МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра(
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. ~~[5 баллов]~~ Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$\times\ \begin{array}{r} 35 \\ 8 \\ \hline 280 \end{array}$ $\times\ \begin{array}{r} 28 \\ 30 \\ \hline 840 \end{array}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1053

$\sqrt{2}\cos 5x = \sin 2x - \cos 2x$

$\sqrt{2}(\cos(4x+x)) = \cancel{2\sin x\cos x}\ \sin 2x - \cos 2x$

$\sqrt{2}(\cos 4x\cos x - \sin 4x\sin x) = \sin 2x - \cos 2x$

$\sqrt{2}(\sin^2 2x\cos x - \cos^2 2x\cos x - 2\sin 2x\cos 2x\sin x) = \sin 2x - \cos 2x$

$\sqrt{2}\sin^2 2x\cos x - \sqrt{2}\cos^2 2x\cos x - \sqrt{2}\sin 2x\cos 2x\sin x - \sqrt{2}\sin 2x\cos 2x\sin x$

$+\cos 2x - \sin 2x = 0$

$\cancel{\cos 2x(-\sqrt{2}\cos 2x\cos x - \sqrt{2}\sin 2x\sin x+1) + \sin 2x(\sqrt{2}\sin 2x\cos x - \sqrt{2}\cos 2x\sin x)}$

$\cancel{\sqrt{2}\cos x\sin^2 x - \sqrt{2}\cos x\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x\sin}$

$4\sqrt{2}\sin^2 x\cos^3 x - \sqrt{2}\cos x\sin^2 x + \sqrt{2}\cos^3 x - 2\sqrt{2}\cdot 2\sin^2 x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$+\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x\cos x = 0$

$\cancel{4\sqrt{2}\sin^2 x\cos^3 x} + \sqrt{2}\cos^3 x - \sqrt{2}\sin^2 x\cos x - \cancel{2\sqrt{2}\sin^2 x\cos^3 x} +$

$+4\sqrt{2}\sin^4 x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x\cos x = 0$

$\cancel{\cos^2 x\ \ \cos x(\sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sin x)}$

$\cancel{\sqrt{2}\cos^2 x(\sqrt{2}\cos x + 1) - \sqrt{2}\sin x\cos x(\sin x - \sqrt{2})}$

$\times\begin{array}{r}81\\3\\ \hline 243\end{array}$

$2, 4, 8, 16 = 30$

$\cos 2x = -\sin 2x$

$\cancel{tg x}$

$2 \quad \times\begin{array}{r}81\\13\\ \hline 243\\81\ \ \\ \hline 1053\end{array}$

$\frac{8_1(9^n - 1)}{9-1}$ 3, 9, 27, 81, $tg x = -1$

$1\left(\frac{15}{1}\right)$

$2\left(\frac{15}{1}\right) = 3$

1 2 4 8

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

36 $(6-3)/3+1$

$\angle KSO - ?$

$$\begin{cases} y > 3^x + 4\cdot 3^{28} \\ y \le 93 + 3(3^{27}-1)x \end{cases}$$

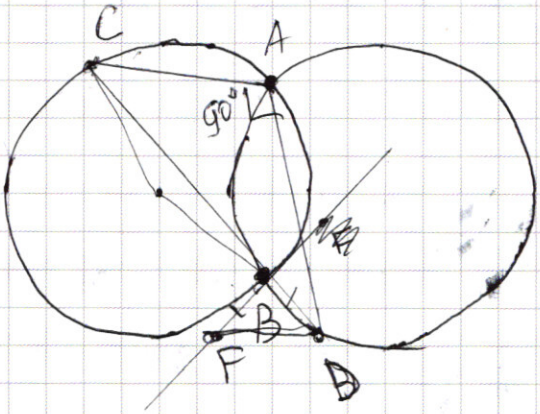
$\cancel{75}/3 = 25$

$$\begin{cases} y > 3^x + 4\cdot 3^{28} \\ y \le 93 + 3^{28}x - 3x \end{cases}$$

$93 + 3^{28}\cdot 27 - 3\cdot 31 - 27^{31}$

1, 2, 3

$\frac{(1+3)3}{2} = 6$



~~CF~~

$93 + 3^{28}x - 3x > 3^x + 4\cdot 3^{28}$

$93 + 3^{28}(x-4) - 3x - 3^x > 0$

$\underline{x=4}$ – кратнее

12 3^4

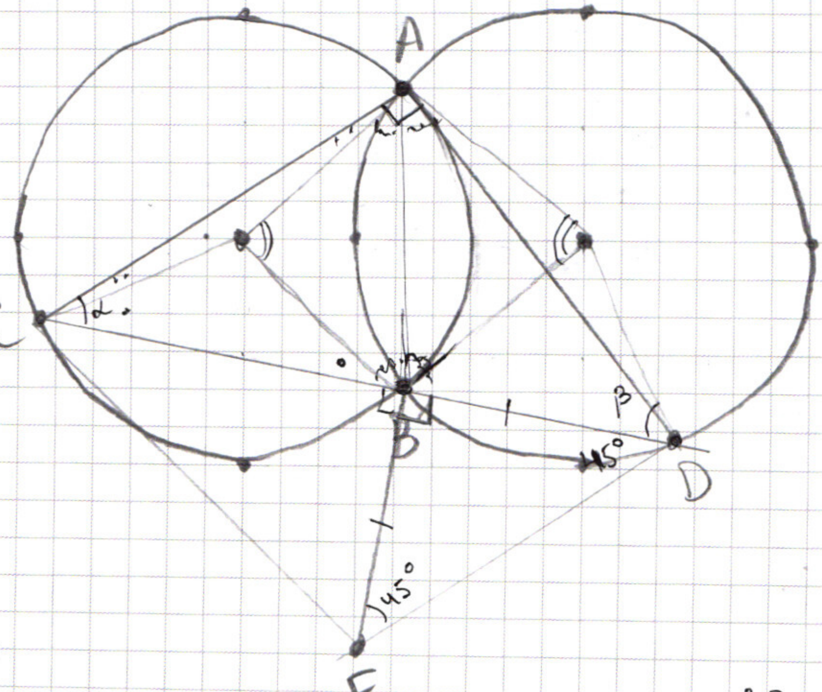
81

$31\cdot 3^{28} + 93 - 3\cdot 31 - 27\cdot 3^{28}$

CF – ?

R – 17

$x = 5, 6, 7 \dots 28$



$x = 28$

$93 + 3^{28}\cdot 24 - 3\cdot 28 - 3^{28} =$

$= 93 + 3^{28}\cdot 23 - 3\cdot 28$

$x = 30$

$93 + 3^{28}\cdot 26 - 3\cdot 30 - 9\cdot 3^{28} =$

$= 3 + 33$

31

$x = 32 < 0$

$93 + 3^{28}\cdot 28 - 3\cdot 32 - 81\cdot 3^{28} =$

$=$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\cancel{\cos 7x + \cos}$

$\cos(3x+4x) + \cos 3x + \sin(3x+4x) - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\cos 3x\cos 4x - \sin 3x\sin 4x + \cos 3x + \sin 3x\cos 4x + \sin 4x\cos 3x - \sin 3x +$

$+\sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\cos 4x(\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) - \sin 3x(1+\sin 4x) + \cos 3x(1+\sin 4x) = 0$

$\cos 4x(\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) - (1+\sin 4x)(\cos 3x - \sin 3x) = 0$

$\cos 7x + \cos(7x-4x) + \sin 7x - \sin(7x-4x) + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\cos 7x + \cos 7x\cos 4x + \sin 7x\sin 4x + \sin 7x - \sin 7x\cos 4x + \sin 4x\cos 7x +$

$+\sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\cancel{\cos 4x(\cos 7x - \cos 4x + \sqrt{2}) + \sin 4x}$

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}(\cos(7x-3x) = 0$

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 7x\cos 3x + \sqrt{2}\sin 7x\sin 3x = 0$

$\cancel{\cos 7x(1+\sqrt{2}\cos 3x) + \sin}$

$\cos 3x\cos 4x - \sin 3x\sin 4x + \cos 3x + \sin 3x\cos 4x + \sin 4x\cos 3x - \sin 3x +$

$+\sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\cancel{\cos 3x\cos 4x - \sin 3x\sin 4x}$

$\cos 7x + \cos 7x\cos 4x + \sin 7x\sin 4x + \sin 3x\cos 4x + \sin 4x\cos 3x$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cancel{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$

$\cancel{\cos}$ $2\cos\alpha\cos\beta =$

$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\alpha + \cos\beta$

$\cancel{\sin\alpha}$ $\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2}$

$\sin\beta\cos\alpha = \frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{2}$

$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\alpha - \sin\beta$

итого:

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos\frac{10x}{2}\cdot\cos\frac{4x}{2} + 2\cdot\sin\frac{4x}{2}\cos\frac{10x}{2} + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\sqrt{2}(\sin^2 2x + \cos^2 2x)$

$2\cos 5x\cos 2x + 2\sin 2x\cos 5x + \cancel{2\sqrt{2}\sin 2x\cos 2x} = 0$

$\cancel{\cos 2x(2\cos 5x + \sqrt{2}) + \sin 2x(2\cos 5x + \sqrt{2}) = 0}$

$\cos 2x(2\cos 5x + \sqrt{2}\cos 2x) + \sin 2x(2\cos 5x + \sqrt{2}\sin 2x) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{8!}{5!\,3!} = \frac{6\cdot7\cdot8}{6} = 56$; $56\cdot5 = 280$

$\frac{8\cdot7\cdot6!}{4!\,2!} = 28\cdot5\cdot6 = 30\cdot28 = 840$

$840 + 280 = 1120$

$\cos7x + \cos3x + \sin7x - \sin3x + \sqrt2\cos4x = 0$

$\cos(5x+2x) + \cos(5x-2x) + \sin(5x+2x) - \sin(5x-2x) = -\sqrt2\cos4x$

$\cos5x\cos2x - \cancel{\sin5x\sin2x} + \cos5x\cos2x + \cancel{\sin5x\sin2x} + \cancel{\sin5x\cos2x} +$

$+ \sin2x\cos5x - \cancel{\sin5x\cos2x} + \sin2x\cos5x = -\sqrt2\cos4x$

$2\cos5x\cos2x + 2\sin2x\cos5x = -\sqrt2\cos4x$

$2\cos5x(\cos2x + \sin2x) = -\sqrt2\cos4x$

$2\cos5x(2\cos^2x - 1 + 2\sin x\cos x) = -\sqrt2(2\cos^2 2x - 1)$

$2\cos5x\cdot(\cos x(2\cos x + 2\sin x - 1)) = -\sqrt2(2\cos(2\cos^2x-1)^2 - 1$

$2\cos5x(\cos2x + \sin2x) = -\sqrt2(\cos2x\cdot\cos2x - \sin2x\cdot\sin2x)$

$2\cos5x(\cancel{\cos2x+\sin2x}) = -\sqrt2(\cos2x - \sin2x)(\cancel{\cos2x+\sin2x})$

$(\cos2x + \sin2x = 0)$ - корень

$\sqrt2\cos5x = \sin2x - \cos2x$

$\sqrt2(\cos(4x+x)) = 2\sin x\cos x - (2\cos^2x - 1)$

$\sqrt2(\cos4x\cos x - \sin4x\sin x) = 2\sin x\cos x - 2\cos^2x + 1$

$\sqrt2(\cos^2 2x - \sin^2 2x)\cos x - 2\sin2x\cos2x\sin x) = \ldots$

$\sqrt2((\cos^2x + \sin^2x)^2 - 4\sin^2x\cos^2x)\cos x - 4\sin^2x\cos x(\cos^2x - \sin^2x) = \ldots$

$\sqrt2(\cos^5x - 2\cos^3x\sin^2x + \sin^2x\cos x - 4\sin^2x\cos^3x - 4\sin^2x\cos^3x + 4\sin^4x\cos x)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{2}(\cos^5 x - 2\cos^3 x \sin^2 x + 5\sin^4 x \cos x - \cancel{8\sin^2 x \cos^3 x}) = \ldots$

$\cancel{\cos^3 x (\cos^2} \sqrt{2}(\cos^5 x + 5\sin^4 x\cos x - 10\sin^2 x\cos^3 x) = \ldots$

$\cancel{\sqrt{2} / \cos^5 x}$

$\sqrt{2}\cos x\,(\cos^4 x + 5\sin^4 x - 10\sin^2 x\cos^2 x) = 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x + 1$

$$\begin{array}{r} \times\ 15 \\ 15 \\ \hline 75 \\ 15 \\ +225 \\ 64 \\ \hline 289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline \end{array}$$

$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$

$(y+x)^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0$

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \le 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

3. $\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$

$e^{\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln -y}} = e^{x^{2\ln(xy^2)}}$

$-y^{-\frac{x^7}{y}} = xy^{2x^2}$

$\cancel{(xy^2)^{x^2}}\ x^{x^2} y^{2x^2} + y^{-\frac{x^7}{y}} = 0$

y

$\left(\frac{-x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{(2\ln(xy^2))}$

$x^{\ln x^2 y^4}$

$x^{2x} y^{\left(4x + \frac{x^7}{y}\right)} + 1 = 0$

$(-y)^{\left(-\frac{x^7}{y}\right)} = (x^2 y^4)^x$; $\quad x^{2x} y^{4x} + \frac{1}{y^{\frac{x^7}{y}}} = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{-x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$\frac{-x^{7\ln(-y)}}{y^{\ln(-y)}} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$x^{2\ln(xy^2)} y^{\ln(-y)} + x^{7\ln(-y)} = 0$$

$$\underbrace{x^{2\ln(xy^2)}}_{\neq 0}\left(y^{\ln(-y)} + x^{7\ln(-y)-2\ln(xy^2)}\right) = 0$$

$$y^{\ln(-y)} = -x^{\ln(-y^7)-\ln(x^2y^4)} = 0$$

$$y^{\ln(-y)} = -x^{\ln -\frac{y^3}{x^2}}$$

$\cancel{3}x$ - четное!

$$-y^y = \frac{\cancel{\#}y^{3x}}{\cancel{+}x^3}$$

$$-y^y x^3 = y^{3x}$$

$$y^{\cancel{3}y}\left(y^{3x-y} - x^3\right) = 0$$

$$\underbrace{y^{3x-y}}_{>0} = \underset{\vee\, 0}{x^3}$$

$$e^{\ln(x^2y^4)^x} = e^{\ln(-y)^{-\frac{x^7}{y}}}$$

$$(x^2y^4)^x = (-y)^{-\frac{x^7}{y}}$$

$$(x^2y^4)^x = \cancel{-y}\ \cancel{\frac{1}{-y^{\frac{x^7}{y}}}}\ (-y)^{\frac{x^7}{(-y)}}$$

$$x^{2x}y^{4x} - \cancel{4}(-y)^{\frac{x^7}{(-y)}} = 0$$

$$\underset{\neq 0}{y^{4x}}\left(x^{2x} - (-y)^{\frac{x^7}{-y}}\right) = 0$$

$$x^{2x} = (-y)^{\frac{x^7}{(-y)}}$$

$$x^2 = -y^{\frac{7}{-y}}$$

$$x = (-y)^{\frac{7}{-2y}}$$

$$y^2 \cancel{+} 2(-y)(-y)^{\frac{7}{-2y}} - 3(-y)^{\frac{7}{-y}} + 12(-y)^{\frac{7}{-2y}} + 4y = 0$$

$$y^2 - 2y^{\left(\frac{7}{-2y}\right)} - 9y^7$$

$$2^{2^7}\ \sqrt[2]{2^{14}} = 2^7$$

$-y>0$ $\quad y<0$

$$\begin{cases}\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2+2xy-3x+12x+4y=0\end{cases}$$

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$\left(e^{\ln(-y)}\right)^{-\frac{x^7}{y}} = \left(e^{2\ln(xy^2)}\right)^{x}$$

м.б <0 $$-y^{\left(-\frac{x^7}{y}\right)} = \left(x^2y^4\right)^{x} > 0$$

$$-y^{-x^7} = \left(x^2y^4\right)^{xy}$$

$$\cancel{x^2y^4}\; x^{2xy}\, y^{4xy} + y^{x^7} = 0$$

$$y^{4xy}\left(x^{2xy} - y^{(4xy-x^7)}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} y^{4xy}=0 \rightarrow \text{нет решений, т.к. } y\neq 0 \\ x^{2xy} = y^{4xy-x^7}\end{array}\right.$$

$$x^{2xy^{x}} = x^{(4y-x^7)^{y}}$$

$2^5 \quad 5^2$

$3^{2^5} \quad 3^{5^2}$

$\cancel{3}\, g^5$

$$\cancel{-}\frac{x^{7\ln(-y)}}{y^{(\ln-y)}} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$x^{2\ln(xy^2)} + \frac{x^{7\ln(-y)}}{y^{\ln(-y)}} = 0$$

$y\neq 0$

$$\cancel{x^{2\ln(xy}}\; x^{7\ln(-y)}\left(x^{2\ln(xy^2)-7\ln(-y)} + \frac{1}{y^{(\ln-y)}}\right.$$

$$x^{7\ln(-y)}=0 \quad x=0$$

$$x^{2\ln(xy^2)-7\ln(-y)} + y^{-\ln(-y)} = 0$$

$$y^{\ln(-y)} = \cancel{x^{3\ln\ldots}}\; x^{\ln\frac{(-y^3)}{x^2}}$$

$$-y^{y} = \left(\frac{-y^3}{x^2}\right)^{x}$$

$$-y^{y} = -\frac{y^{3x}}{x^{2x}}$$

$$-y^{y}x^{2x} = -y^{3x}$$

$$y^{y}x^{2x} - y^{3x} = 0$$

$$\cancel{y^y}\, x^{2x} - y^{3x-y} = 0$$

$$x^{2x} = y^{3x-y}$$

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(x)+2\ln(-y)} = x^{2\ln x}\cdot x^{4\ln(-y)}$$

$$x^{2\ln x}\cdot \cancel{x^{4\ln(-y)}} = \frac{x^{3\ln(-y)}}{y^{\ln(-y)}}\;;\quad x^{2\ln x}\cdot y^{\ln(-y)} - x^{3\ln(-y)} = 0$$

$$\cancel{x^{2\ldots}}\; x^{2\ln x}\left(y^{\ln(-y)} - x^{3\ln(-y)-2\ln(x)}\right) = 0$$

$x=0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. разложим 64827 на простые множители:

64827	3
21609	3
7203	3
2401	7
343	7
49	7
7	7
1	1

$\Rightarrow$ $64827 = 3^3 \cdot 7^4$

таким образом, восьмизначное число, произведением цифр которого будет 64827 должно содержать в себе либо:

а) 3 тройки, 4 семерки и одну единицу

$3^3 \cdot 7^4 \cdot 1 = 64827$

вариантов расположить тройки: C_8^3; на оставшихся пяти местах вариантов расположить семерки: C_5^4. Единица встаёт на оставшееся место. Итого: $C_8^3 \cdot C_5^4$ вар.

либо

б) Одна девятка, одна тройка, четыре семёрки, две единицы

вариантов поставить ~~де~~девятку: C_8^1; вариантов затем разместить тройку: C_7^1; вариантов затем разместить семерку: C_6^4, на оставшиеся места встают единицы то есть всего $C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^4$ вар.

больше вариантов комбинаций цифр нет, т.к. девятка может быть максимум одна, $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 > 10$, $3 \cdot 7 = 21 > 0$, $7 \cdot 7 = 49 > 10$ - не являются цифрами

Итого: $C_8^3 \cdot C_5^4 + C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^4 = \frac{8!}{3!\,5!} \cdot \frac{5!}{4!\,1!} + 8 \cdot 7 \cdot \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\overset{28}{\cancel{56}} \cdot 5 \cdot 6}{\cancel{2}} = 280 + 840 = 1120$ вар.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№ 5.

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Изобразим графически множество точек, задаваемых выражением (1)

1) $x+y+8>0$ и $x-y+8>0$

$y>-8-x$ $\quad$ $y<x+8$

$x+\cancel{y}+8+x-\cancel{y}+8=16$; $2x+16=16$; $x=0$

прямая.

2) $x+y+8>0$ и $x-y+8<0$

$y>-8-x$ $\quad$ $y>x+8$

$x+y+8-x+y-8=16$; $2y=16$; $y=8$ прямая

3) $x+y+8<0$ и $x-y+8>0$

$y<-8-x$ $\quad$ $y<x+8$

$-x-y-8+x-y+8=16$; $-2y=16$; $y=-8$ прямая

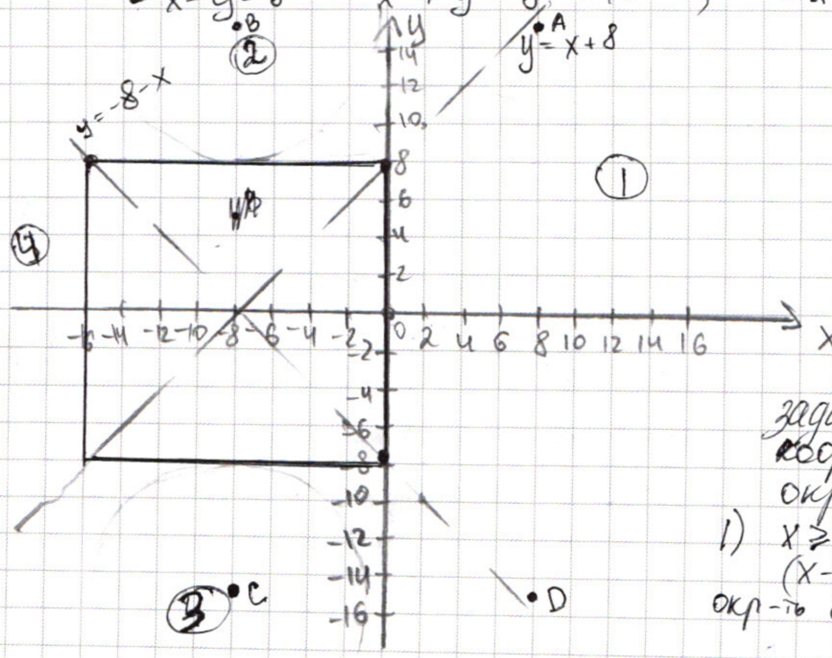
4) $x+y+8<0$ и $x-y+8<0$

$y<-x-8$ $\quad$ $y>x+8$

$-x-y-8-x+y-8=16$; $-2x-16=16$; $-2x=32$

$x=-16$

прямая



таким образом, первое уравнение задаёт на плоскости квадрат со стороной 16

Второе уравнение задаёт в каждой из четвертей координатной плоскости дугу окружности:

1) $x\geq 0$; $y\geq 0$

$(x-8)^2+(y-15)^2=a$

окр-ть с центром в точке $(8;15)$ - A и радиусом $\sqrt{a}$

2) $x\leq 0$; $y>0$

$(x+8)^2+(y-15)^2=a$

окр-ть с радиусом $\sqrt{a}$ и центром в точке $(-8;15)$ - B

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 продолжение

3) $x \leq 0$; $y \leq 0$

$(x+8)^2 + (y+15)^2 = a$

окружность с центром в точке $(-8; -15)$ и радиусом $\sqrt{a}$

C

4) $x > 0$; $y < 0$

$(x-8)^2 + (y+15)^2 = a$

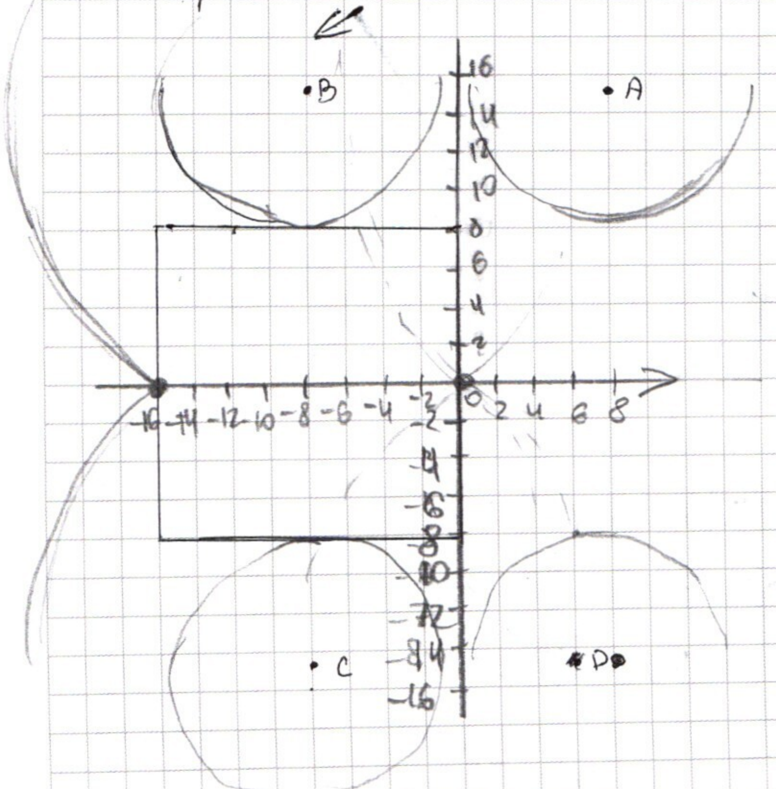
окружность с центром в точке $(8; -15)$ и радиусом $\sqrt{a}$

D

обозначим точки на п-ти.

1) $\sqrt{a} < 7$. ни одна из окружностей не касается квадрата. Нет решений

2) $\sqrt{a} = 7$. окр-ти B и C коснутся верхней и нижней сторон квадрата. окр-ти A и D не коснутся его. Будет два пересечения.



3) $\cancel{\sqrt{a}}\ 7 < \sqrt{a} < \sqrt{225+64}$

$7 < \sqrt{a} < 17$

либо окр-ти BC пересекают верхнюю грань по 2 раза, либо боковые по два раза

окр-ти A, B будут пересекать боковые грани в тех же точках, что и B, C.

4) окр-ть C пройдет через точку $(-16; 0)$, а A через $(0;0)$

остальные не пересекутся с квадратом

две точки пересеч.

$\sqrt{a} = 17$

5) $\sqrt{a} > 17$

не будет пересечений => решений вообще

итого: $\left[\begin{array}{l}\sqrt{a}=7\\ \sqrt{a}=17\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}a=49\\ a=289\end{array}\right.$ Ответ:

№2.

$$\cos 7x+\cos 3x+\sin 7x-\sin 3x+\sqrt{2}\cos 4x=0$$

$$\cos 7x+\cos 3x=2\cdot\cos\frac{7x+3x}{2}\cdot\cos\frac{7x-3x}{2}$$

$$\sin 7x-\sin 3x=2\sin\frac{7x-3x}{2}\cdot\cos\frac{7x+3x}{2}$$

$$2\cos 5x\cos 2x+2\sin 2x\cos 5x+\cancel{2\sqrt{2}\cos 2x\sin 2x}=0$$

$$\sqrt{2}\,(\cos^2 2x-\sin^2 2x)=0$$

$$2\cos 5x(\cos 2x+\sin 2x)=\sqrt{2}\,(\sin 2x-\cos 2x)(\cos 2x+\sin 2x)$$

$\cos 2x+\sin 2x=0$ – корень

$$\cancel{\sqrt{2}}^{\,2}\cos 5x=\cancel{\sqrt{2}}^{\,\sqrt{2}}(\sin 2x-\cos 2x)$$

$$\cos 5x=\cancel{\tfrac{1}{\sqrt{2}}}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x$$

$$\cos 5x=\sin\frac{\pi}{4}\sin 2x-\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x$$

$$\cos 5x=-\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x-\sin\frac{\pi}{4}\sin 2x\right)$$

$$\cos 5x=-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)$$

$$\cos 5x=\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$$

отсюда:

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x+\sin 2x=0\\ 5x=2x-\frac{3\pi}{4}+2\pi k\\ 5x=\frac{3\pi}{4}-2x+2\pi k\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=-1\\ 3x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k\\ 7x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k\end{array}\right.$$

$k\in\mathbb{Z}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2 продолжение.

$$\left[\begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{4} + \pi k \\ x &= -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi k \\ x &= \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k \end{aligned}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$

№3.

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

ОДЗ:

$\cancel{\ln(-y)}$ $-y > 0 \Rightarrow y < 0$; $\cancel{x > 0}$ из $\ln(xy^2)$
из $\ln(-y)$ $\quad x > 0$

$x^{\ln x^2 y^4} \cdot y^{\ln(-y)} + x^{\ln(-y)^7} = 0$

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \Rightarrow \left(e^{\left(-\frac{x^7}{y}\right)}\right)^{\ln(-y)} = \left(e^{x}\right)^{2\ln(xy^2)}$$

$$-y^{\frac{-x^7}{y}} = (x^2 y^4)^x \quad ; \quad x^{2x} y^{4x} - (-y)^{\frac{x^7}{(-y)}} = 0 \quad ; \quad -y^{4x} = y^{4x}$$

т.к. четн. степень

$$(-y)^{4x}\left(x^{2x} - (-y)^{\left(\frac{x^7}{-y} - 4x\right)}\right) = 0$$

$\neq 0$

$$x^{2x} = (-y)^{\frac{x^7 - 4x(-y)}{-y}}$$

возьмём $\sqrt[2x]{\ }$ от обоих частей, т.к. они обе > 0

$$x = (-y)^{\frac{x^6 - 4(-y)}{2(-y)}}$$

подставим в нижнее ур-е:

$$y^2 - 2(-y)\cdot(-y)^{\frac{x^6 - 4(-y)}{2(-y)}} - 3(-y)^{\frac{x^6 - 4(-y)}{-y}} + 12(-y)^{\frac{x^6 - 4(-y)}{2(-y)}} + 4y = 0$$

$$y^2 - 2(-y)^{\frac{x^6 - 4(-y)}{(-y)}} - 3(-y)^{\frac{x^6 - 4(-y)}{-y}} + 12(-y)^{\frac{x^6 - 4(-y)}{2(-y)}} + 4y = 0$$

$-y = t$

$$t^2 - 5t^{\frac{x^6 - 4t}{t}} + 12t^{\frac{x^6 - 4t}{2t}} - 4t = 0$$

$$t^2 + \frac{12t^{\frac{x^6}{2t}}}{t^2} = 4t + \frac{5t^{\frac{x^6}{t}}}{t^4}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7.

$$\begin{cases} y > 3^x + 4\cdot 3^{28} \\ y \le 93 + 3(3^{27}-1)x \end{cases}$$

$$3^x + 4\cdot 3^{28} < y \le 93 + 3^{28}x - 3x$$

1) промежуток ~~должен~~ должен быть >0

$$93 + 3^{28}\cdot x - 3x - 3^x - 4\cdot 3^{28} > 0$$

$$f(x) = 93 + 3^{28}(x-4) - 3x - 3^x > 0$$

$$f' = 3^{28} - 3 - \cancel{\ln 3}\, 3^x \ln 3$$

0 производной достигается один раз $\Rightarrow$ макс. два корня.

один корень $x=4$

другой $x=31$ тогда промежуток 0

рассмотрим все целые x из пр-ка $[5;30]$

и найдём сколько y им соотв:

$$f(5) = 93 + 3^{28} - 15 - 3^5 = 78 + 3^{28} - 3^5$$

тогда всё $78 + 3^{28} - 3^5 - 1$ целых y

$$f(6) = 93 + 3^{28}\cdot 2 - 18 - 3^6 = 75 + 2\cdot 3^{28} - 3^6$$

тогда $78 + 2\cdot 3^{28} - 3^5 - 1$ целых y

$\dots$

$$f(30) = 93 + 3^{28}\cdot 26 - 90 - 3^{30} = 3 + 3^{28}\cdot 15$$

$3 + 3^{28}\cdot 15 - 1$ целых y

Итого необходимо посчитать сумму:

$$(78+75+\overset{1)}{72}+\ldots+3)+\overset{2)}{3^{28}(1+2+3\ldots+26)}-$$
$$-(3^5+3^6+\overset{3)}{3^7}+\ldots+3^{30})-26$$

1) арифм пр-сcия.

$$S_1=\cancel{3+78}\ \frac{(3+78)\cdot 26}{2}=81\cdot 13$$

$$\begin{array}{r} \times\ 13 \\ 81 \\ \hline 13 \\ 104\ \ \\ \hline 1053 \end{array}$$

2) $3^{28}\cdot$ арифм. пр-сcию.

$$S_2=3^{28}\cdot\frac{(1+26)\cdot \overset{13}{\cancel{26}}}{\cancel{2}}=3^{28}\cdot 27\cdot 13$$

$$\begin{array}{r} \times\ 27 \\ 13 \\ \hline 81 \\ 27\ \ \\ \hline 351 \end{array}$$

3) геом. прогрессия

$$S_3=\frac{3^5(3^{26}-1)}{2}$$

Итого: $S=1053+3^{28}\cdot 351-26-\frac{3^{31}}{2}+\frac{3^5}{2}=$

$$=1027+3^{28}\left(351-\frac{9}{2}\right)+\frac{243}{2}=$$

$$=1148{,}5+3^{28}\cdot 346{,}5$$

количество целых y

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 8

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)