

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1 Ответ: 1120

Решение: $64827 = 3^3 \cdot 7^4$. Пусть $P(x)$ - произведение цифр числа x . Нужно найти кол-во восьмизначных чисел x , таких, что $P(x) = 3^3 \cdot 7^4$. Рассмотрим какое-то число, $P(x) = 3^3 \cdot 7^4$. Единственная цифра, кратная 7 - это 7 $\Rightarrow$ в числе ~~из~~ ^{нужных нам} числах четыре цифры 7. Тогда произведение других четырех цифр = 3^3 , т.е. оставшиеся 4 цифры либо 3, 3, 3, 1 либо 9, 3, 1, 1.

1) Рассмотрим случай, когда число состоит из цифр 7, 7, 7, 7, 3, 3, 3, 1. Найдем кол-во таких восьмизначных чисел: поставим 4 семерки и цифры 3, 3, 3, 1 расставим между ними; $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ (для каждой тройки 5 вариантов, для каждой двойки 6 вариантов и т.д.) но нам неважно, в каком порядке стоят тройки. Тогда кол-во нужных чисел равно $\frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3!} = 5 \cdot 7 \cdot 8$

2) если число состоит из цифр 7, 7, 7, 7, 9, 3, 1, 1. Аналогичными рассуждениями получим $\frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2}$ (делим на 2, т.к. две единицы). Тогда всего чисел $5 \cdot 7 \cdot 8 + 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 = 1120$

u=5

Ответ: $a=4g$, $a=2pg$

Решение ① Построим график функции $|x+y+p| + |x-y+p| = 16$

$$1) \begin{cases} x+y+p \geq 0 \\ x-y+p \geq 0 \end{cases} \begin{cases} y \geq -x-p \\ y \leq x+p \end{cases}$$

$$2x = 0, \quad x = 0$$

$$2) \begin{cases} x+y+p \leq 0 \\ x-y+p \leq 0 \end{cases} \begin{cases} y \leq -x-p \\ y \geq x+p \end{cases}$$

$$-x-y-p - x+y-p = 16$$

$$-2x = 32$$

$$x = -16$$

$$3) \begin{cases} x+y+p \geq 0 \\ x-y+p \leq 0 \end{cases} \begin{cases} y \geq -x-p \\ y \geq x+p \end{cases}$$

$$x+y+p - x+y-p = 16$$

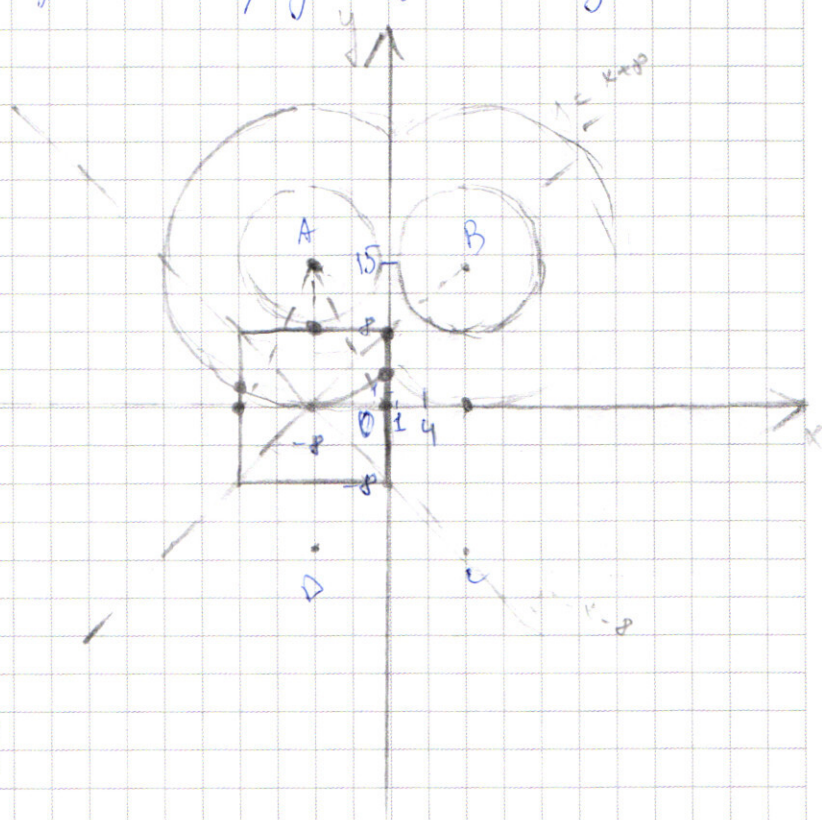
$$2y = 16 \quad y = 8$$

$$4) \begin{cases} x+y+p \leq 0 \\ x-y+p \geq 0 \end{cases} \begin{cases} y \leq -x-p \\ y \leq x+p \end{cases}$$

$$-x-y-p - x+y-p = 16$$

$$-2y = 32$$

$$y = -16$$



получается квадрат с центром в точке $(-p, 0)$ и стороной 16.

② График функции $|x| - p \quad (x-p)^2 + (y-15)^2 = (a)^2$
 $a > 0$ — это окружность с центром в точке $(p, 15)$ и радиусом a , а график функции

$(|x|-p) + (|y|-15)^2 = (a)^2$ получается при отражении окружности относительно Ox и Oy .

Отметим центры отраженных окружностей $(-p, -15)$, $(p, 15)$, $(-p, 15)$, $(p, -15)$

Нужно найти значения параметра a , при котором система имеет ровно два решения.

Заметим, что график функций симметричны

относительно $Ox \Rightarrow$ если есть решение для $y > 0$ то и для $y < 0$

каждой — по 2 пересечения графиков при $y > 0$, равно пересечению при $y < 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ Будем рассматривать пересечения для $y \geq 0$
(будем постепенно увеличивать радиус окр) $y \geq 0$ квадрата
при $\sqrt{a^2} = 15 - 8 = 7$ при $x < 0, y > 0$ окр. касается
при $x > 0, y > 0$ окр. не пересекается. $\sqrt{a^2} = 7$ подходит
при $7 < \sqrt{a^2} \leq 15$ две точки пересечения (видны по
графикам). эти значения нам не подходят, т.к. тогда
всего решений будет 4
Решения от $0 < \sqrt{a^2} < 7$ не подходят, т.к.
тогда точек пересечения нет вообще.
при $15 < \sqrt{a^2} < \sqrt{15^2 + 8^2}$ ($\sqrt{15^2 + 8^2} = AO$) всего две точки
пересечения при $y > 0 \Rightarrow$ всего 4, не подходит.
при $\sqrt{a^2} = 17$ ровно 2 точки пересечения
у градиентов: $(0, 0), (-16, 0)$. $\sqrt{a^2} = 17$ подходит.
Далее при $\sqrt{a^2} > 17$ градиенты вообще
не будут пересекаться.

Значит, подходит значения $\sqrt{a^2} = 7$, т.е. $a = 49$,

$\sqrt{a^2} = 17 \Rightarrow a = 289$. $a \rightarrow 0$ (Второе уравнение

$a \geq 0$, т.к. сумма двух квадратов ≥ 0)

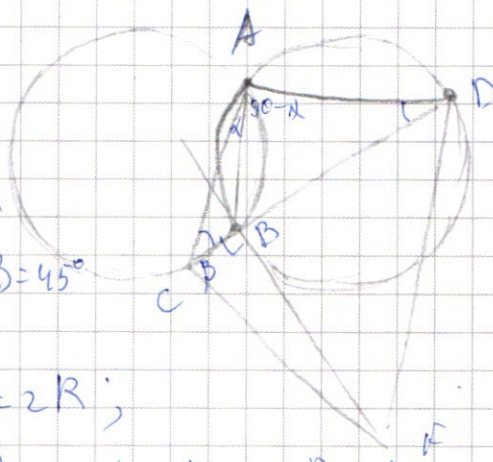
№ 6

а)

по условию радиусы
окружностей равны $R=17$
AB — общая хорда $\Rightarrow \angle ACB =$
 $= \angle ADB$ (углы в равных
окружностях опирающиеся
на равные дуги)
т.к. $\angle CAB = 90^\circ$, $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$
Пусть $\angle CAB = \alpha$, $\angle DAB = 90^\circ - \alpha$

По теореме синусов $\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$;

$\frac{BD}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R \Rightarrow BD = BF = 2R \cdot \cos \alpha$; $BC = 2R \cdot \sin \alpha$
 $BF \perp CD \Rightarrow \angle CBF = 90^\circ$, $CF^2 = BC^2 + BF^2$



$$CF^2 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) 4R^2 \Rightarrow CF = 2R = 34$$

8) $BC = 16$, $S_{\Delta ACF} = ?$

$$S_{\Delta ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin(45^\circ + \beta)}{2}$$

по теореме синусов $\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$

тогда $\sin \alpha = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$ $AB = 2 \cdot 17 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2}$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{17^2 - 8^2}}{17} = \frac{15}{17} \quad \frac{BD}{\cos \alpha} = 2R \Rightarrow BF = BD = \frac{15 \cdot 34}{17} = 30$$

$$\sin \beta = \frac{BF}{CF} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}, \quad \cos \beta = \frac{BC}{CF} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17} = \alpha = \beta$$

$$S_{\Delta ACF} = AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2AB \cdot CB \cdot \cos(45^\circ + \alpha) =$$

$$= 2 \cdot 17^2 + 16^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 17 \cdot 16 \cdot \cos(45^\circ + \alpha)$$

$$\cos(45^\circ + \alpha) = \frac{\sqrt{2} \cdot 15}{2 \cdot 17} - \frac{\sqrt{2} \cdot 8}{2 \cdot 17}$$

$$\sin(45^\circ + \alpha) = \frac{\sqrt{2} \cdot 15}{2 \cdot 17} + \frac{\sqrt{2} \cdot 8}{2 \cdot 17} = \frac{23\sqrt{2}}{34}$$

$$AC = 2 \cdot 17^2 + 16^2 - \frac{\sqrt{2} \cdot 17 \cdot 32 \cdot (15\sqrt{2} - 8\sqrt{2})}{34} =$$

$$= 2 \cdot 17^2 + 16^2 - \sqrt{2} \cdot 16 \cdot 7\sqrt{2} = 2 \cdot 17^2 + 16^2 - 32 \cdot 7 =$$

$$= \sqrt{1058}$$

$$S_{\Delta ACF} = \frac{\sqrt{1058} \cdot 2 \cdot 17 \cdot 23\sqrt{2}}{2 \cdot 34} = \sqrt{529} = 23$$

Ответ: $CF = 34$, $S_{\Delta ACF} = 23$

№ 3 $\int \left(-\frac{x^2}{y}\right) \ln(-y) = x^2 \ln(xy^3)$

$$\begin{cases} y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

Решим 1) Рассмотрим второе уравнение как квадратное относительно y

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$D = (2x + 4)^2 + 12x^2 - 48x =$$

$$= 16(x^2 - 2x + 1) = 16(x - 1)^2$$

тогда $y_1 = -3x$
 $y_2 = x - 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) из $0 \leq 3$ первого уравнения $-y \geq 0$
 $xy^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$
 $y \leq 0$
 тогда пара $(x, -3x)$ удовлетворяет при
 всех $x \neq 0$, пара $(x, x-4)$ удовлетворяет
 только при $x \in [0; 4]$

3) Рассмотрим случай $y = -3x$, тогда

$$\left(\frac{x^6}{3}\right) \ln 3x = x^2 \ln 3x^3$$

$$\frac{x^6 \ln 3x^6}{3 \ln 3x} = x^6 \ln 3^4 x^6 \quad / : x^6 \ln 3^7 x^6$$

$$\frac{\ln 3^6 x^6}{3 \ln 3x} = \ln 3^6 - 3^2 x^6 = 3 \ln 3x$$

$d^2 = 2$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 2x - \sin 3x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} \cos(7x - 3x) = \sqrt{2} \cos 7x \cdot \cos 3x + \sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cdot \cos 2x$$

$$\sin 7x - \sin 3x = 2 \sin 2x \cdot \cos 5x$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = \sqrt{2} (\sin^2 2x - \cos^2 2x)$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = \sqrt{2} (\sin 2x + \cos 2x) \cdot$$

$$(\sin 2x - \cos 2x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 2x = -\cos 2x & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cos 5x = \sqrt{2} (\sin 2x - \cos 2x) & (2) \end{cases}$$

1) $\sin 2x = -\cos 2x$
и $\sin 2x, \cos 2x$ разного знака.

$$\tan 2x = -1 \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\text{т.е. } x = \frac{3\pi}{8} + \pi k$$

$$x = \frac{7\pi}{8} + \pi k$$

$$2x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\text{где } k \in \mathbb{Z}$$

2) $\sqrt{2} \cos 5x = \sin 2x - \cos 2x \quad |^2$

$$2 \cos^2 5x = 1 - 2 \sin 2x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos^2 5x = 1 - \sin 4x$$

$$1 - \sin 10x = 1 - \sin 4x$$

$$\sin 10x = \sin 4x$$

$$\sin 10x - \sin 4x = 0$$

$$2 \sin 3x \cdot \sin 7x = 0$$

$$\begin{cases} \sin 3x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 7x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = \pi k \end{cases}$$

$$\text{где } k \in \mathbb{Z}$$

$$1 - \cos 10x = 1 - \sin 4x$$

$$\cos 10x = -\sin 4x$$

$$\cos 10x + \sin 4x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right) + \sin 4x = 0$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 10x + 4x}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 10x - 4x}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} - 3x = \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} - 7x = \pi k \end{cases}$$

$$\text{где } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3} \\ x_2 = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} \end{cases}$$

Заметим, что семейство решений

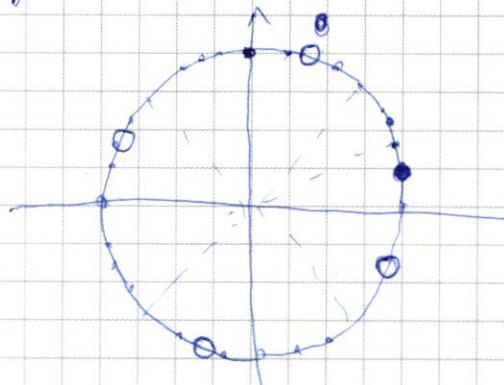
Ответ:

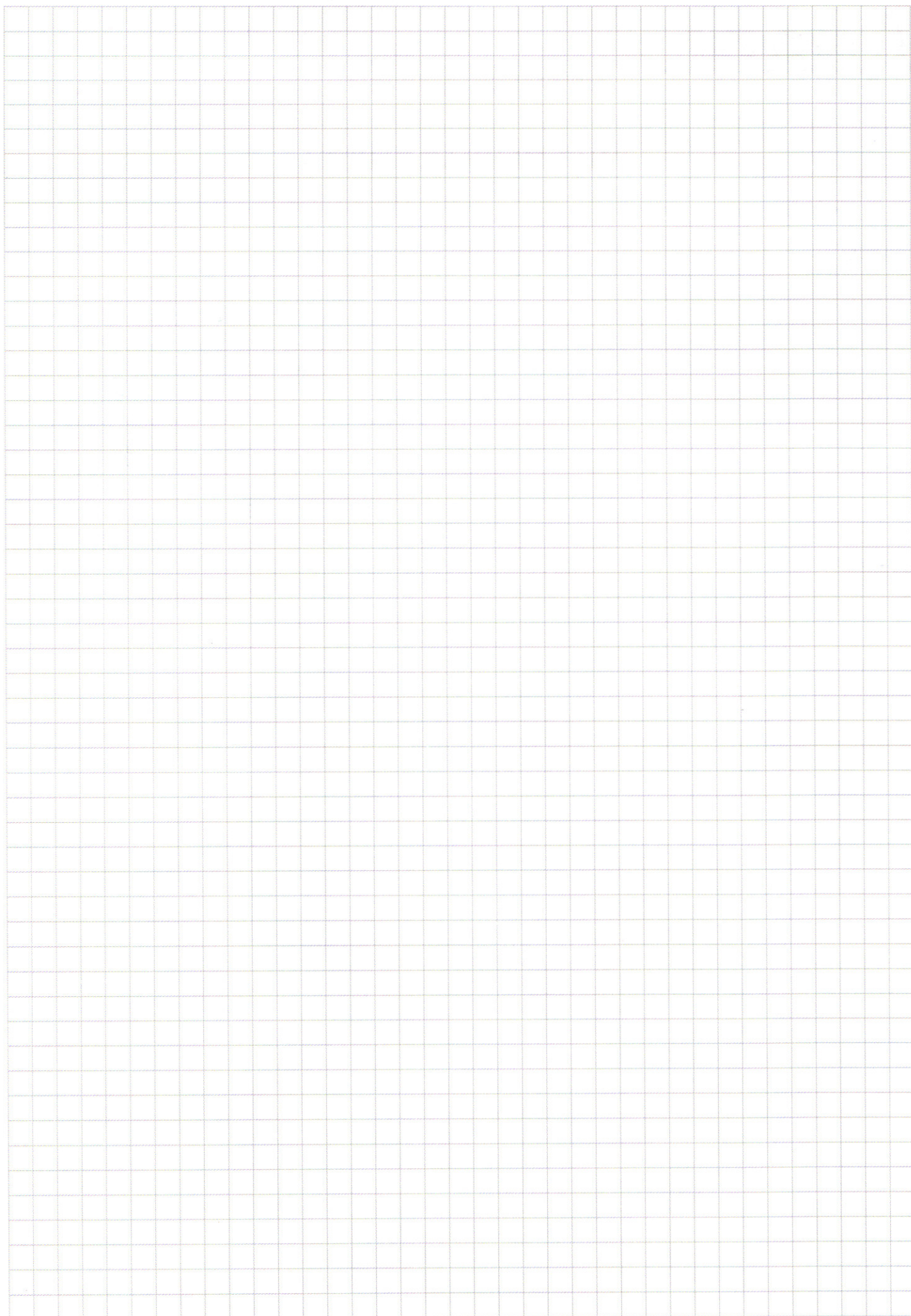
$$x_1 = \frac{3\pi}{8} + \pi k$$

$$x_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$$

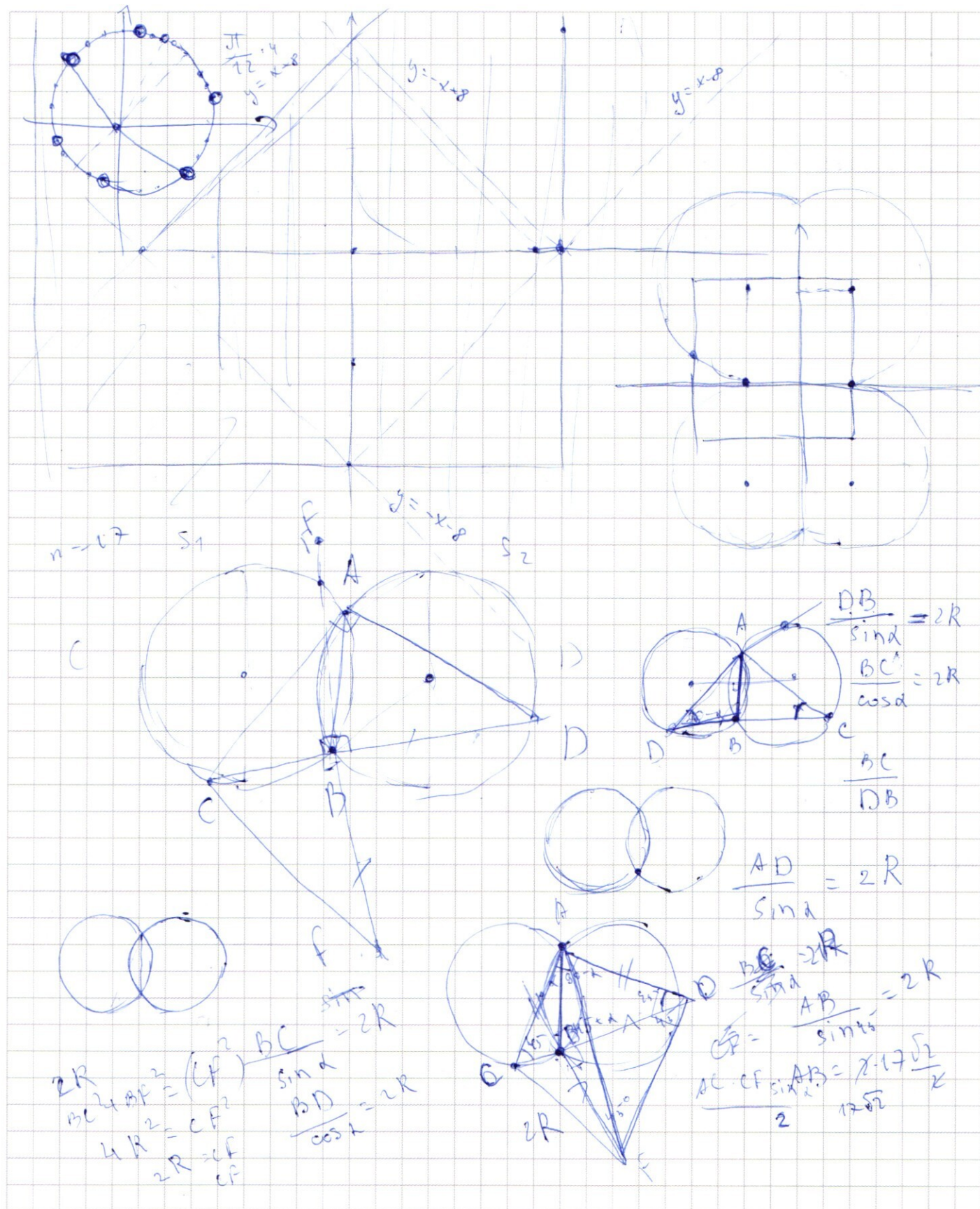
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Проверим, есть ли совпадающие семейства
решений с помощью окружности.





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



③

$$\cos(45^\circ + \alpha) = \cos 45^\circ \cdot \cos \alpha - \sin 45^\circ \cdot \sin \alpha =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{15}{17} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{8}{17}$$

$$\sin(45^\circ + \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{15}{17} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{8}{17}$$



289

282

578

256

834

224

1058

16

16

96

16

32

7

224

529

$\frac{2-B}{2}$

cos

$$\cos 60^\circ + \cos 60^\circ = 2$$

$$2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos$$

23

23

69

46

$$2\pi - \frac{\pi}{4} y > 3^x + 4 \cdot 3^{2x}$$

$\frac{7\pi}{4}$

$$y \leq 93 + 3(3^{22} - 1)x$$

$$x \geq 28$$

$$\log_3 y > \log_3 (3^x + 4 \cdot 3^{2x}) \quad 3 \quad y \geq 28$$

$$\log_3 y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \quad \log_3 (93 + 3(3^{22} - 1)x)$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{2x} \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x$$

$$x = \log_3^x$$

$$x = 28$$

$$6 \ln 3x$$

$$3^{28} + 4 \cdot 3^{28} \leq 3 \cdot 3^1 + 3(3^{27} - 1) \cdot 28$$

$$3^{24} + 4 \cdot 3^{25} \leq \frac{93}{3} + 3$$

$$2 \cos^2 5x = 1$$

$$+ 2 \sin 4x$$

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$2 \ln(-y)$$

$$= y^{\ln(-y)} \cdot x^{\ln(xy^2)}$$

$$(1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot \ln(-y) = \log_x y^{\ln(-y)} \cdot 2 \ln(xy^2)$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x +$$

$$2 \cos^2 \alpha = 1 - \sin 2\alpha \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $64827 = 7203 \cdot 9 = 2401 \cdot 3^2 = 3^3 \cdot 7^4$

$P(x) = 3^3 \cdot 7^4$ т.к. сумма цифр
цифра: 7, 2, 0, 3, в числе
ровно 4 цифры, $7 \Rightarrow$
преобразование оставшихся
равно $3^3 \Rightarrow$ это может быть

- 1) 333, 777 и 1, таких чисел всего 7777
- 2) 9, 3, 1, 1, т.к. всего 2 цифры, кратные 7, 7, 7, 7

333

множителем в цифре будет 10, значит,

② $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$\cos 7x + \sin 7x$

$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cdot \cos 5x$

$\sin 7x - \sin 3x = 2 \sin 2x \cdot \cos 5x$

$\sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} \cos(7x - 3x) = \sqrt{2} \cos 7x \cdot \cos 3x + \sin 7x \sin 3x$

$a + b + c - d + \sqrt{2}ab + \sqrt{2}cd = 0$

$(\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{c} + \sqrt{b})^2 +$
 $\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = (\sqrt{2} \cos 4x)^2$

$1 + 1 + 2 \cos 7x \cdot \sin 7x + 2 \cos 3x \cdot \sin 3x - 2 \cos 7x \cdot \sin 3x -$
 $2 \sin 7x \cdot \cos 3x - 2 \sin 7x \cdot \sin 3x - 2 \cos 5x \cdot \sin 3x = (-\sqrt{2} \cos 4x)^2$

$\cos x \cdot \sin x$

$\sin x \cdot \cos \beta = (\cos(x - \beta) - \sin(x + \beta))$

$\sin 7x \sin 3x =$

$2 \cos 2x \cdot \cos 5x + 2 \sin 2x \cdot \cos 5x = -\sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)$

$a + b + c - d + \sqrt{2}ab + \sqrt{2}cd = 0$

$(a + b)^2 = \sqrt{2}ab + 5$

$a + b + c - d = -\sqrt{2}(ab + cd)$

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2bc + 2cd + 2bc - 2cd =$

$= 2a^2b^2 + c^2d^2$

$\cos 7x + \cos 3x - \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} (\cos 7x \cdot \cos 3x + \sin 7x \cdot \sin 3x)$

$a + b + \sqrt{1 - a^2} - \sqrt{1 - b^2} = \sqrt{2}ab + \sqrt{2} \sqrt{1 - a^2} \sqrt{1 - b^2}$

$a + b - \sqrt{2}ab = (a + 1) \left(\sqrt{2}a + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\sqrt{2}b + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

$\sqrt{2}a + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$

$\sqrt{2}x = 1$

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(y-x)^2 - 4x^2 + 12x + 4y \quad (y-x)^2 - x^2 - 3(x^2 - 6x + 9) + 4y + 12$$

$$y^2 + 2xy + x^2 - 4x^2 + 12x + 4y \quad (y+3x)(y-x+4) + (y+x)^2 - 4(x^2 + 3x + y) = 0$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$D = (2x+4) + 12x^2 - 48x = 4x^2 + 12x^2 + 16x - 48x$$

$$y = \frac{-2x-4 \pm 4(x-1)}{2} = -x-2 \pm 2x-2 = x-4 \pm 16 = 16x^2 - 32x + 16 =$$

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$y \leq 0, x > 0$$

$$-x^{\frac{2\ln(-y)}{y}} = x^{2\ln x + 4\ln y^2}$$

$$(e^a)^{-y^2} = -y^2$$

$$y^2 = e^a$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^{\frac{\ln(y^2)}{2}} = x^{2\ln x + 2\ln y^2}$$

$$x^{\frac{\ln(y^2)}{2}} = -y^{\frac{\ln(y^2)\ln a}{2} \cdot \frac{\ln a}{\ln a}} = \frac{\ln a}{\log_e b}$$

$$\ln ax = \log x e$$

$$|x-y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$$

$$|x-y+8| + |x-y+8| = 16 \quad y > -x-8$$

$$\begin{cases} x-y+8 > 0 & x-y > -8 & x > y-8 \\ x-y+8 < 0 & x-y < -8 & x < y-8 \end{cases}$$

$$2x = 16 \quad x = 8 \quad y < x-8$$

$$2) \begin{cases} x-y+8 \leq 0 & y \leq 8-x \\ x-y+8 \leq 0 & y \geq x+8 \end{cases}$$

$$-2x - 16 = 16 \quad x = -16$$

$$3) \begin{cases} x-y+8 < 0 & y < -8-x \\ x-y+8 \geq 0 & y < x+8 \end{cases}$$

$$-x-y-8 + x-y+8 = 16$$

$$-2y = 16 \quad y = -8$$

