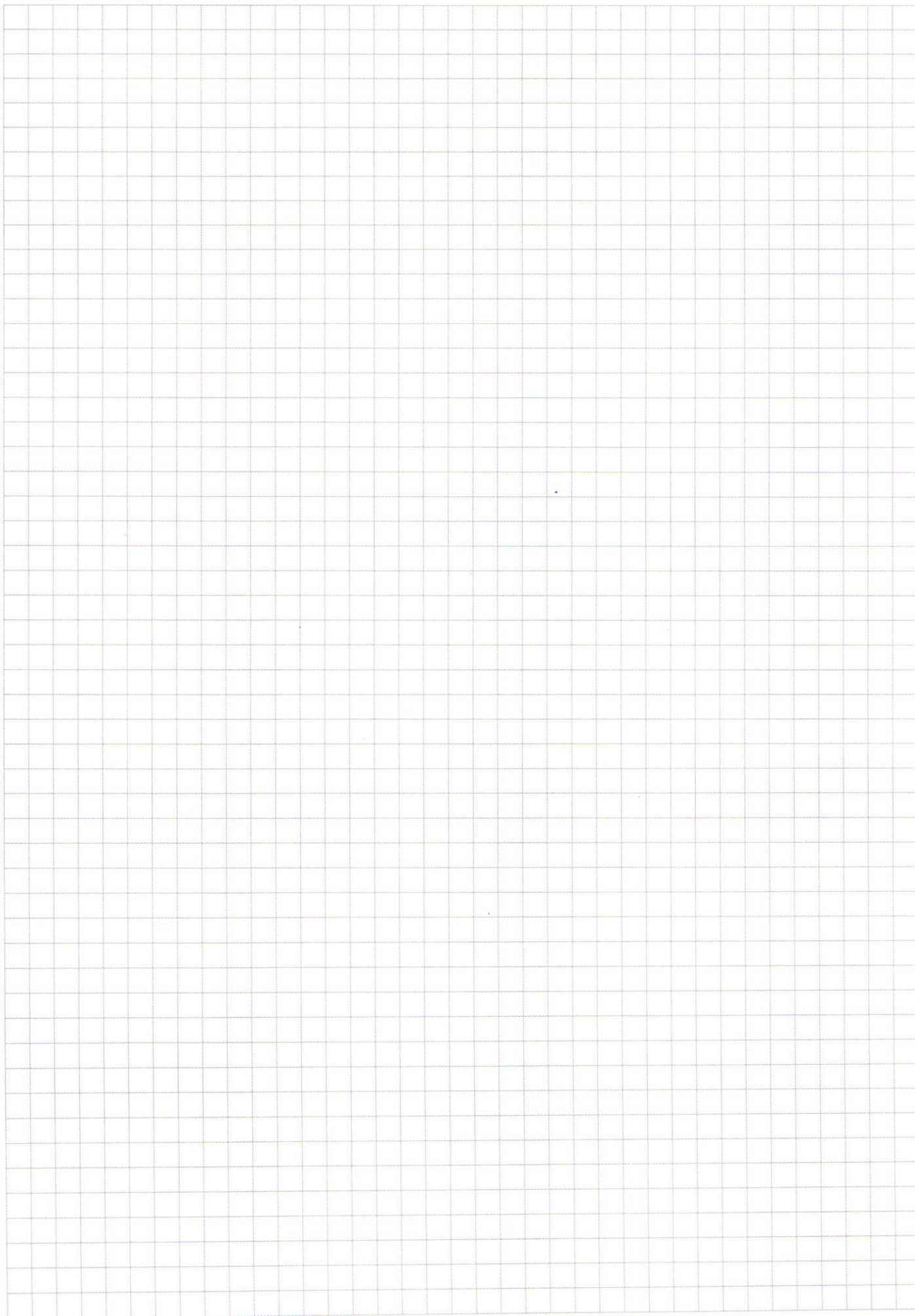
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)