МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа. 1120

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассм. $y^2-30y+289$.

Минимум достигается в вершине параболы, т.е. при $y=\frac{-(-30)}{2\cdot 1}=15$.

Тогда минимум равен $15^2-30\cdot 15+289=$
$=225-450+289=64$.

$$\begin{array}{r} 225\\ +\,289\\ \hline 514\end{array}\qquad \begin{array}{r} 514\\ -\,450\\ \hline 064\end{array}$$

Т.к. оси направлены вверх, то наибольшее значение достигается на краях, т.е. в т. 0 и 8: это 289 и 113 соотв.

Рассм. $x^2-16x+113$.

Его минимум в т. $\frac{-(-16)}{2\cdot 1}=8$ и равен
$8^2-16\cdot 8+113=64+113-128=177-128=49$.

Т.к. оси напр. вверх, то наибольшее знач. достигается на краях, т.е. в т. 0 и 16: это 113 и 113.

Тогда a таково, что $a\geq 49$ и $a<64$, т.е. $a\in[49;64)$. (поскольку входит в E_f 2-го многочл. и не входит в E_f первого, где E_f – мн-во значений).

2сл.: ответ имеет вид $(0;y)$, $(0;-y)$, ур-ие I.4 не имеет реш. при $y=\pm 8$.

$$\begin{cases}(0-8)^2+(|y|-15)^2=a, & y\in[-8;8]\\ (|x|-8)^2+(8-15)^2\neq a, & x\in[-16;0]\end{cases}$$

Аналогично 1сл. получим, что $a>113$ и $a\leq 289$.

Тогда получим, что $a\in[49;64)\cup(113;289]$.

Ответ: $[49;64)\cup(113;289]$.

Задача №7

$y > 3^x + 4\cdot 3^{28}$

$y \leq 93 + 3(3^{27}-1)x$

Значит должно выполняться:

$3^x + 4\cdot 3^{28} \leq 93 + 3\cdot(3^{27}-1)x.$

Заметим, что ф-ии слева и справа непрерывны, слева – степенная ф-ия, справа – прямая $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ у них не более 2 т. пересечения.

При $x=4$ $\quad 3^4 + 4\cdot 3^{28} = 93 + 12\cdot 3^{27} - 3\cdot 4$, т.к.

$81 + 4\cdot 3^{28} = (93-12) + 4\cdot 3^{28}.$

Сл-но одна из т. пересеч. при $x=4$.

При $x=31$ $\quad 3^x + 4\cdot 3^{28} = 3^{31} + 4\cdot 3^{28} = 81\cdot 3^{27} + 12\cdot 3^{27} = 93\cdot 3^{27}$

$93 + 3\cdot 3^{27}\cdot 31 - 3\cdot 31 = 93\cdot 3^{27}$

Сл-но 2-я т. пересеч. $x=31$.

Значит при $x\in[5;30]$ условие выполняется.

Заметим, что нам подходят все целые y для кажд. x, такие что $y\in(3^x+4\cdot 3^{28}; 93+3(3^{27}-1)x]$.

Тогда всего таких y: $\sum\limits_{x=5}^{30}\left(93+3^{28}\cdot x - 3x - (3^x+4\cdot 3^{28})\right) =$

Пусть $S = 3^1+\ldots+3^{30}$. Тогда $2S+3 = 3^{31} \Rightarrow S = \frac{3^{31}-3}{2}$.

$= \sum\limits_{x=5}^{30}\left(93+3^{28}(x-4)-3x-3^x\right) = \sum\limits_{x=5}^{30}93 + \sum\limits_{x=5}^{30}3^{28}\cdot(x-4) - \sum\limits_{x=5}^{30}(3x) -$

$- \sum\limits_{x=5}^{30}3^x = 93\cdot(30-5+1) + 3^{28}\cdot\frac{26\cdot 27}{2} - 3\cdot\left(\frac{30\cdot 31}{2}-\frac{4\cdot 5}{2}\right) -$

$-(S-3^1-3^2-3^3-3^4) = 2418 + 3^{28}\cdot 13\cdot 27 - 3\cdot 455 - \frac{3^{31}-3}{2} + 120 =$

$= 2418 + 3^{28}\cdot 13\cdot 27 - 1365 + 120 - \frac{3^{31}-3}{2} = 1173 +$

$+ \cancel{3^{28}\cdot 13\cdot 27}\ 13\cdot 3^{31} - \frac{(3^{31}-3)}{2} = \frac{3^{31}\cdot 25}{2} + 1174{,}5$

Ответ: $\frac{3^{31}\cdot 25}{2} + 1174{,}5$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\cos 5x = -\sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)$, $\cos 2x + \sin 2x \neq 0$.

$\cos 5x = \cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x =$

$= (\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x)\cos 2x - (\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x) \cdot$

$\cdot \sin 2x = \cos^2 2x \cos x - \sin 2x \sin x \cos 2x - \sin^2 2x \cos x -$

$- \sin 2x \cos 2x \sin x = (\cos^2 2x - \sin^2 2x)\cdot\cos x - 2\sin 2x \sin x \cos 2x$

2 $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$\cos 2x - \sin 2x = \cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) =$

$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\overset{}{\cancel{\cos}}\underset{\sin}{}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cancel{\cos}\underset{\sin}{}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\cos 5x = -\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\cos 5x + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0.$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{28} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} + \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$x = \frac{5\pi}{28} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{5\pi}{12} + \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z}$

$\cos 2x + \sin 2x = 0$

$\cos 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

$2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$2x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

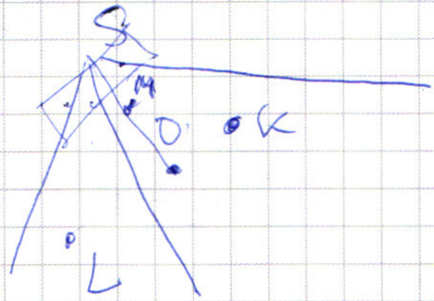
$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

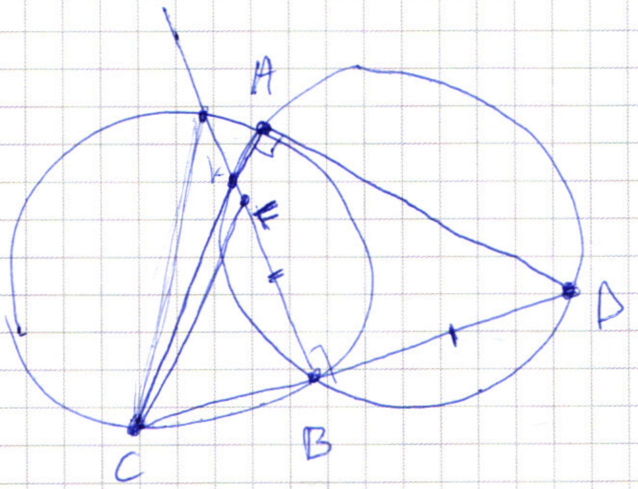
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2+4xy- \end{cases}$$





$CA^2+AD^2=CD^2=(CB+BD)^2=CB^2+2CB\cdot BD+BD^2=$

$=2\cdot CB\cdot BD+CF^2.$

$$\begin{cases} y > 3^x+4\cdot 3^{28} \\ y \le 93+3(3^{27}-1)x \end{cases}$$

$3+3^{28}+3^{29}=3+4\cdot 3^{28}$

$3\cdot(30-3^{28})$

$3^x+4\cdot 3^{28} < 93+3^{28}-3x$

$3^x+3^{29} < 93-3x$

$3^{x-1}+3^{28} < 31-x$

$3^{x-1}+x < 31-3^{28}$

$x \le 30-3^{28}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$64827 : 3 = 21609$

$21609 : 3 = 7203$

$7203 : 3 = 2401$

$\cancel{2401 : 3 = 801}$

$\cancel{801 : 3 = 267}$

$\cancel{267 : 3 = 89}$

$2401 : 7 = 343$

$343 : 7 = 49$

$64827 = 3^3 \cdot 7^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ содержит 4 ~~…~~ 7-ки

$32 \cdot 35 = 1120$

$$8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} + 8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2}\left(\frac{1}{3} + 1\right) =$$

$$= \frac{4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3} =$$

$$= 2 \cdot 4^2 \cdot 5 \cdot 7 = 32 \cdot 35 =$$

$=$

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$ $\qquad \frac{1-\cos\alpha}{2}$.

$2\cos 5x \cos 2x + 2\cos 5x \sin 2x + \sqrt{2}\cos 4x = 0.$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta =$

$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$

$\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right).$

$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$

$\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)\left(\frac{1+\cos\beta}{2}\right) - \left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)\left(\frac{1-\cos\beta}{2}\right) =$

$\cos 5x = \cos 4x\cos x - \sin 4x \sin x$

$= \frac{1}{4}\left(1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\alpha\cos\beta\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \cos\alpha - \cos\beta + \cos\alpha\cos\beta\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\alpha\cos\beta - 1 + \cos\alpha + \cos\beta - \cos\alpha\cos\beta\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\cos\alpha + \cos\beta\right) \Rightarrow \boxed{\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}.$

$\sin\alpha - \sin\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = -2\sin\left(\frac{\pi-\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) =$

$= -2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = \boxed{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\alpha - \sin\beta}$

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0.$

$2\cos 5x \cos 2x + 2\cos 5x \sin 2x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2(\cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x)\cos 2x + 2(\cos(4x)\cos x - \sin 4x \sin x)\sin 2x +$

$+ \sqrt{2}\cos 4x = 0.$

$\cos 4x\left(2\cos x\cos 2x + 2\cos x \sin 2x + \sqrt{2}\right) -$

$- \sin 4x \sin x(\sin 2x + \cos 2x)$

$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) = -\sqrt{2}\cos 4x = -\sqrt{2}(2\cos^2 2x - 1) =$

$= -\sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) =$

$= -\sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$

$\left[\begin{array}{l} 2\cos 5x = -\sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x) \\ \cos 2x + \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \Rightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}, k\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{7} + \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k_1}{7}, k_1\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k_1}{7}, k_1\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3} \mid k\in\mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k_1}{7} \mid k_1\in\mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k_2}{2} \mid k_2\in\mathbb{Z}\}$.

Задача №5.

Рассмотрим 4 случая.

I. $x+y \geq -8$

I.I. $x-y \geq -8$.

Си-ма 1 ур-ние раскрывается так: $x+y+8+x-y+8=16$

$2x=0 \Rightarrow x=0$.

При этом $\begin{cases} y\leq 8 \\ y\geq -8 \end{cases}$, т.е. $y\in[-8;8]$.

I.II. $x-y\leq -8$.

— " — " — : $x+y+8+y-x-8=16$

$y=8$

При этом $\begin{cases} x\leq 0 \\ x\geq -16 \end{cases}$, т.е. $x\in[-16;0]$.

II. $x+y\leq -8$

II.I. $x-y\geq -8$.

— " — " — : $-x-y-8+x-y+8=16 \Rightarrow y=-8$.

При этом $x \in [-16; 0]$.

II.II. $x - y \leq -8$

— " — " —: $-x - y - 8 - x + y - 8 = 16$

$$x = -16$$

При этом $y \in [-8; -8]$, т.е. $y = -8$.

Заметим, что в случаях (I.I и II.II), (I.II и II.I) 2-е уравнение совпадает.

~~[illegible]~~

Пусть подходит пара $(x; 8) \in$ I.II $\Leftrightarrow$ подходит пара $(x; -8) \in$ II.I.

Пусть подходит пара $(0; y) \in$ I.I. Тогда ~~[illegible]~~ подходит и пара $(0; -y)$.

Пусть подходит пара $(-16; -8) \in$ II.II $\Rightarrow$ подходят и пары $(0; 8)$, $(0; -8)$ $\Rightarrow$ ответов не 2 и этот вариант не подходит. Тогда остается 2 сл.:

<u>1.сл.</u> Ответ имеет вид $(x; 8)$, $(x; -8)$, ур-ие I.I. не имеет реш. при $x = 0$.

(Назовем ур-ием I.I, I.II, II.I и II.II. вторые ур-ия соотв. из пар ур-ий)

$$\begin{cases} (0-8)^2 + (|y| - 15)^2 \neq a, & y \in [-8; 8] \\ (|x| - 8)^2 + (8 - 15)^2 = a, & x \in [-16; 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 64 + y^2 - 30|y| + 225 \neq a \Leftrightarrow 64 + y^2 - 30y + 225 \neq a, \ y \in [0; 8] \\ x^2 - 16|x| + 64 + 49 = a \Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 + 49 = a, \ x \in [0; 16] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 30y + 289 \neq a \\ x^2 - 16x + 113 = a \end{cases}$$

Найдем E_f каждого из трехчленов.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

Заметим, что $64827 = 3^3 \cdot 7^4$.

$\exists!\ x:\ x \in \mathbb{N},\ x < 10,\ x \vdots 7$ и это $x = 7 \Rightarrow$ любое подходящее 8-значное число содержит хотя бы 4 цифры ~~x~~, $x \vdots 7$, т.е. содержит хотя бы 4 „7"-ки.

Произведение остальных цифр 8-значного числа должно быть равно 3^3. Заметим, что такое произведение может быть у 4 чисел в одном из 2-х случаев:

1) это 3 „3"-ки и одна „1". Тогда таких 8-значных чисел всего $8 \cdot C_7^3$, т.к. $\exists$ 8 вариантов расстановки „1" и C_7^3 способов поставить 3-ки на 3 из 7 оставшихся позиций. Остальные позиции единств. способом заполняются „7"-ми.

2) это одна „9", одна „3" и две „1". Тогда таких 8-значных чисел всего $8 \cdot 7 \cdot C_6^2$, т.к. $\exists$ 8 способов поставить „9", 7 — „3" и C_6^2 способов расставить „1" на 2 из 6 оставшихся мест. Остальное единств. образом заполняется „7"-ми.

Других случаев нет, т.к. $\exists$ ровно 2 цифры, являющиеся ненулевыми степенями 3-ки: 3 и 9. И если не использовать 9, то будет сл. 1), а иначе — сл. 2. Ответ: $8 \cdot C_7^3 + 8 \cdot 7 \cdot C_6^2 = 1120$

Задача №2

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0.$

$(\cos 7x + \cos 3x) + (\sin 7x - \sin 3x) + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

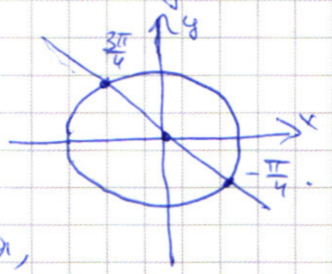
$2\cos 5x \cos 2x + 2\cos 5x \sin 2x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x(\cos 2x - \sin 2x) = -\sqrt{2}\cos 4x$

$2\cos 5x(\cos 2x - \sin 2x) = -\sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$

$2\cos 5x(\cos 2x - \sin 2x) = -\sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$

$$\left[\begin{array}{l} \cancel{2}\cos 2x + \sin 2x = 0 \quad \text{— 1 случай} \\ \begin{cases} 2\cos 5x = -\sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x) \\ \cos 2x - \sin 2x \neq 0. \end{cases} \quad \text{— 2 случай.} \end{array}\right.$$



__1сл.__: $\cos 2x + \sin 2x = 0$

$-\cos 2x = \sin 2x.$

Заметим, что $\cos 2x = -\sin 2x$ — прямая, пересекающая тригоном. окр-ть в 2 точках: $\frac{3\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}$.

Сл-но $\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{8} + \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Заметим, что обе серии вместе составляют серию

$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k_2}{2}, k_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ при таком x $\cos 2x + \sin 2x = 0.$

__2сл.__: $2\cos 5x = -\sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)$

$2\cos 5x = -\sqrt{2}\left(\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right)$

$2\cos 5x = -\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$2\cos 5x = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\cos 5x + \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$

$\cos 5x + \cos\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) = 0$

$2\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{7x}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{3x}{2} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{7x}{2} - \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

$(0;-8)$ $(-16;-8)$ $(0;-8)$ $(-16;8)$

I. $x+y \geq -8$.

I.I. $x-y \geq -8$

$$\begin{cases} x+y+8+x-y+8=16 \\ ((|x|-8)^2+(|y|-15)^2=a \end{cases}$$

$\boxed{x=0}$ $\Rightarrow \begin{cases} y \leq 8 \\ y \geq -8 \end{cases}$

$64 + (|y|-15)^2 = a$

$y^2 - 30|y| + 225 + 64 = a$.

I.I $\Rightarrow$ $(0;[-8;8])$

I.II $\Rightarrow$ $([-16;0];8)$

II.I $\Rightarrow$ $([-16;0],-8)$

II.II $\Rightarrow$ $(-16;-8)$

$(0;8)$

$(0;-8)$

I.II. $x-y \leq -8$

$$\begin{cases} x+y+8+y-x-8=16 \Rightarrow \boxed{y=8} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -16 \end{cases} \\ (|x|-8)^2 + 49 = a. \end{cases}$$

$x^2 - 16|x| + 64 + 49$

II. I. $x+y \leq -8$

II.I. $x-y > -8$

$$\begin{cases} -x-y-8+x-y+8=16 \Rightarrow \boxed{y=-8} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -16 \\ x \leq 0 \end{cases} \\ (|x|-8)^2 + 49 = a. \end{cases}$$

II.II. $x-y \leq -8$

$$\begin{cases} -x-y-8-x+y-8=16 \Rightarrow \boxed{x=-16} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -8 \\ y \leq -8 \end{cases} \\ 64 + (|y|-15)^2 = a. \end{cases}$$

$y = -8$

$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

$y \le 93 + 3(3^{27} - 1)x$

$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3^{28}x - 3x$

$3^{x-1} + 4 \cdot 3^{27} < 31 + 3^{27}x - x$

$3^{x-1} + x - 3^{27}x < 31 - 4 \cdot 3^{27}$

$3^{x-1} + x \cancel{+ 3^{27}} < 31 + 3^{27}(x-4)$

$3^{x-1} + (x-4) < 27 + 3^{27}(x-4)$

$3^{x-1} - 27 < (x-4)(3^{27}-1)$

$3^{x-1} + x - 3^{27}(x-4) < 31$

$3^{x-1} + x < 31 + 3^{27}(x-4).$

$$\begin{array}{r} \times\, 31 \\ 15 \\ \hline 155 \\ +\,31 \\ \hline 465 \end{array}$$

$93 + 3x \cdot 3^{27} - 3x - (3^x + 4 \cdot 3^{28}) =$

$= 93 + x \cdot 3^{28} - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28} =$

$= 93 + (x-4)3^{28} - 3x - 3^x.$

$\frac{30 \cdot 31}{2} = 15 \cdot 31 - \frac{4 \cdot 5}{2} = 455$

$3^5 + .. + 3^{30} = S.$

$3^1 + .. + 3^{30} = S$

$2S + 3 = 3^{31}$

$S = \frac{3^{31} - 3}{2} - 3^4 - 3^3 - 3^2 - 3.$

$$\begin{array}{r} \times\, 93 \\ 26 \\ \hline 558 \\ +\,186 \\ \hline 2418 \end{array}$$

$3 + 9 + 27 + 81 = 108 + 12 = 120$

$$\begin{array}{r} 2538 \\ -\,1365 \\ \hline 1173 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 455 \\ 3 \\ \hline 1365 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)