

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① 8-ое число $\overline{a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} = 64827$. Заметим, что цифры $\in \mathbb{Z}$

1) 8 число $\overline{a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$ $\rightarrow 64827 = 3^3 \cdot 7^4$

цифры $\in \mathbb{Z}$

при $\overline{a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} = 0$

противоречие

все цифры $\in [1; 9]$

в пр-ке $[7; 9]$ только $7: 7$

в числе только $4 \cdot 7$

2) в пр-ке $[7; 9]$

цифры $3, 6, 9 : 3$, 6 не может быть в числе, т.к. $: 2$

а пр-ке $\setminus 2$

противоречие

3) вариант пр-ка 3

т.к. подет перестановки по 2-ой цифре (выступит)

то 2-ое перестановки (повторение)

получим ответ:

вариант: $2 - "1"$

т.к. все множители

пр-ка закончен

аналогично $\Rightarrow$

$$\frac{8!}{1! \cdot 1! \cdot 4! \cdot 2!} + \frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{8!}{4!} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right)$$

$$= 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \left(\frac{4}{6} \right) = 20 \cdot 56 = 1120$$

ответ: 1120 чисел

$$(3) \begin{cases} \left(\frac{-x}{y}\right)^{7 \ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)} \\ y^7 + 2x(y - 3x^7 + 12x + 4y) = 0 \end{cases}$$

$$0 \neq 3: -y > 0$$

$$\Downarrow$$

$$y < 0$$

$$x^2 > 0$$

$$\Downarrow$$

$$m.k. (y^2) > 0$$

1) преобразуем уравн

$$x^{7 \ln(-y)} \cdot (-y)^{-\ln(-y)} = x^{2 \ln x} \cdot x^{4 \ln y} \quad \left(\begin{array}{l} \ln x^a = a \ln x \\ x^{a+b} = x^a \cdot x^b \\ \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \\ \ln(y^2) = 2 \ln(y) \\ m.k. y < 0 \end{array} \right)$$

$$x^{3 \ln(-y) - 2 \ln x} = (-y)^{\ln(-y)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x^{4 \ln(-y)} \neq 0 \\ (-y)^{\ln(-y)} \neq 0 \\ x^{2 \ln x} \neq 0 \end{array} \right.$$

$$x^a = \left(e^{\ln x} \right)^a = e^{a \ln x}$$

$$e^{\ln x (3 \ln(-y) - 2 \ln x)} = e^{\ln(-y) / \ln(-y)} \quad \text{логарифм}$$

$$3 \ln(x) \ln(-y) - 2 \ln^2(x) = \ln^2(-y)$$

$$\ln(x) = a$$

$$\ln(y) = b$$

$$a > 0, b > 0$$

$$\Rightarrow b^2 - 3ab + 2a^2$$

$$D = 9a^2 - 8a^2 = a^2 \Rightarrow \sqrt{D} = |a| = a$$

$$b = \frac{3a + a}{2} = 2a$$

$$b = \frac{3a - a}{2} = a$$

$$\ln(-y) = \ln(x) \quad \text{I}$$

$$\ln(-y) = 2 \ln(x) \quad \text{II}$$

II) подставим во 2-е уравнение

$$y^2 - 2y^2 - 3y^2 - 12y + 4y = 0$$

и. м. м.т.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$xy^2 + 8y = 0$
 $xy(y+2) = 0$
 $y = 0$
 $x = 0$

$y = -2$
 $x = 2$
 $(2; -2)$

$x^4 + -2x^3 - 3x^2 + 12x - 4 = 0$
 $x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$
 $x(x^2 - 2x^2 - 7x + 12) = 0$
 $x = 0$
 $x = 3$

$x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$
 $(x^3 - 2x^2 - 7x + 12) = (x-3)(x^2 + x - 4) = 0$
 $x = 3$
 $y = -9$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$
 $y = -x^2 = -\left(\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{1 - 1 \mp 2\sqrt{17} + 17}{4} = \frac{16 \mp 2\sqrt{17}}{4} = \frac{8 \mp \sqrt{17}}{2}$

$(2; -2)$
 $(3; -9)$
 $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{8-\sqrt{17}}{2}\right)$
 $\left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}; \frac{8+\sqrt{17}}{2}\right)$

4) н.а. раск. определ. ~~ка~~

сферы и точки



Значит, если провести плоскость

через точку и центр, то получим сфер. центр - н.

определ. высот равны

сфер. ~~мощности~~

1) проведем н.а. касательную

плоскости сечен. - ΔKML , $SO \perp SO$

2) проведем две н.а. $\perp SO$ вверху и снизу

сферы сечен. - ΔKML , ΔK_1ML_1 , ΔK_2ML_2
 они попарно перпен. н.а. сечен. м.к.

н.а. кас.
 для
 мощн.
 м.к.
 сфер.
 2 мощн.

все стороны мощн. лежат на тех же
 прямых, а мощн. н.а. окрывают $\perp SO \Rightarrow$ параллельны

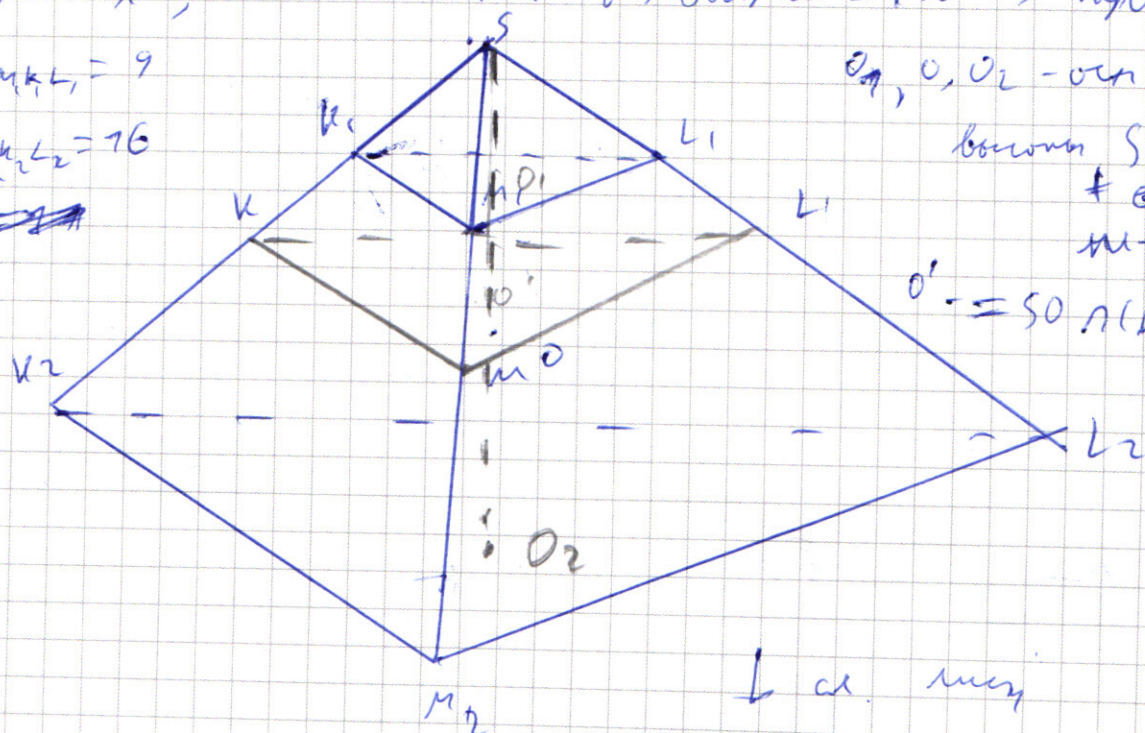
$S_{KML} = 9$

$S_{K_1ML_1} = 16$

O_1, O, O_2 - осн

высоты SO
 $\perp$ все
 м.к.

$O' = SO \cap (KML)$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $O_1 O_2 = 2R$, т.ч. $SO \perp (K, L, M_1)$

$OO_1 = OO_2 = R$

$SO \perp (K_2, L_2, M_2)$

2) $OK = OL = OM = R$

т.ч. сфера

т.ч. между сферами

т.ч. м-ты поворота

$$\left(\frac{SO_1}{SO_2} \right)^2 = \frac{S_{K, L, L_1}}{S_{K_2, L_2, L_2}} \Rightarrow \frac{SO_1}{SO_2} = \frac{3}{4}$$

$SO_1 = \frac{3}{4} SO_2$

$SO_2 - SO_1 = \frac{1}{4} SO_2 = OO_1 = 2R$

$SO_2 = 8R$

$SO_1 = 6R$

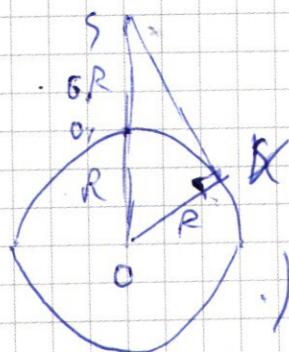
3) $\triangle O_1 O_2 A$

высота

1) $OK \perp SK$, по св-ву касательной

$\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{7R} = \frac{1}{7}$

$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{7}\right)$



2) $\triangle S O, K$



$SK^2 = SO^2 - OK^2 = 49R^2 - R^2 = 48R^2$

3) $\sin \angle KSO = \frac{1}{7}$

$\cos \angle KSO = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{\sqrt{48}}{7} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$

↓ т.ч. кас

.) $\angle KSO = \angle KSO_1$ - K, S, K_1 - в ΔKSO
 O, S, O_1 - в ΔKSO_1

$$\cos \angle KSO = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

из ΔKSO_1

$$SK_1^2 = \frac{SO_1^2}{\cos^2 \angle KSO} = \frac{36R^2}{48} = \frac{3R^2 \cdot 49}{4}$$

$$SK_1 = \frac{3R^2 \cdot 49}{4}$$

.) из подобия

$$\frac{S_{MKL}}{S_{MK_1L}} = \left(\frac{SK}{SK_1} \right)^2 = \frac{48R^2}{3R^2 \cdot 49} = \frac{64}{49}$$

$$S_{MKL} = \frac{64}{49} \cdot S_{MK_1L} = 9 \cdot \frac{64}{49}$$

из ΔKSO_1

$$SK_1^2 = \frac{SO_1^2}{\cos^2 \angle KSO} = \frac{36R^2}{48/49} = \frac{3R^2 \cdot 49}{4}$$

из подобия

$$\frac{S_{MKL}}{S_{MK_1L}} = \left(\frac{SK}{SK_1} \right)^2 = \frac{48R^2}{3R^2 \cdot 49} = \frac{64}{49}$$

$$S_{MKL} = S_{MK_1L} = 9 \cdot \frac{64}{49} = \frac{576}{49}$$

$$\sin \angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$S_{MKL} = \frac{576}{49}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten solution on grid paper showing geometric diagrams and calculations for finding the radius of a sphere inscribed in a tetrahedron.

Diagrams:

- Top left: A small triangle with sides a, b, c and angles α, β, γ . A line segment of length $a \sin \beta$ is shown.
- Top center: A sphere inscribed in a tetrahedron. The sphere touches the faces at points K_1, K_2, K_3, K_4 . The center is O . The radius is R .
- Top right: A tetrahedron with vertices A, B, C, D . The center of the sphere is O . The radius is R . The distance from the center to a vertex is $R \sqrt{3}$.
- Bottom left: A tetrahedron with vertices A, B, C, D . The center of the sphere is O . The radius is R . The distance from the center to a vertex is $R \sqrt{3}$.
- Bottom center: A tetrahedron with vertices A, B, C, D . The center of the sphere is O . The radius is R . The distance from the center to a vertex is $R \sqrt{3}$.
- Bottom right: A tetrahedron with vertices A, B, C, D . The center of the sphere is O . The radius is R . The distance from the center to a vertex is $R \sqrt{3}$.

Equations and Calculations:

$$h_A = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{u}{c} = \cos \beta \sin \beta$$

$$c = \frac{u}{\cos \beta}$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$0,02 = 2R$$

$$S = a \cdot R \sin \alpha + b \cdot R \sin \beta + c \cdot R \sin \gamma$$

$$\frac{\Delta h}{3} (R^2 + R u + u^2) = \frac{S_0 h_2}{3} - \frac{S_1 h_2}{3} =$$

$$\frac{2R}{3} (R^2 + R u + u^2) =$$

$$\frac{0_2 h_2}{0_2 k_1} = \frac{S h_2}{S k_1} = 1$$

$$\frac{2R + u}{u} = \frac{S_0}{S_1} \Rightarrow S_0 = 6R$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos(5x) \cos(2x) + 2 \sin(2x) \cos(5x) + \sqrt{2} (2 \cos^2 2x - 1) = 0$$

$$(\sin d + \cos d)^2 = \sqrt{1 + \sin 2d}$$

$$(\cos d - \sin d)^2 = \sqrt{1 - \sin 2d}$$

$$\sin d + \cos \beta =$$

$$= \sin d + \sin(90^\circ - \beta)$$

$$2 \sin\left(\frac{90^\circ + d - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{d + \beta - 90^\circ}{2}\right)$$

$$2 \sin(45^\circ + 2x) \cos \beta$$

$$2 \sin(45^\circ + 2x) \cos(5x - 45^\circ)$$

$$\cos(7)$$

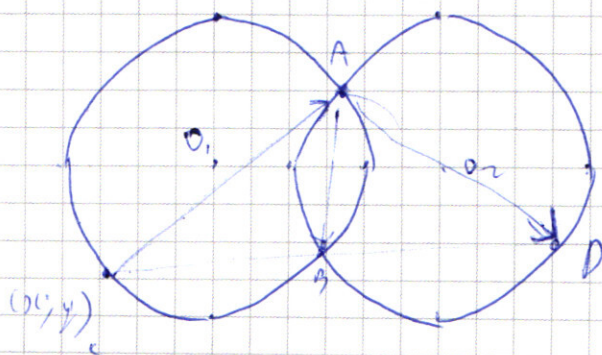
$$\cos 3x \cos 4x - \sin 3x \sin 4x$$

+

$$\cos 3x \sin 4x + \sin 3x \cos 4x$$

$$\cos 3x (\sin 4x + \cos 4x) + \sin 3x$$

$$\cos(4x) (\sin 3x + \cos 3x + \sqrt{2})$$



$$x \quad y \quad x_2 \quad y_2$$

$$(x - x_2) (y - y_2)$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x \\ y_2 - y \end{pmatrix}$$

$$\vec{CB} = (x_2 - x, y_2 - y)$$

$$\vec{CD} = (x_2 - x, y_2 - y)$$

$$x^2 + y^2 + x_2^2 + y_2^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① 8 и 3n число

и
8 цифр

а 0 c d e f g h

$$a_n : a_i \in [7; 9]$$

$$64827 = 9 \cdot 7207 = 3^3 \cdot 2407 = 3^3 \cdot 7 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^4$$

$$\begin{array}{r} 7000 \\ 200 \\ \hline 7200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20000 \\ 400 \\ \hline 20400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2407 \\ 2100 - 300 \\ \hline 307 \\ 180 \quad 40 \\ \hline 19 \quad 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 49 \cdot 7 \end{array}$$

7777

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} 8! \\ \hline 4! \cdot 3! \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8! \\ \hline 4! \cdot 2! \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8! \\ \hline 4! \cdot (2! + 3!) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$30 \cdot 7 = 210$$

②

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 2x \cdot 2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) +$$

$$\cos 3x (\cos 4x - \sin 3x \sin 4x) + \sin 4x (\cos 3x + \cos 5x \cos 4x)$$

$$\cos 4x (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) + \sin 4x (\cos 3x - \sin 3x) = 0$$

$$\text{or } 3: y \geq y < 0 \\ x > 0$$

$$\left(-\frac{x}{y} \right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(x y^2)}$$

$$x^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$9 \cdot 64 = 576 \\ a^{\ln a} \\ e^{\ln a}$$

$$x^{2 \ln(-y)} = e^{\left(-\frac{x}{y} \right) \cdot \ln(-y)} = e^{x - 2 \ln(x y^2)}$$

$$x^{2 \ln(-y)} \cdot (-y)^{-\ln(-y)} = x^{2 \ln x} \cdot x^{4 \ln y}$$

$$x^{3 \ln(-y) - 2 \ln x} = (-y)^{\ln(-y)} \rightarrow e$$

$$e^{\ln x (3 \ln(-y) - 2 \ln x)} = e^{\ln^2(-y)}$$

$$36x^2 + \frac{36}{49}x^2 = \\ = \frac{36 \cdot 49 + 36}{49}x^2 \\ \frac{36 \cdot 50}{49}$$

~~12x~~

$$3 \ln(-y) (\ln x) - 2 \ln^2 x = \ln^2(-y)$$

$$2 \ln^2 x - 3 \ln(-y) (\ln x) + \ln^2(-y) = 0$$

$$D = 9 \ln^2(-y) - 8 \ln^2(-y) = \ln^2(-y)$$

$$\ln(x) = \frac{3 \ln(-y) + \ln(-y)}{4} = \ln(-y)$$

$$x = -y$$

$$y = -x$$

$$= \frac{\ln(-y)}{2}$$

$$\ln(x^2) = \ln(-y)$$

$$-y = x^2$$

$$\rightarrow x = 0$$

$$x = 7$$

$$7 \cdot 3^{28} + 3$$

$$93 + 3^{28} - 3$$

(7)

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 93 + 3(3^{28} - 3)$$

$$x = 2$$

$$93 + 4 \cdot 3^{28} \\ 93$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$93 + 3^{28}x - 3x \geq 3^{11} + 4 \cdot 3^{28}$$

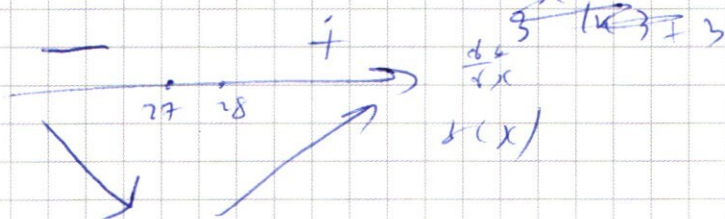
$$93 \geq 3^{11} + 3x + (4-x) \cdot 3^{28}$$

$$x \geq 4$$

$$\frac{dF}{dx} = 3^{11} \ln 3 + 3 - 3^{28}$$

$$x = 28$$

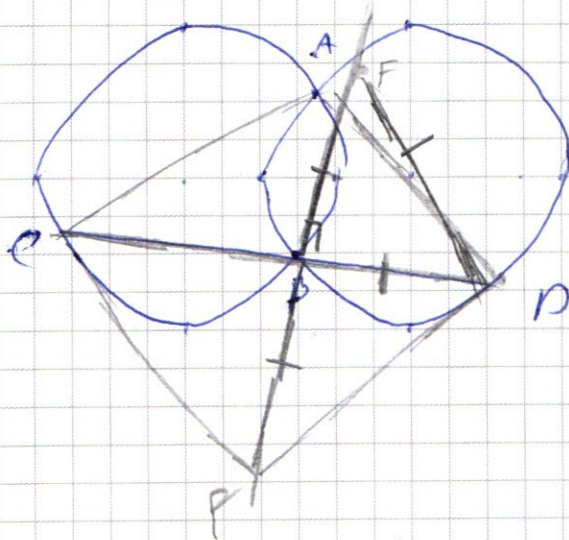
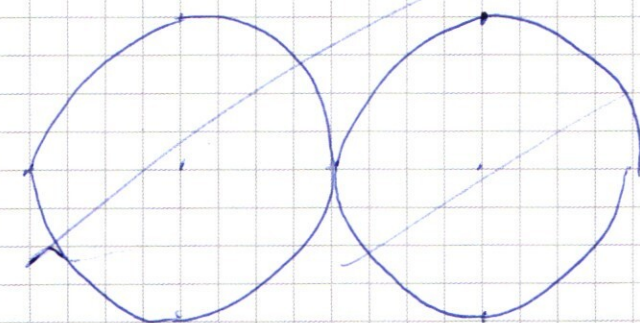
$$3^{28} (14/3 - 1) + 3 > 0$$



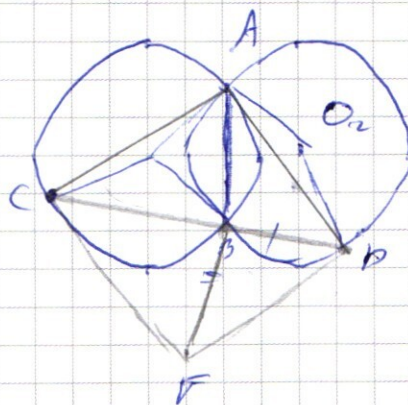
$$x = 27$$

$$3^{27} (14/3 - 3) + 3$$

$$(x; y)$$



$$CF = \sqrt{(CD - x)^2 + x^2}$$



$$1)(x+y+z)$$

69827

4827 ~~10~~

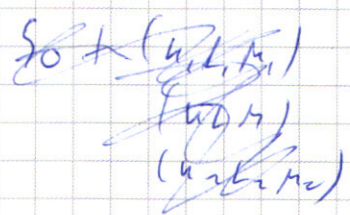
3

2407

2507 + 7

307 39

64827-
608



$$V_{K, M, L} = \frac{50,000}{3} \quad 50,000 = R$$

$$V_{K2} \text{ M.L.} = \frac{502 - 26}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$|x+y+8| \leq 16$$

$$-16 \leq x+y+8 \leq 16$$

$$-24 \leq x+y \leq 8$$

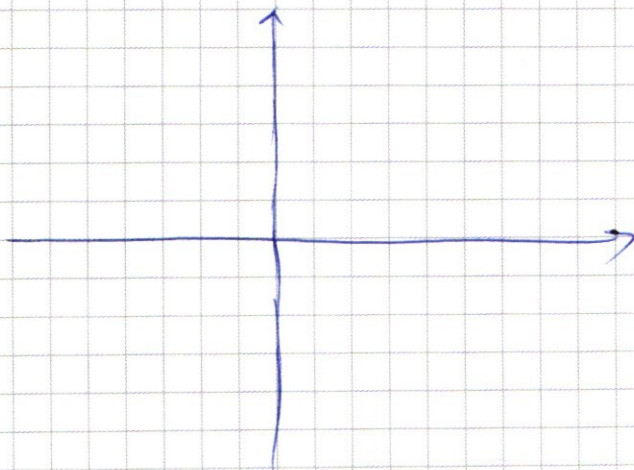
$$-24 \leq x-y \leq 8$$

$$-24 \leq x \leq 8$$

$$-32 \leq y \leq 32$$

$$16 \leq y \leq 16$$

$$|x+y+8| = 16 \quad - \quad |x-y+8|$$



$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x$$

$$2 \cos(5x) (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$= 2 \cos^2 x - 1 + 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2 \sin x \cos x$$

$$(\sin x + \cos x)^2 + 2 \sin^2 x$$

$$x+y = -8$$

$$y = -8 - x$$

