

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$ .

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .

б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 16$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



## Согласие на обработку персональных данных

Я, **Сенников Михаил Витальевич**, паспорт **65 16 216177**, выдан **Отделением УФМС России по Свердловской области в г. Новоуральске 2 апреля 2016 г.**, зарегистрирован по адресу **Свердловская обл, г Новоуральск, ул Сергея Дудина, д 10, кв 112**,

даю свое согласие Образовательному Фонду «Талант и успех», зарегистрированному по адресу: Российская Федерация, 354349, Краснодарский край, г. Сочи, Олимпийский проспект, д. 40, являющемуся оператором по формированию и ведению государственного информационного ресурса о детях, проявивших выдающиеся способности (далее - оператор), на обработку следующих персональных данных:

- фамилия, имя, отчество (при наличии);
- дата рождения;
- реквизиты документа, удостоверяющего личность;
- наименование организаций, осуществляющих образовательную деятельность, в которых обучаюсь;
- класс / курс;
- сведения о получении образования вне организаций, осуществляющих образовательную деятельность (в форме семейного образования или самообразования);
- наименования образовательных программ, по которым обучаюсь;
- сведения об обучении по индивидуальному учебному плану в организации, осуществляющей образовательную деятельность;
- сведения об индивидуальных достижениях по итогам участия в олимпиадах и иных интеллектуальных и (или) творческих конкурсах, мероприятиях, направленных на развитие интеллектуальных и творческих способностей, способностей к занятиям физической культурой и спортом, интереса к научной (научно-исследовательской), творческой, физкультурноспортивной деятельности, а также на пропаганду научных знаний, творческих и спортивных достижений, подтвержденных соответствующими документами, выданными организаторами указанных мероприятий;
- страховой номер индивидуального лицевого счета страхового свидетельства обязательного пенсионного страхования;
- мои контактные данные (телефон, адрес электронной почты).

Я даю свое согласие на использование персональных данных исключительно в целях размещения их в государственном информационном ресурсе о детях, проявивших выдающиеся способности, сопровождения и мониторинга моего дальнейшего развития.

Настоящее согласие предоставляется мной на осуществление действий, включающих: сбор, систематизацию, накопление, хранение, уточнение (обновление, изменение), использование, обезличивание, блокирование, уничтожение персональных данных, а также на передачу такой информации третьим лицам, в случаях, установленных законодательными и нормативными правовыми документами.

Персональные данные, предоставлены мной сознательно и добровольно, соответствуют действительности и корректны.

Подтверждаю, что мной дано согласие на рассылку рекламного, информационного характера от оператора и уполномоченных оператором лиц на указанный электронный адрес.

Я проинформирован, что оператор гарантирует обработку персональных данных в соответствии с действующим законодательством РФ.

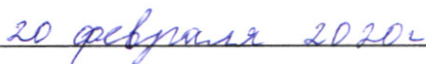
Настоящее согласие действует бессрочно, но может быть отозвано в любой момент по соглашению сторон или в случае нарушения оператором требований законодательства о персональных данных.



(Подпись)



(Расшифровка подписи)



(Дата)





## Согласие законного представителя (родителя) на обработку персональных данных несовершеннолетнего

Я, Сенникова Наталья Анатольевна

(ФИО родителя или законного представителя)

паспорт 6598 175513

(серия, номер)

выдан 14.07.00 УВД г.р. Новоуральска

(когда и кем выдан)

Свердловской обл.

(в случае опекунства указать реквизиты документа, на основании которого осуществляется опека или попечительство)

зарегистрированный по адресу: Свердловская обл., г. Новоуральск, ул. С. Зудина, д. 10, кв. 119

даю свое согласие Образовательному Фонду «Талант и успех», зарегистрированному по адресу: Российская Федерация, 354349, Краснодарский край, г. Сочи, Олимпийский проспект, д. 40, являющемуся оператором по формированию и ведению государственного информационного ресурса о детях, проявивших выдающиеся способности (далее - оператор), на обработку следующих персональных данных:

- фамилия, имя, отчество (при наличии) ребенка;
- дата рождения ребенка;
- реквизиты документа, удостоверяющего личность ребенка;
- наименование организаций, осуществляющих образовательную деятельность, в которых обучается ребенок;
- класс / курс;
- наименования образовательных программ, по которым обучается ребенок;
- сведения об обучении по индивидуальному учебному плану в организации, осуществляющей образовательную деятельность;
- сведения об индивидуальных достижениях ребенка по итогам участия в олимпиадах и иных интеллектуальных и (или) творческих конкурсах, мероприятиях, направленных на развитие интеллектуальных и творческих способностей, способностей к занятиям физической культурой и спортом, интереса к научной (научно-исследовательской), творческой, физкультурноспортивной деятельности, а также на пропаганду научных знаний, творческих и спортивных достижений, подтвержденных соответствующими документами, выданными организаторами указанных мероприятий;
- страховой номер индивидуального лицевого счета страхового свидетельства обязательного пенсионного страхования ребенка;
- контактные данные ребенка (телефон, адрес электронной почты);
- мои контактные данные (телефон, адрес электронной почты).

Я даю свое согласие на использование персональных данных несовершеннолетнего исключительно в целях размещения их в государственном информационном ресурсе о детях, проявивших выдающиеся способности, сопровождения и мониторинга его дальнейшего развития.

Настоящее согласие предоставляется мной на осуществление действий, включающих: сбор, систематизацию, накопление, хранение, уточнение (обновление, изменение), использование, обезличивание, блокирование, уничтожение персональных данных, а также на передачу такой информации третьим лицам, в случаях, установленных законодательными и нормативными правовыми документами.

Персональные данные, предоставлены мной сознательно и добровольно, соответствуют действительности и корректны.

Подтверждаю, что мной дано согласие на рассылку рекламного, информационного характера от оператора и уполномоченных оператором лиц на указанный электронный адрес.

Я проинформирован(а), что оператор гарантирует обработку персональных данных в соответствии с действующим законодательством РФ.

Настоящее согласие действует бессрочно, но может быть отозвано в любой момент по соглашению сторон или в случае нарушения оператором требований законодательства о персональных данных.

Асен

(Подпись)

Сенникова Наталья Анатольевна

(Расшифровка подписи)

19.02.2020

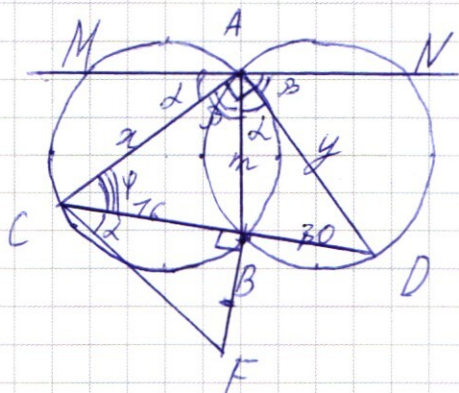
(Дата)





## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



a)  $D = 14 \cdot 2$

1) Проведем  $AB$  и  $MN \perp AB$

$$\angle MAC = \angle BAD = \alpha$$

$$\angle NAD = \angle CAB = \beta$$

2)  $CF^2 = BF^2 + CB^2 = CB^2 + BD^2$

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta$$

$$\sin \beta = \cos \alpha$$

$$CB^2 + BD^2 = (D \cdot \sin \beta)^2 + (D \cdot \sin \alpha)^2 =$$

$$= D^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = D^2 = CF^2 \Rightarrow \underline{CF = D = 34}$$

б)  $BC = 16 \Rightarrow \sin \beta \cos \angle BCF = \frac{16}{34} = \cos \alpha$

$$\angle BCF = \alpha$$

$$BD = BF = 30$$

$$\frac{x \cdot m \cdot \sin \beta}{y \cdot m \cdot \sin \alpha} = \frac{16}{30} = \frac{x}{y} \cdot \frac{8}{15} \Rightarrow x = y$$

$$x = (16 + 30) \cdot \sin 45^\circ = \frac{46 \sqrt{2}}{2} = 23\sqrt{2}$$

$$\sin (\alpha + \varphi) = \sin 45^\circ \cdot \frac{8}{14} + \cos 45^\circ \cdot \frac{15}{14} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{23}{14}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 23\sqrt{2} \cdot \frac{1}{34} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{23}{14} \right) = 23^2 \cdot \frac{2}{2} = 23^2$$



№4

$$S(h) = kh^2$$

$$S(h_1) = 9$$

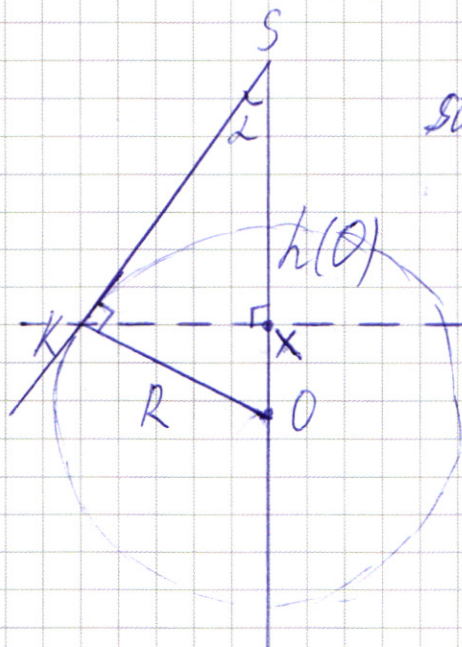
$$S(h_2) = 16$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

$$h_1 = 3h_0$$

$$h_2 = 4h_0$$

$$h(0) = \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{7}{2}h_0 \quad R = \frac{1}{2}h_0$$



$$\sin \alpha = \frac{R}{h(0)} = \frac{1}{7}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{7}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \sqrt{\frac{48}{49}}$$

$$KS = \frac{7}{2}h_0 \cdot \sqrt{\frac{48}{49}}$$

$$SX = h(X) = KS \cdot \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{24}{7}h_0$$

$$S(SX) = S(h_1) \cdot \left( \frac{h(X)}{h_1} \right)^2 = 9 \cdot \left( \frac{\frac{24}{7}}{3} \right)^2 =$$

$$= 9 \cdot \left( \frac{8}{7} \right)^2 = S_{\text{ок}}$$



N2

$$\cos 4x + \cos 3x + \sin 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 3x (\cos 4x + 1) - \sin 3x (\sin 4x + 1) + \sin 3x \cdot \cos 4x + \cos 3x \cdot \sin 4x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 3x (\cos 4x + \sin 4x + 1) + \sin 3x (\cos 4x - \sin 4x - 1) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 3x \cdot \cos 2x (\cos 2x + \sin 2x) + \sin 3x \sin 2x (-\cos 2x - \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2(\cos 3x \cdot \cos 2x - \sin 3x \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\cdot (\cos(2x + \frac{\pi}{4}) - \sin(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$(\sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4}))(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$1) \cos 2x = -\sin 2x$$

$$\begin{cases} 2x = -45^\circ + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}; L \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi L}{2} - \frac{\pi}{8}; L \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sqrt{2} \cos 5x = -\cos(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2} \cos 5x = \cos(\frac{3\pi}{4} - 2x)$$

$$\begin{cases} 5x = \frac{3\pi}{4} - 2x + 2\pi t \\ 5x = 2x - \frac{3\pi}{4} + 2\pi m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi t; t \in \mathbb{Z} \\ 3x = 2\pi m - \frac{3\pi}{4}; m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{\pi L}{2} - \frac{\pi}{8}; L \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi t}{7}; t \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2\pi m}{3} - \frac{\pi}{4}; m \in \mathbb{Z}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

1 случай:  $\begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 2x+16 = 16 \Rightarrow x=0$   
 $y \in [-8; 8]$

$$64 + (|y|-15)^2 = a \quad (|y|-15)^2 \in [49; 225]$$

и имеет 2 корня при  $a \in [113; 289]$

2 случай:  $\begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow -2x-16 = 16 \Rightarrow x=-16 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-8 \leq 0 \\ -y-8 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow -8 \leq y \leq 8$$

~~85~~  $64 + (|y|-15)^2 = a \quad a \in [113; 289]$

Замечание 1 и 2 случай дают 4 решения на  
 $a \in [113; 289]$  и 2 решения при  $a = 289$

3 случай:  $\begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \end{cases} \quad 2y=16 \quad y=8 \quad -16 \leq x \leq 0$

$$(|x|-8)^2 + 49 = a \quad a \in [49; 113] - 2 \text{ реш.}$$

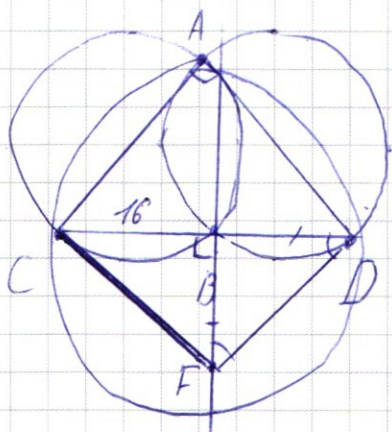
$$a = 49 - 1 \text{ реш.}$$

4 случай:  $\begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \end{cases} \quad -2y=16 \quad y=-8 \quad (-16 \leq x \leq 0)$   
 $a \in [49; 113] - 2 \text{ реш.}$   
 $a = 49 - 1 \text{ реш.}$

Ответ:  $a \in \{49; 289\}$ .



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

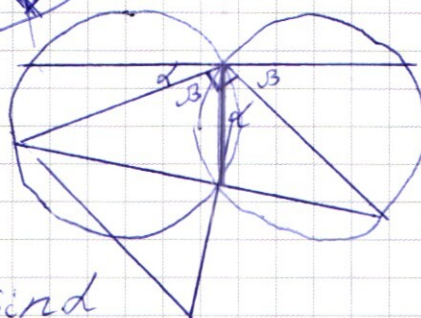
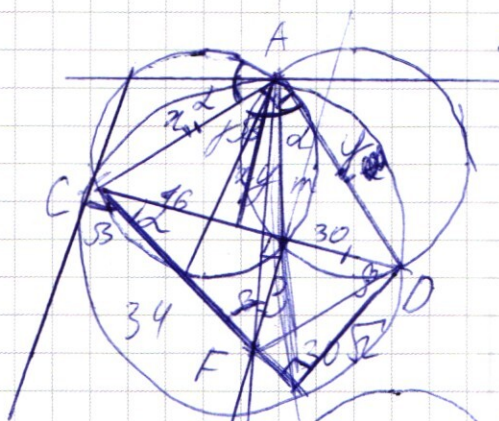


$$y = 14 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \alpha = \cos \beta$$

$$\alpha = \beta - \gamma$$

$$\frac{180 - \beta + \alpha}{2}$$



$$2(x^2 + y^2) - 2xy \cos \alpha - 2xy \sin \alpha$$

$$2(x^2 + y^2) - 2xy (\cos \alpha + \sin \alpha) =$$

$$140 + 14 \cdot 4$$

$$14 \cdot 14$$

$$= (14 \sin \alpha)^2 + (14 \cos \alpha)^2 = 14^2$$

$$\sin \beta = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17}$$

$$140 + 40 + 49 = 289 \cdot 29$$

$$34^2 + (30\sqrt{2})^2 = 46^2$$

$$289 - 64$$

$$225$$

$$14^2 + (15\sqrt{2})^2 = 23^2$$

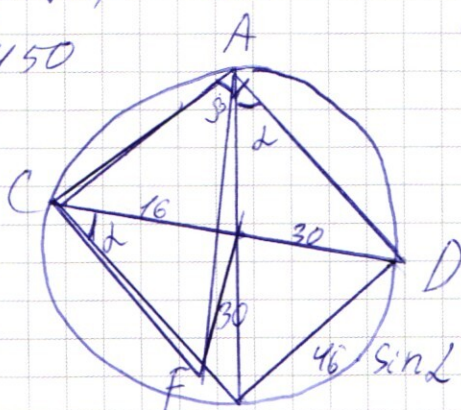
$$29$$

$$460 + 60$$

$$289 \quad 450$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot y}{\cos \alpha \cdot x} = \frac{30}{16}$$

$$\frac{15}{8} \cdot \frac{y}{x} = \frac{30}{16}$$



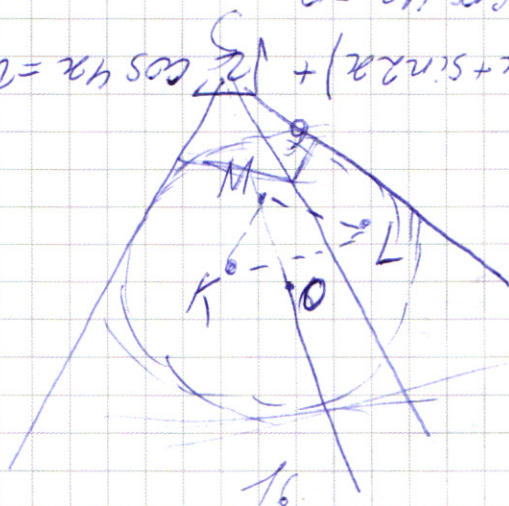
$$46 \sin \alpha = \frac{15}{17}$$



066

$$2 \cos 5x \cdot (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 (\cos 3x \cdot \cos 2x - \sin 3x \cdot \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$



$$S = \frac{1}{2}bh$$

$$a = ah$$

$$ab = ah^2$$

$$b = yh$$

$$S = \frac{1}{2}bh$$

$$16 = \frac{1}{2}bh$$

$$9 = \frac{1}{2}bh$$

$$\cos = \sqrt{1 - \frac{1}{49}}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{h_1}{h_2}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{h_1}{h_2}$$

$$\frac{1}{\frac{4}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{4}}$$

$$r = \frac{h_0}{2}$$

$$\frac{4}{2} h_0$$

$$\sqrt{\frac{48}{49}} \cdot \frac{4}{2} h_0$$

$$\frac{24}{4} h_0$$

$$3h_0$$

$$9 \cdot \left( \frac{8}{4} \right)^2 \cdot \frac{64}{49}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3^{28}x - 3x$$

$$3^{x-1} + 4 \cdot 3^{27} < 31 + 3^{27}x - 2$$

$$31 - x : 3 \quad x \% 3 = 2$$

$$64 + \frac{225}{49} = a$$

a

$$\cos d = -\cos(180^\circ - x)$$

$$\sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$2 \cos 3x \cdot \cos 2x (\cos 2x + \sin 2x) - 2 \sin 3x \cdot \sin 2x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 3x (2 \cos^2 2x - 2 \sin^2 2x) - \sin 3x (2 \sin^2 2x + 2 \cos^2 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 3x (\cos 4x + \sin 4x) - \sin 3x (\sin 4x - \cos 4x + 1) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

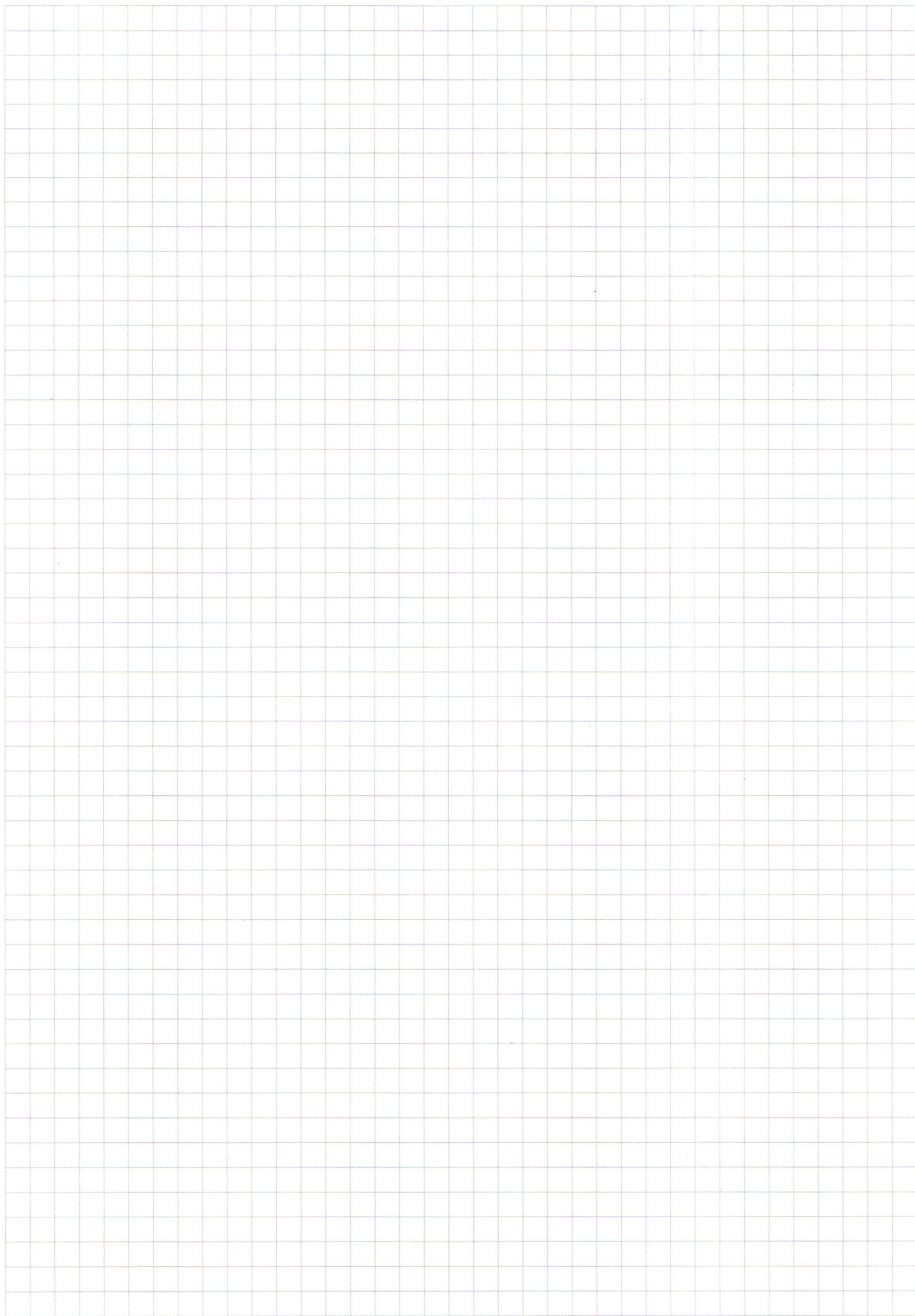
$$\sin \cos 3x \sin 4x + \sin 3x \cos 4x$$

$$\cos 3x (\cos 4x + 1) - \sin 3x (\sin 4x + 1) + \sin 4x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x$$

$$\cos 4x + \cos 3x + \sin 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$









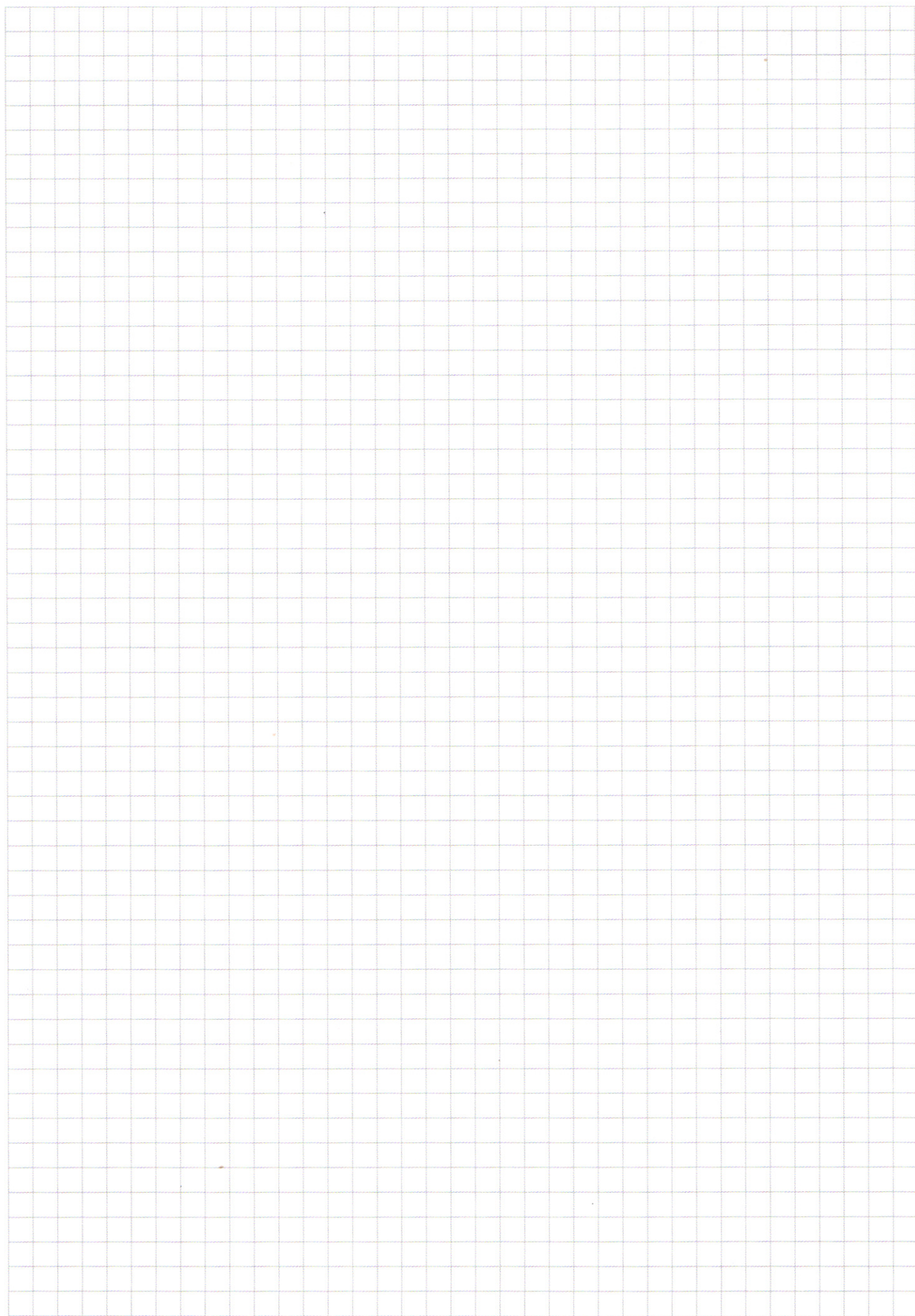
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$
$$(2 \cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4}))(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$5x \pm 2x = \pm \frac{3\pi}{4}$$







☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)