МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФ[

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $64827 = 3^3 \cdot 7^4$, сл. восьмизначное число может состоять из:

1) четырех семерок, трех ~~единиц~~ троек и одной единицы, таких чисел

$$\bar{P}_n = \frac{8!}{4!\,3!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{6} = 280$$

2) четырех семерок, одной девятки, одной тройки и двух единиц таких чисел

$$\bar{P}_n = \frac{8!}{4!\,2!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2} = 840$$

Больше составить восьмизн. чисел, чтобы произв. его цифр ~~делим~~ было равно 64827 не получится, т.к. оно должно содерж. $7^4 3^3$, при этом семерки должны быть в 1-й степени (т.к. $7^2 = 49 > 9$), одна из троек может быть во второй ($3^2 = 9$, $3^3 = 27 > 9$)

Ответ: кол-во восьмизн. чисел 1120.

2) $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x \cos 2x + 2\cos 5x \sin 2x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x + \sin 2x)(2\cos 5x + \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x) = 0$

1) $\cos 2x + \sin 2x = 0$

$tg\, 2x = -1$

$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

2) $2\cos 5x + \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x = 0$

$\cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}(\cos 2x \cos\frac{\pi}{4} - \sin 2x \sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos 2x + \frac{\pi}{4})$

$\cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$

$2\cos(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8})\cos(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\cos\left(\frac{7x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=0$

$\frac{7x}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+\pi k$

$\frac{7x}{2}=\frac{3\pi}{8}+\pi k$

$x=\frac{3\pi}{28}+\frac{2\pi k}{7},\ k\in\mathbb{Z}$

$\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=0$

$\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+\pi k$

$\frac{3x}{2}=\frac{5\pi}{8}+\pi k$

$x=\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2};\ \frac{3\pi}{28}+\frac{2\pi k}{7};\ \frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

(5) $\begin{cases}|x+y+8|+|x-y+8|=16\\ (|x|-8)^2+(|y|-15)^2=a\end{cases}$ a - ? 2 решения

1. $|x+y+8|+|x-y+8|=16$ - график предст. собой квадрат

$a=x+y+8\geq 0$
$y\geq -x-8$

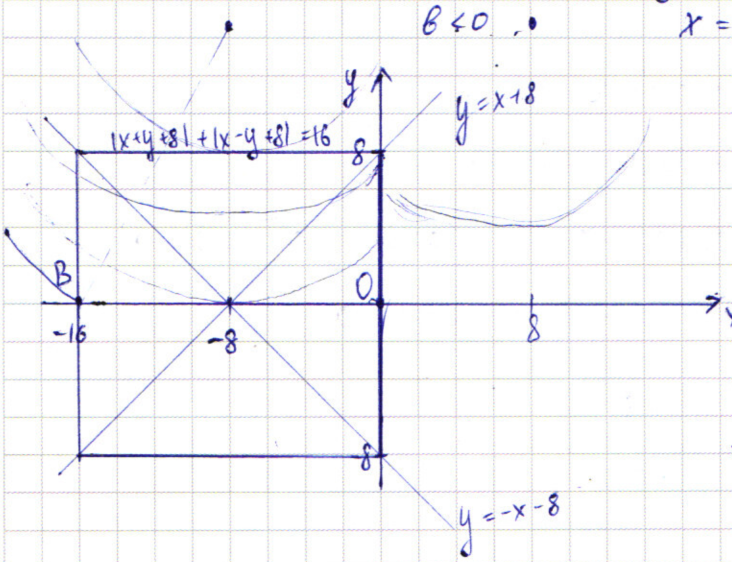
$b=x-y+8\geq 0$
$y\leq x+8$

$a>0,\ b>0$: $x+y+8+x-y+8=16$, $x=0$

$a>0,\ b<0$: $x+y+8-x+y-8=16$, $y=8$

$a<0,\ b>0$: $-x-y-8+x-y+8=16$, $y=-8$

$a<0,\ b<0$: $-x-y-8-x+y-8=16$, $x=-16$



2. $(|x|-8)^2+(|y|-15)^2=a$ - окружность, радиусом $\sqrt{a}$ $(a>0)$

$x>0,\ y>0$: $(x-8)^2+(y-15)^2=a$ центр $(8;15)$
Окр. имеет не более 1 общ. точки с квадратом

$x>0,\ y<0$: $(x-8)^2+(y+15)^2=a$ центр $(8;-15)$
не более 1 общ. точки

$x<0,\ y>0$: $(x+8)^2+(y-15)^2=a$ центр $(-8;15)$
будут иметь 2 общ. точки, когда $\begin{cases}a>(15-8)^2 & \text{(при } a=49 \text{ касание)}\\ a<15^2+8^2 & \text{(при } a=289 \text{ точки B и O)}\end{cases}$

т.е. ~~при~~ для окр. $(x+8)^2+(y-15)^2=a$

$a<49$ – не имеет общ. точек
$a=49$ – 1 общ. точка (касание)
$49<a\le 289$ – 2 общ. точки
$a>289$ – не имеет общ. точек

$x<0$, $y<0$: $(x+8)^2+(y+15)^2=a$
центр $(-8;-15)$

аналогично пред. случаю

Ответ: 2 решения при $a\in(49;289]$.

③ $\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} & (1) \\ y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0 & (2) \end{cases}$ ОДЗ: $\begin{cases} y<0 \\ x>0 \end{cases}$

Из (1): $\ln(-y)\ln\left(-\frac{x^7}{y}\right)=2\ln(xy^2)\ln x$

$\ln(-y)(\ln x^7-\ln(-y))=(2\ln x+4\ln(-y))\ln x$

пусть $\ln x=a$, $\ln(-y)=b$

$b(7a-b)=(2a+4b)a$
$7ab-b^2=2a^2+4ab$
$2a^2-3ab+b^2=0$
$D=9b^2-8b^2=b^2$
$a=\frac{3b\pm b}{4}=\left[\begin{array}{l} b \\ b/2 \end{array}\right.$

$\ln x=\ln(-y)$ $\quad$ $2\ln x=\ln(-y)$

$x=-y$ $\quad$ $x^2=-y$, $y=-x^2$

Подставляем во (2):

$x=-y$: $y^2-2y^2-3y^2-12y+4y=0$
$-4y^2-8y=0 \quad |:(-4y)$, $y\neq 0$ по ОДЗ
$y+2=0$
$\begin{cases} y=-2 \\ x=2 \end{cases}$

$x^2=-y$, $x=\sqrt{-y}$: ~~$y^2+2\sqrt{-y}\,y+3y+12\sqrt{-y}+4y=0$~~
~~$y^2+2\sqrt{-y}(y+6)+7y=0$~~
$x^4-2x^3-3x^2+12x-4x^2=0$
$x^4-2x^3-7x^2+12x=0$
$x^3-2x^2-7x+12=0$

$x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$

$x = 3$

	1	−2	−7	12
3	1	1	−4	0

$x^2 + x - 4 = 0$

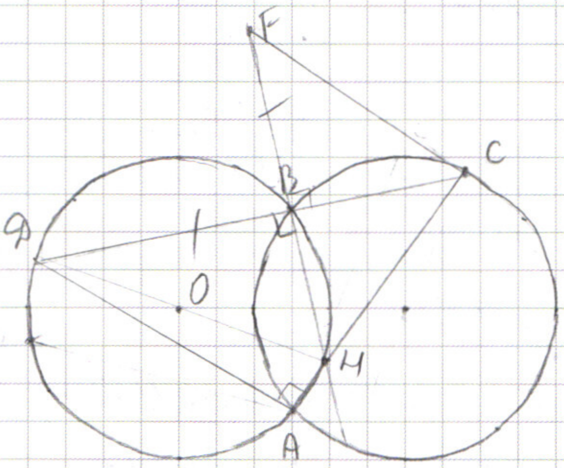
$D = 1 + 16 = 17$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$\begin{cases} x = 3 \\ y = -9 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y = -\frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \text{ (не уд. ОДЗ)} \\ y = -\frac{9+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

Ответ: $(2; -2)$; $(3; -9)$; $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-9}{2}\right)$

⑥ а)



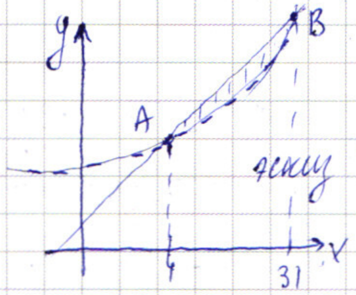
1) т.к. $\angle DAH = 90°$, то $(\cdot) O \in DH$
O-центр окружн.

$\angle DBH = 90°$, т.к. опирается на диаметр, т.

$BF \cap AC = H$.

2) $\Delta DHB = \Delta BFC$, т.
$FC = DH = 2R = 34$

⑦ $\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \le 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$



~~Чтоб~~ Для точек A и B:

$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3^{28}x - 3x$

$3^x = 93 + 3^{28}(-4 + x) - 3x$

$x = 4$ (гр. пересекутся
$x = 31$ только 2 раза)

$x = 5$: кол-во точек:
$93 + 3^{28} \cdot 5 - 15 - 4 \cdot 3^{28} - 3^5 - 1$

$x = 6$: $93 + 2 \cdot 3^{28} - 18 - 3^6 - 1$

....

$x = 30$: $93 + 28 \cdot 3^{28} - 90 - 3^{30} - 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Итого суммарно точек:

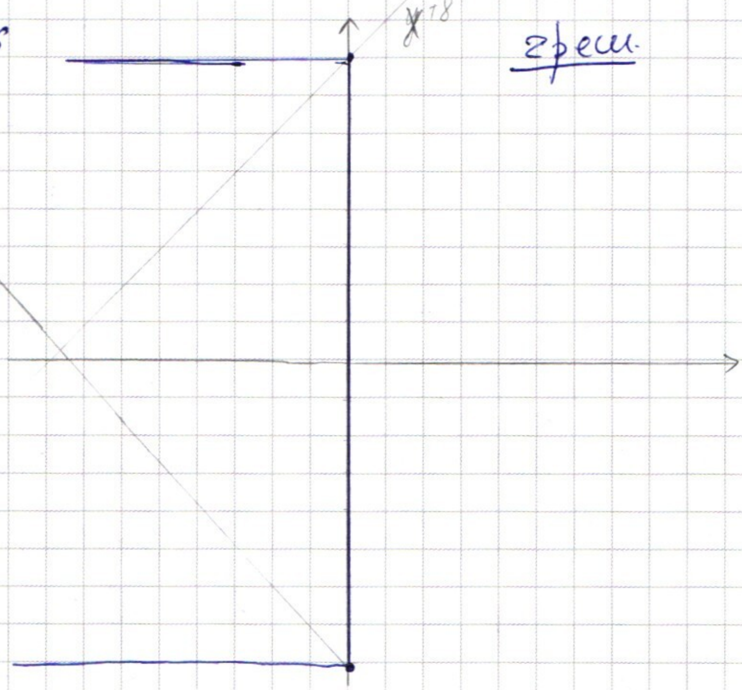
$$\underbrace{(78+75+\ldots+3)}_{\text{арифм. прогр. } d=3} + \underbrace{(3^{28}+2\cdot 3^{28}+\ldots+3^{28}\cdot 28)}_{\cancel{\text{геометр}}} - \underbrace{(3^5+3^6+\ldots+3^{30})}_{\text{геометр. пр. } q=3} - 26$$

$$3^{28}\underbrace{(1+2+\ldots+28)}_{\text{арифм. пр. } d=1}$$

$= \cancel{(3^{28}\cdot 1+28}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$



$x+y+8 \geq 0$
$y \geq -x-8$

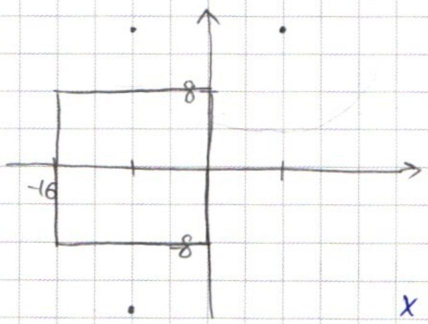
$x+y+8+x-y+8=16$
$2x=0$
$x=0$

$x-y+8 \geq 0$
$y \leq x+8$

$x+y+8-x+y-8=16$
$2y=16$
$y=8$

$-x-y-8+x-y+8=16$
$y=-8$

$-x-y-8-x+y-8=16$
$x=-16$



$x>0$ $\quad (x-8)^2+(y-15)^2=a$
$y>0$ $\quad O(8;15)$

$x<0$ $\quad (x+8)^2+(y-15)^2=0$
$y>0$ $\quad O(-8;15)$

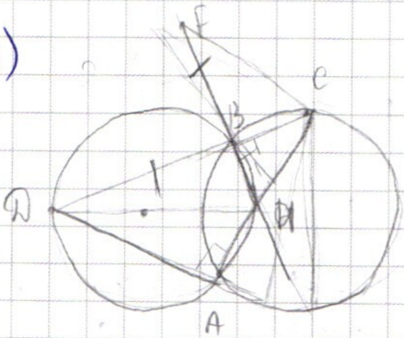
$(15-8)^2 < a \leq 15^2$
$49 < a \leq 15^2$

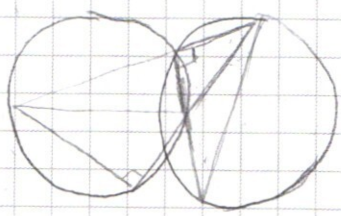
$15^2=225$
$+\ 64$
289

$\underline{49 < a \leq 225}$

$x<0$ $\quad (x+8)^2+(y+15)^2=0$
$y<0$ $\quad (-8;-15)$

6)



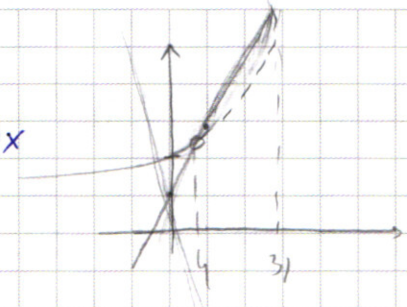


$\frac{BH}{AD} = \frac{HC}{BC+BD}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

7) $\begin{cases} y > 3^x + 4\cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27}-1)x \end{cases}$



$y(0) = 1 + 4\cdot 3^{28}$

$y(0) = 93 + \cancel{3^{28}} + \cancel{3x}$

$3^x + 4\cdot 3^{28} = 93 + 3^{28}x - 3x$

$3^x = 93 + 3^{28}(-4+x) - 3x$

$93 + 3(3^{27}-1)x > 3^x + 4\cdot 3^{28}$

$\times\,27 \quad 3 \quad 81 \quad 3 \quad 243$

$\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 31 \end{array}\right.$

$93 + 3^{28}x - 3x - 4\cdot 3^{28} - 3^x =$

$x=5 \quad 93 + 3^{28}\cdot 5 - 15 - 4\cdot 3^{28} - 3^5 =$
$= 78 + 3^{28} - 35$

$x=6 \quad 93 + 2\cdot 3^{28} - 18 - 3^6 = 75 + 2\cdot 3^{28} - 3^6$

$x=30 \quad 93 + 28\cdot 3^{28} - 30 - 3^{30} = 3 + 28\cdot 3^{28} - 3^{30}$

$S_{\text{гол. пр.}}$ $\quad b \quad bq \ldots bq^{n-1}$ $\quad S \quad \dfrac{1+n-1}{2}n = \dfrac{n^2}{2}$

$1 \quad 3 \quad 9$
$S = 13$

$b(1+q+\ldots q^{n-1}) =$

$= b(\cancel{1} + q^{\frac{(n)-1)^2}{2}})$

$S = 1(\cancel{1} + \cancel{q}\, 3^{\frac{9}{2}}) =$

$c^2 + \cancel{12d} + 2d(c+6) + 7c = 0$

$c^2 + 2dc + 12d + 7c = 0$

$c^2 + c(2d+7) + 12d = 0$

$D = 4d^2 + 28d + 49 - 48d = 4d^2 - 20d + 49$

$c = \dfrac{-2d - 7 \pm \sqrt{4d^2 - 20d + 49}}{2}$

$\dfrac{1 + 17 - 2\sqrt{17}}{4} = \dfrac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \dfrac{9 + \sqrt{17}}{2}$

$y^2 + 7y = 2\sqrt{-y}(y+6)$

$y^4 + 14y^3 + 49y^2 = -2y(y^2 + 12y + 36)$

$y^3 + 14y^2 + 49y = -2y^2 - 24y - 36$

$y^3 + 16y^2 + 53y + 36 = 0$

$c^2 + 2d(c+6) + 7c = 0$

$y = -x^2$

$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0$

$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 12x = 0$

$27 - 18 - 21 + 12 =$
$= 39 - 39 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $64827 \,|\, \cancel{2} \quad : 3^3 \quad : 7^4 \qquad 64827 = 3^3 \cdot 7^4$

64827	2
21609	3
7203	3
2401	7
343	7
49	7
7	7
1	

Восьмизн. число состоит из:

1) 4х семерок, 3-х 3 и 1 един.

$P_n = \frac{8!}{4!3!} = \frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{6} = 5\cdot7\cdot8 = 40\cdot7 = 280$

2) 4-х семерок, 1 9-ки, 1-й 3-ки и 2-х ед.

$P_n = \frac{8!}{4!2!} = \frac{5\cdot\overset{3}{\cancel{6}}\cdot7\cdot8}{\cancel{2}} = 40\cdot21 = 840$

Всего: 1120

2) $\cos7x + \cos3x + \sin7x - \sin3x + \sqrt2\cos4x = 0$

$2\cos5x\cos2x + 2\cos5x\sin2x + \sqrt2\cos4x = 0$

$2\cos5x(\cos2x+\sin2x) + \cancel{\sqrt2\cos4x}\ \sqrt2(\cos2x-\sin2x)(\cos2x+\sin2x) = 0$

$(\cos2x+\sin2x)(2\cos5x + \sqrt2(\cos2x - \sin2x)) = 0$

$\cos2x + \sin2x = 0 \qquad 2\cos5x + \sqrt2\cos2x - \sqrt2\sin2x = 0$

$tg2x = -1 \qquad \sqrt2\cos5x + \cos2x - \sin2x = 0$

$\sqrt2\cos5x = \sqrt2\cos2x\cos3x - \sqrt2\sin2x\sin3x$

$\cos2x(\sqrt2\cos3x+1) - \sin2x(\sqrt2\sin3x+1) = 0$

$\sqrt2\cos5x = \cos\frac{\pi}{4}\cos5x = \frac12(\cos(\quad) + \cos(\quad))$

$\cos2x - \sin2x = \sqrt2(\cos2x\cos\frac{\pi}{4} - \sin2x\sin\frac{\pi}{4}) =$
$= \sqrt2\cos(2x+\frac{\pi}{4})$

$\Rightarrow \cos5x + \cos(2x+\frac{\pi}{4}) = 0$

$\cos(\frac{7x}{2}+\frac{\pi}{8})\cos(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8}) = 0$

1 2 2 3

$P = \frac{4!}{2!} = 3\cdot4 = 12$

1223	2132
3221	2312
2231	2321
2213	2123
1322	1232
3122	3212

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

3) $\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y<0 \\ x>0 \end{cases}$

$\cancel{\frac{-(x^{7\ln(-y)})}{y^{\ln(-y)}}} =$

$\ln(-y)\cdot\ln\left(-\frac{x^7}{y}\right) = 2\ln(xy^2)\ln x$

$\ln(-y)(\ln x^7 - \ln(-y)) = (2\ln x + 2\ln(y^2))\ln x$

$\cancel{\ln(-y)}$ $\cancel{\ln x^7}$

$\cancel{3}\ln(-y)(\ln x - \ln(-y)) = (2\ln x + 4\ln(-y))\ln x$

$\ln x = a$

$\ln(-y) = b$

$b(a-b) = (2a+4b)a$

$ab - b^2 = 2a^2 + 4ab$

$2a^2 + 3ab + b^2 = 0$

$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$

$a = \frac{-3b \pm b}{4} = \left[\begin{array}{l} -\frac{b}{2} \\ -b \end{array}\right.$

$\ln x = \frac{-\ln(-y)}{2}$ $\qquad \ln x = -\ln(-y)$

$2\ln x = -\ln(-y)$ $\qquad x = \frac{1}{-y}$

$\ln x^2 = \ln\left(\frac{1}{-y}\right)$

$x^2 = \frac{1}{-y}$

$\cancel{y^2 + 2y\left(\frac{1}{-y}\right) - 3\frac{1}{-y} + \frac{12}{-y} + 4y = 0}$

$\cancel{y^3 - 2y + 3 - 12 + 4y^2 = 0}$

$\cancel{y^3 + 4y^2 - 2y - 9 = 0}$

$y^2 - 2 - \frac{3}{y^2} - \frac{12}{y} + 4y = 0$

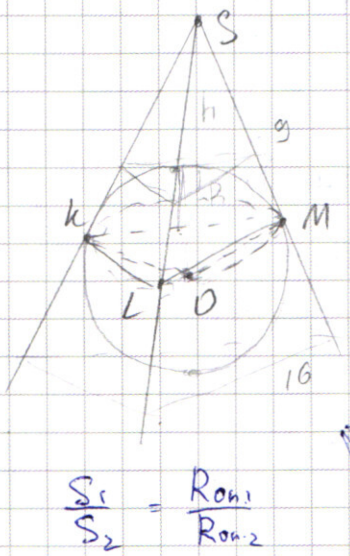
$y(y+4) - \frac{3}{y^2}(1+4y) - 2 = 0$

$y^4 - 2y^2 - 3 - 12y + 4y^3 = 0$

$\cancel{y^4 + 2y^2 - 12y - 3 = 0}$ $\quad y^4 + 4y^3 - 2y^2 - 12y - 3 = 0$

$16 + 32 - 8 - 24 - 3 =$
$= 48 - 35$

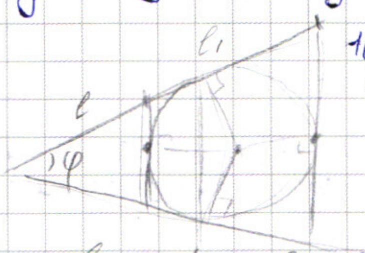
4)



$\frac{h}{h+2R} = \frac{9}{16}$

$16h = 9h + 18R$

$7h = 18R$



$\frac{l}{l+l_1} = \frac{h}{h+R} = \frac{18}{7} \frac{9}{16}$

$\cancel{7l = 18l + 18l_1}$ $\quad \frac{l}{l_1} = \frac{h}{2R} = \frac{9}{7}$

$\cancel{\frac{\varphi}{2}} = \quad \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{R}{h+R} = \frac{R}{\frac{18}{7}R+R} =$

$= \frac{7}{25}$

$l + l' = (h+R)\cdot\cos\frac{\varphi}{2}$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{R_{on1}}{R_{on2}}$

$S = \frac{abc}{4R}$

$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{h}{h+2R}\right)^3 \cdot \frac{R_2}{R_1}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)