

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

- 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
- 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

- 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
- 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .

- 7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Zagara 1

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

$\Rightarrow$ 7-отдельная цепочка $7k \geq 9 \Rightarrow$ из цепочек 4-символов

II: $\{7, 7, 7, 7, 1, 1, 3, 9\}$ либо 3 тройки, либо $3 \cdot 3 = 9$

II $\{7, 7, 7, 7, 1, 3, 3, 3\}$ $\$ 3 \cdot 3 \cdot 3 > 9$

$\Rightarrow$ безмодно 2 набора нормален для каждого кол-во чисел.

$$\underline{I}: 8 \cdot 7 \cdot \frac{6.5}{2!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$$

(cm. no. 3) (cm. no. 9) (cm. no. 1)

$$\text{II} \quad \delta \cdot \frac{7.6.5}{3} = \delta \cdot 7.5$$

(числ.) (числ. расч.)

$$I + II = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 + 8 \cdot 7 \cdot 5 = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 20 = 1120 \text{ ~~1120~~ }^{20000}$$

Задача 6

$\gamma = 12$

$$W_1 \cap W_2 = \{A, B\} \quad W_1$$

Cew.

D & W₁

BECD

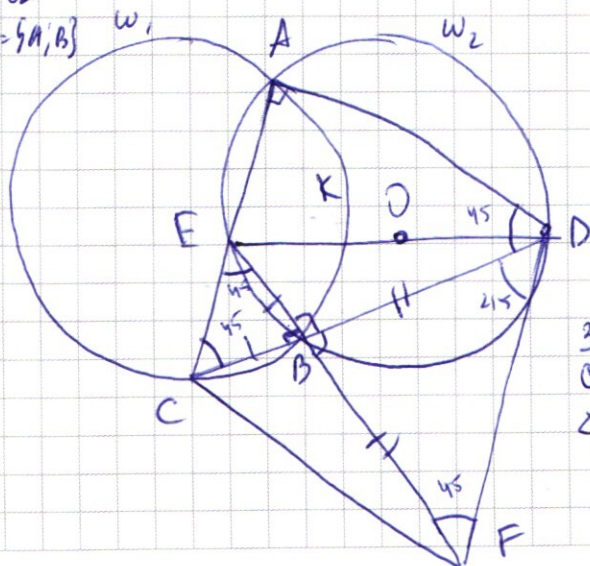
$\angle CAD = 90^\circ$

$$bF = bD$$

CF = ?

$$p_{\text{H}^+} = 16$$

SACP



1 BF - перп. к BD $\Rightarrow \angle EBP = 30^\circ \Rightarrow$

ED - диаметр.

с группой сторон $\angle CAD = 30^\circ \Rightarrow$
 тогда центр на дуге мкр. дуги из
 концов которой $D \Rightarrow AC$ ~~не~~ пересек.
 $W_i = E$.

2. P1: $ADBE - \angle EAD = \angle EBD = 90^\circ \rightarrow$ *сп. 87*
 $ADBE - \text{впис} \Rightarrow \angle CEB = \angle ADB = \alpha$ *(идеи 180°)*

3. Т.к. окр. равны, то в силу
свойств $\angle AEB = \angle AKB \Rightarrow$
 $\angle ACB = \angle ADB$ (всп. на равные дуги
равных окр.)

(см. на обороте)

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

а база

$$y = 3^x + 4 \cdot 3^{2x}$$

$$\frac{(x^2)^{\ln(-y)}}{x^{2\ln(xy^2)}} = (-y)^{\ln(-y)} \begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{2x} \\ y \leq 3^x + 3 \end{cases}$$

$$= e$$

$$x^{\frac{2\ln(-y)^2}{2\ln(xy^2)^2}}$$

$$3^x + 3^{2x} - 3x > 3^x + 4 \cdot 3^{2x}$$

$$x^{\log_{xy^2} y^2} = e$$

$$\sin \alpha + \sin \beta =$$

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos$$

$$\log_{xy^2} y^2 \cdot \ln x$$

$$= 1$$

$$(x + y)(-3x + y)$$

$$(\cancel{x + y})(\cancel{-3x + y})$$

$$(x + y)(-3x + y) = 0$$

$$(-3x + y)(-x + y + \frac{4}{y}) = 0$$

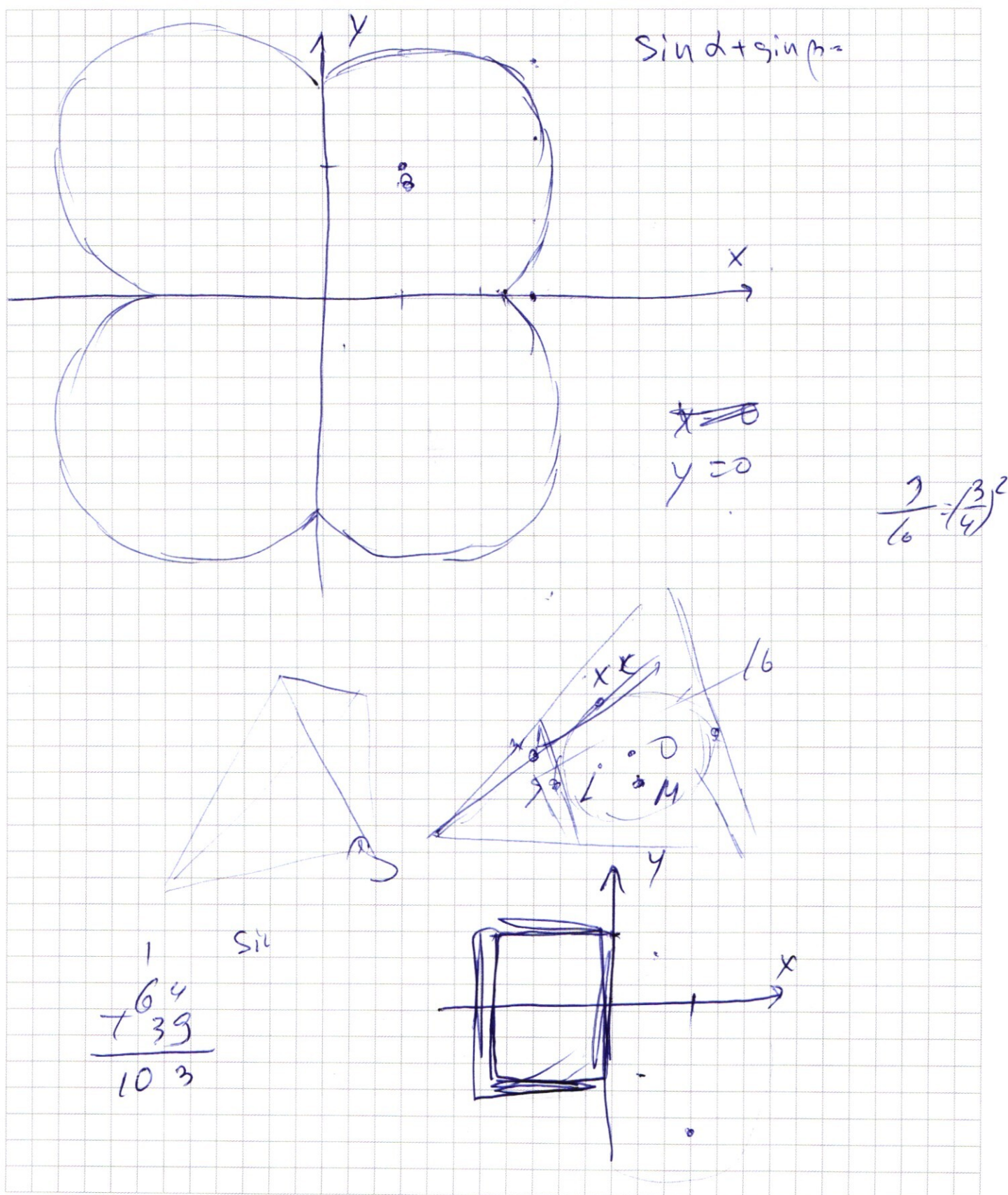
$$\frac{\ln(-y)^2 \cdot \ln x - 2\ln x^2 - \ln y^4}{\ln(x^2 y^4)} = 0$$

$$\ln(x^2 y^4)$$

$$\frac{\ln x (\ln(-y)^2 - \ln y^4 - 2)}{\ln x^2 y^4} = 0$$

$$\ln x^2 y^4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 65

пусть $R(F, AC) = h \Rightarrow$

$$S_{ACF} = \frac{h \cdot AC}{2}$$

$$S_{EFC} = \frac{h \cdot EC}{2} \Rightarrow h = \frac{2S_{EFC}}{EC}$$

$$\Rightarrow S_{ACF} = \frac{2S_{EFC} \cdot AC}{2EC} = S_{EFC} \cdot \frac{AC}{EC}$$

$$S_{EFC} = \sqrt{p(p-EC)(p-EF)(p-CF)} = *$$

$$p = \frac{EC+EF+CF}{2} = \frac{16\sqrt{2} + 16 + 30 + 34}{2} = 8\sqrt{2} + 8 + 15 + 17 = 40 + 8\sqrt{2}$$

$$* = \sqrt{(40+8\sqrt{2})(40-8\sqrt{2})(6+8\sqrt{2})(8\sqrt{2}-6)}$$

$$= \sqrt{(1600 - 64 \cdot 2)(128 - 36)} = \sqrt{64(25-2) \cdot 92} =$$

$$= \sqrt{64 \cdot 23 \cdot 4 \cdot 23} = 23 \cdot 8 \cdot 2 = 23 \cdot 16 = 328$$

$$\Rightarrow S_{ACF} = 328 \cdot \frac{23\sqrt{2}}{16\sqrt{2}} = 23^2 = \boxed{759}$$

Ответ: $S_{ACF} = 759$

Задача 2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cdot \cos 4x \cos 2x + 2 \cdot \sin 2x \cos 4x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x (2 \cos 2x + 2 \sin 2x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 4x = 0 \\ \cos 2x + \sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2 \cos x \cdot \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left| \begin{array}{l} \cos^2 x \neq 0 \end{array} \right.$$

$$1 - \tan^2 x + 2 \tan x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$$

$$1 - \tan^2 x + 2 \tan x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\tan^2 x + 1)$$

$$\tan^2 x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) + 2 \tan x + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad t = \tan x$$

$$\frac{\sqrt{2}-2}{2} t + 2t + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$D = 4 - \frac{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}{2} = 4 - 2 \cdot (2-4) = 8$$

$$t_{2} = \frac{2(-2 \pm 2\sqrt{2})}{\sqrt{2}-2} \quad \begin{cases} t_1 = 4 \left(\frac{-2+\sqrt{2}}{-2+\sqrt{2}} \right) = 4 \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = 4 \frac{(2-\sqrt{2})^2}{(-2+\sqrt{2})(-2-\sqrt{2})} = \frac{6+4\sqrt{2}}{2} = 3+2\sqrt{2} \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x_1 = \arctan(4) \\ x_2 = \arctan(3+2\sqrt{2}) \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3

$$\begin{aligned} 0 \text{ D } 3: & +y > 0 \Rightarrow y < 0 \\ & xy^2 > 0 \Rightarrow x > 0 \\ & y \neq 0 \end{aligned}$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^4)$$

$$\begin{cases} y^2 + 2xy - 3x + 12x + 4y = 0 \Leftrightarrow (3x + y)(y - x + 4) = 0 \end{cases}$$

$$(y^2 - xy + 4y) + 3xy - 3x^2 + 12x = 0$$

$$\begin{aligned} 3x + y &= 0 \\ y &= x - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \ln(-y) \\ \frac{x^2 \ln(xy^4)}{x^2 \ln(xy^4)} &= -y^{\ln(-y)} \end{aligned}$$

$$\frac{\ln(-y)^2}{\ln(xy^4)} = e$$

$$\frac{\ln(-y)^2 \cdot \ln(x)}{\ln(xy^4)} = 1$$

$$\frac{\ln(-y)^2 \cdot \ln(x) - (\ln x^2 + \ln y^4)}{\ln xy^4} = 0$$

$$\frac{\ln x (\ln(-y)^2 - (\ln(-y))^2 - 2)}{\ln xy^4} = 0$$

$$\frac{\ln x (3 \ln(-y) - 2)}{\ln xy^4} = 0$$

$$\begin{aligned} \ln x &= 0 & x &= 1 \\ \ln(-y) &= \frac{2}{3} & -y &= -e^{\frac{2}{3}} \\ \ln xy^4 &\neq 0 & xy^4 &\neq 1 \\ & & xy^2 &\neq 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x = y \\ x - y = y \\ x = 1 \\ y = -e^{\frac{2}{3}} \\ xy^2 \neq 1 \end{cases}$$

$$\ln y^4 = \ln(-y)^4$$

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -3 \\ y &= -e^{\frac{2}{3}} \\ x &= \frac{e^{\frac{2}{3}}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -e^{\frac{2}{3}} \\ x &= -e^{\frac{2}{3}} + 4 \end{aligned}$$

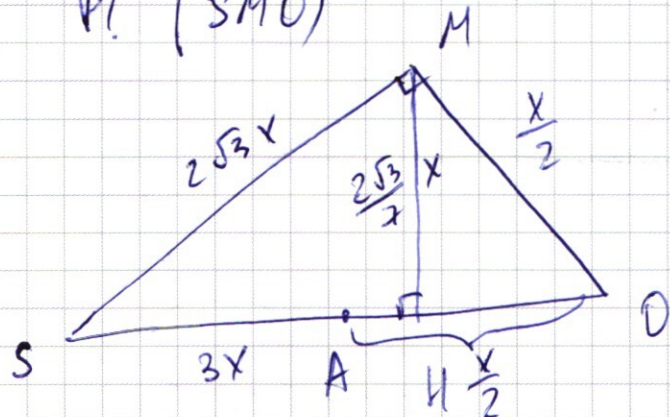
Ответ:

$$\begin{aligned} &(1, -3), \left(\frac{e^{\frac{2}{3}}}{3}, -e^{\frac{2}{3}}\right), \\ &(-e^{\frac{2}{3}} + 4, -e^{\frac{2}{3}}). \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4.

Р1 (SMO)



SH = ?

$$SM = \sqrt{SO^2 - MO^2} = \sqrt{\left(\frac{7x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{48x^2}{4}} = \sqrt{12}x = 2\sqrt{3}x$$

$$h = MH = \frac{SM \cdot MO}{SO} = \frac{2\sqrt{3}x \cdot \frac{x}{2}}{\frac{7x}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{7}x$$

в $\triangle SHM$

$$SH = \sqrt{SM^2 - MH^2} = \sqrt{(2\sqrt{3}x)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{7}x\right)^2} =$$

$$= 2\sqrt{3}x \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = 2\sqrt{3}x \cdot \frac{\sqrt{48}}{7} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}}{7}x = \frac{24}{7}x$$

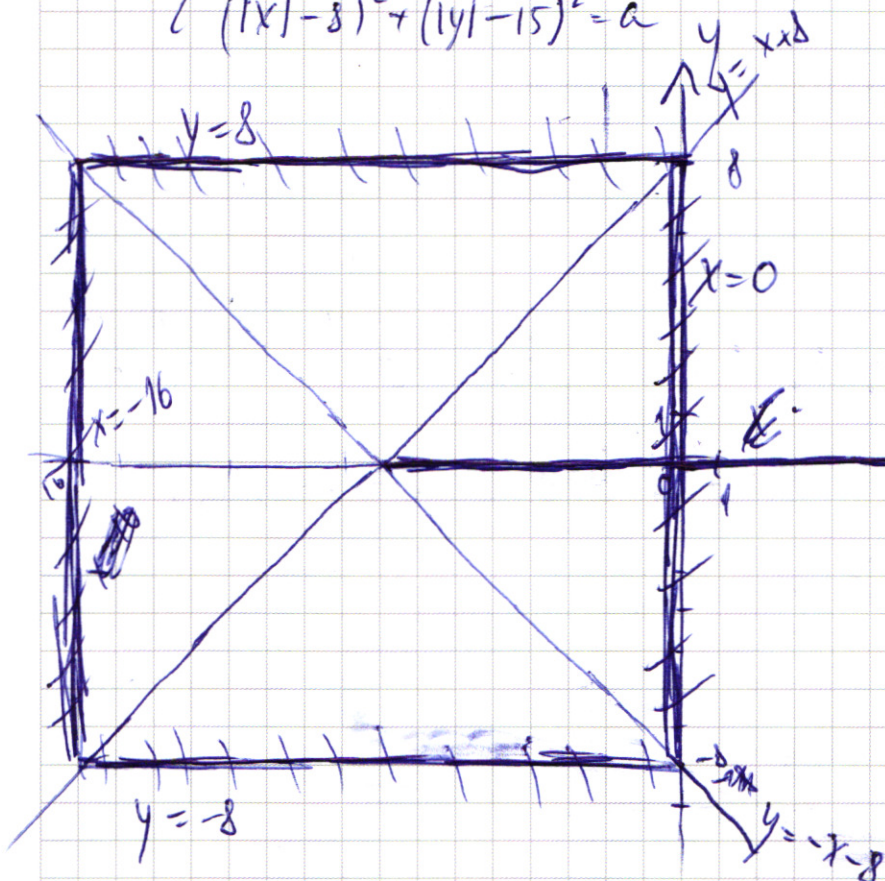
$$SH = \frac{24}{7}x \rightarrow$$

$$S_{MKK} = \left(\frac{SH}{SA}\right)^2 \cdot S_{\alpha} = \left(\frac{\frac{24}{7}x}{3x}\right)^2 S_{\alpha} = \left(\frac{8}{7}\right)^2 \cdot 9 = \frac{576}{49} = 11\frac{37}{49}$$

$$\text{Ответ: } S_{MKK} = 11\frac{37}{49}; \angle SKO = \arcsin \frac{1}{7}$$

Задача 5.

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$



Ответ: $a=103$

++ - график I

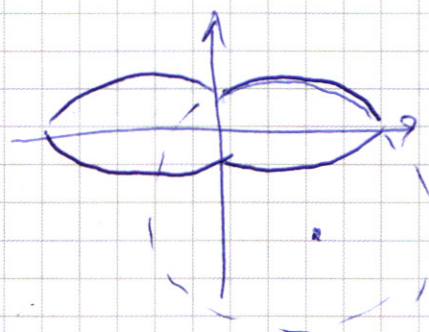


график I уравн. - квадрат.

$$\begin{cases} x+y+8 > 0 & y > -x-8 \\ x-y+8 > 0 & y < x+8 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+8 > 0 & y > -x-8 \\ x-y+8 < 0 & y > x+8 \\ y=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+8 < 0 & y < -x-8 \\ x-y+8 > 0 & y < x+8 \\ y=-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+8 < 0 & y < -x-8 \\ x-y+8 < 0 & y > x+8 \\ -2x = 32 \\ x = -16 \end{cases}$$

график II уравн. -

каль окружности с центром в $(8; -15)$ и радиусом 15, отраженной во все четверти. т.е. $f(x, y)$ - симм. отн. к ох.

$\Rightarrow$ т.к. график I симм. от. ох $\rightarrow$ сколько корней

при $y > 0$ столько же скел

при $y < 0 \rightarrow$ пусть $y > 0$

при $y > 0$ корней нет $\rightarrow$

решения $(-16; 0); (0; 0) \rightarrow$

$a_1 = 8^2 + 15^2$ $a_2 = 8^2 + 15^2$ $a_1 + a_2 \rightarrow$ не подходит.

пусть $y > 0$ один корень

т.к. график II - эллипс $\rightarrow$ 2 корня
будет в $(-16; 8) \rightarrow$ второй в $(16; -8)$

$\rightarrow a = 8^2 + 7^2 = 103$

или в точке $(0; 8) \rightarrow (0; -8) \rightarrow$

$a = 8^2 + 7^2 = 103$ Если $y > 0$ больше 2х корн
всего их больше 2х $\rightarrow$ 1 против.

☐ черновик

☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 8

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

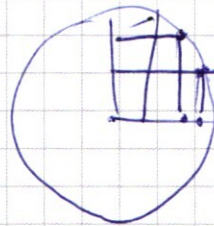
$$(-2 - \sqrt{2})(-2 + \sqrt{2}) = 4 - 2 = 2$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x$$

$$\sin 7x - \sin 3x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 4x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\cos 2x + \sin 2x + \sin \frac{\pi}{4} = 0$$



$$\cos 2x + 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

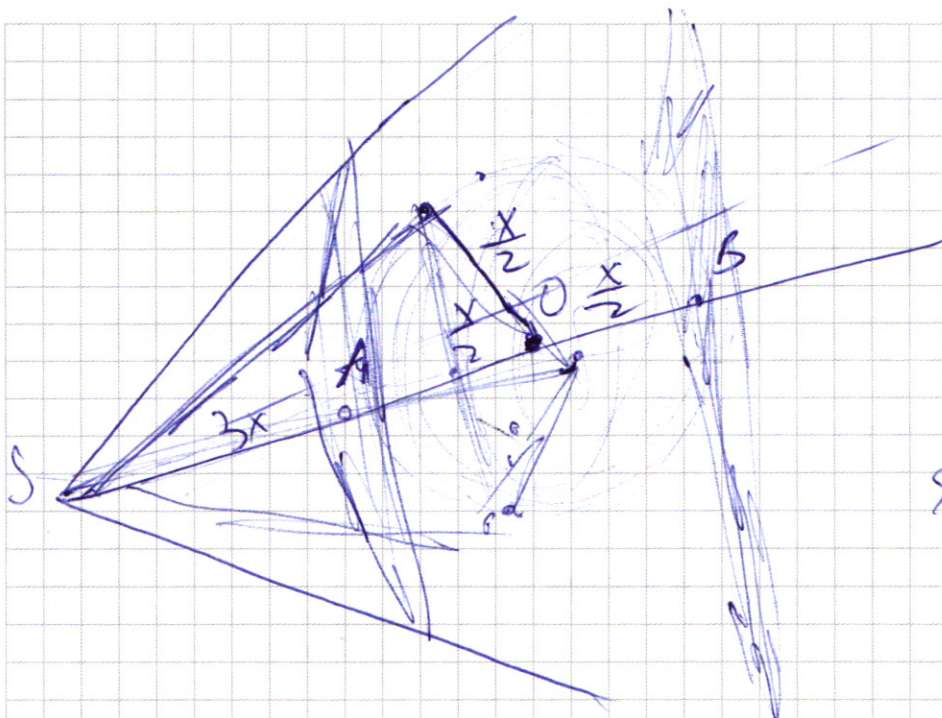
$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2 \cos x \cdot \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\cos^2 x + \sin^2 x) - 2 \sin^2 x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1 - \tan^2 x + 2 \tan x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

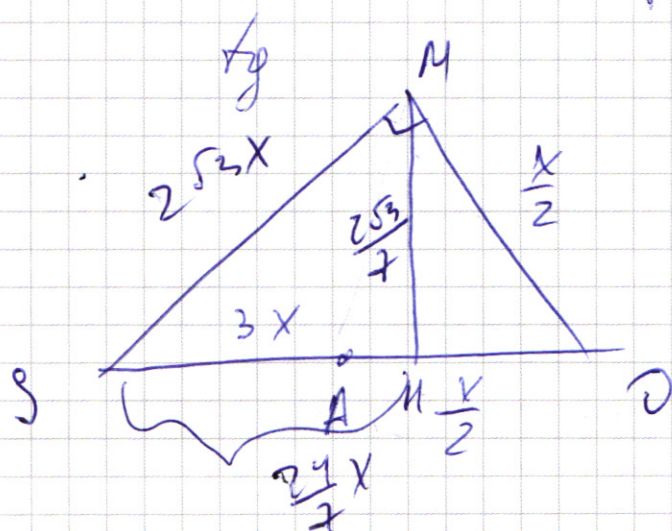
$$\tan^2 x + 1$$



$$\begin{array}{r} 3 \\ \sqrt{64} \\ \cdot 9 \\ \hline -526 \\ -950 \\ \hline 88 \\ 37 \end{array}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{3,549}{37}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{7x}{2} = \frac{1}{2}$$



$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{7x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \\ & = \frac{49x^2 - x^2}{2} = \\ & = \frac{48x^2}{2} = \sqrt{12x^2} \\ & = 2\sqrt{3}x \end{aligned}$$

$$h = \frac{2\sqrt{3}x \cdot \frac{x}{2}}{\frac{24}{2}} = \frac{\sqrt{3}x \cdot 2x}{24} = \frac{2\sqrt{3}}{7}x$$

$$\left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{7}\right)^2 = 2\sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{48}}{7} =$$

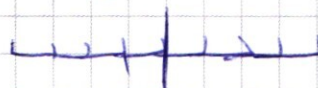
$$= \frac{2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}}{7}x = \frac{24}{7}x$$

$$S_{\min} = \left(\frac{24x}{7 \cdot 3x}\right)^2 \cdot 9 = \left(\frac{8}{7}\right)^2 \cdot 9$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $64827 = 9 \cdot 3$ $3^3 \cdot 7^4$

$$\begin{array}{r} 64827 \div 9 = 7203 \\ \underline{-63} \\ 18 \\ \underline{-18} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7203 \div 3 = 2401 \\ \underline{-6} \\ 12 \\ \underline{-12} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2401 \div 7 = 343 \\ \underline{-21} \\ 30 \\ \underline{-28} \\ 2 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 77721333 \\ 77721139 \end{array}$$

$$8 \cdot \cancel{8.9} \cdot 7.615 = 8 \cdot 7.5 +$$

$$+ \cancel{8.9} \cdot 8.7 \cdot \frac{3.5}{2} =$$

$$= 8 \cdot 7.5 \cdot 4 =$$

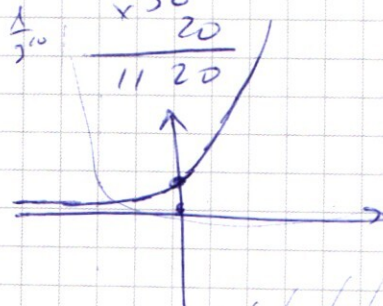
$$= 56 \cdot 20 = 1120 \text{ евро}$$

$$\begin{array}{r} 64827 \div 2.7 = 2401 \\ \underline{-54} \\ 108 \\ \underline{-108} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2401 \div 49 = 49 \\ \underline{-196} \\ 405 \\ \underline{-441} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 168 \cdot 36 = 160 + 36 \\ 156 \\ \times 43 \\ \hline 471 \end{array}$$

2) $y = 3^x + 4 \cdot 3^{28}$
 $y \leq 93 + 3 \cdot (3^{27} - 1)x$
 $y \leq 93 + 3^{28} - 3x$

$$3^{10} \cdot \frac{1}{2^{10}}$$



$$\sqrt{(23\sqrt{2})^2 + (30\sqrt{2})^2}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 460 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 460 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 460 \\ \hline 529 \end{array}$$

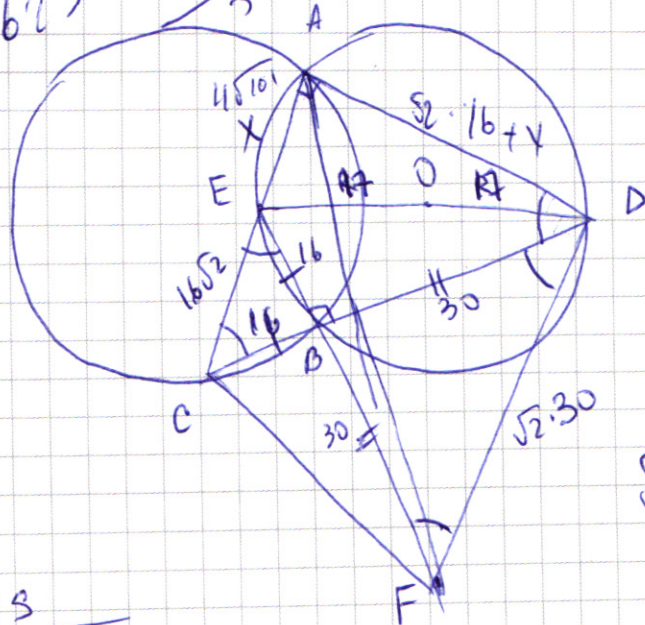
$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 36 \\ \hline 738 \\ 1476 \\ \hline 4428 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1600 \\ \times 128 \\ \hline 204800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 13 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \\ + 900 \\ \hline 1629 \end{array}$$

$$\sqrt{34^2 - 16^2} = 2\sqrt{17^2 - 8^2}$$

$$900 + \frac{1629}{9} = 161$$



$$23^2 + 30^2$$

$$\begin{array}{r} 1629 \overline{) 9} \\ \underline{72} \\ 181 \end{array}$$

$$\frac{30}{16\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2} + x}{16}$$

$$23\sqrt{2} - 16\sqrt{2} = x$$

$$\sqrt{34^2 - x^2} = 16\sqrt{2} + x$$

$$34^2 - x^2 = 32\sqrt{2}x + x^2 + 16^2 \cdot 2$$

$$2x^2 + 32\sqrt{2}x + 16^2 \cdot 2 - 17^2 \cdot 2 = 0$$

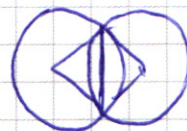
$$x^2 + 16\sqrt{2}x + 16^2 - 17^2 \cdot 2 = 0$$

$$x^2 + 16\sqrt{2}x - 322 = 0$$

$$x_{12} = \frac{-16\sqrt{2} \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$450 = 9 \cdot 25 \cdot 2$$

$$\begin{array}{r} 322 \\ + 128 \\ \hline 450 \end{array}$$



$$\Delta = (16\sqrt{2})^2 + 4 \cdot 322$$

$$\sqrt{34^2 - 16^2} = 2\sqrt{17^2 - 8^2} = 30$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 12 \\ \hline 119 \\ + 12 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ - 64 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\sqrt{289 - 2 \cdot 256} = \sqrt{289 - 178} = \sqrt{111}$$

$$\frac{289}{161} = 23$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ - 178 \\ \hline 111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ - 256 \\ \hline 33 \end{array}$$