

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(~2)

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} (\sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x) = 0$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4} + 3x) + \cos 4x = 0$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) + 2 \cos(\frac{\pi}{8} + \frac{7x}{2}) \cos(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}) = 0$$

$$2 \sin(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) + 2 \cos(\frac{\pi}{8} + \frac{7x}{2}) \cos(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}) = 0$$

$$2 \sin(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) (\cos(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) + \cos(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2})) = 0$$

$$\sin(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$2 \cos(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}) \cdot \cos 2x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\cos 2x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi m}{5}, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

(~1)

Заметим, что 64827 - нечетное $\Rightarrow$ в восьмизначном числе нет четных цифр. Также в числе нет 5, т.к. иначе бы произведение цифр оканчивалось на 0 или 5 $\Rightarrow$ Наше восьмизначное число состоит из 1, 3, 7, 9. $64827 = 3^3 \cdot 7^4 \Rightarrow$ цифры либо 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7,

либо 1, 1, 3, 7, 7, 7, 7, 9

Чисел, состоящих из 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7 :

$$\frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} = 280$$

Чисел, состоящих из 1, 1, 3, 7, 7, 7, 7, 9 :

$$\frac{8!}{2! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 1!} = 840$$

$\Rightarrow$ всего восьмизначных чисел, произведение цифр которых 64827

$$840 + 280 = 1120$$

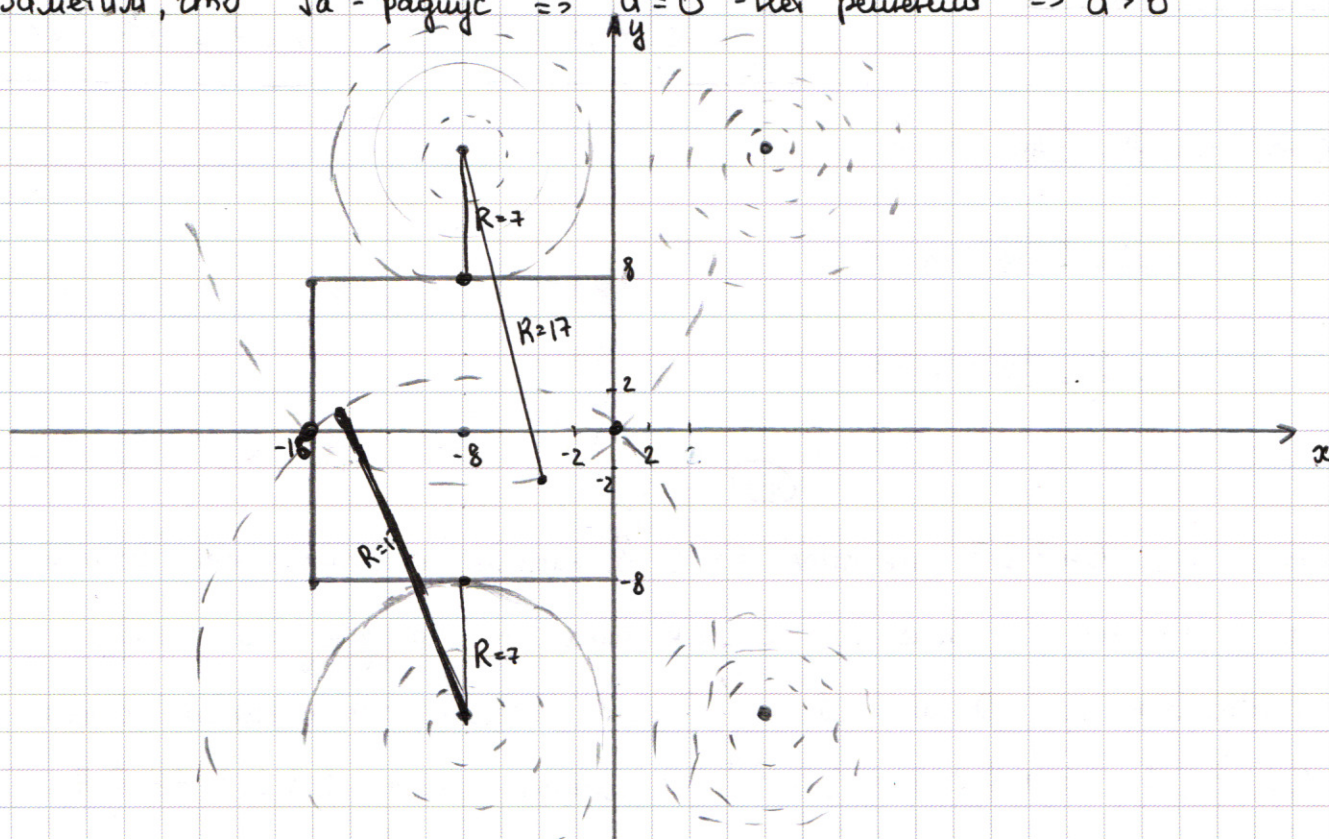
Ответ: 1120.

(~5)

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & - \text{квадрат Центр } (-8; 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & - 4 \text{ окружности с центрами } \begin{matrix} (8; 15) \\ (-8; 15) \\ (8; -15) \\ (-8; -15) \end{matrix} \end{cases}$$

Заметим, что $\sqrt{a}$ - радиус $\Rightarrow a \leq 0$ - нет решений $\Rightarrow a > 0$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что 2 решения при:

$$\textcircled{1} R = \sqrt{a} = 7 \Rightarrow a = 49$$

$$R = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 \Rightarrow a = 289$$

Тип $R = \sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{113} \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{289} = 17$ - больше 2 корней

Тип $R < 7$ - нет корней

Ответ: $a = 49$; $a = 289$

~3

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$(y + 3x)(y - x) + 4(3x + y) = 0$$

$$(3x + y)(y - x + 4) = 0$$

$$I \quad 3x + y = 0$$

$$y = -3x$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln 3x} = x^{2\ln 9x^3}$$

$$\ln 3x \cdot \ln\left(\frac{x^6}{3}\right) = 2\ln 9x^3 \cdot \ln x$$

$$(\ln 3 + \ln x)(6\ln x - \ln 3) = 2(2\ln 3 + 3\ln x)\ln x$$

$$\ln x = 3$$

$$(t + \ln 3)(6t - \ln 3) = 2(2\ln 3 + 3t)t$$

$$6t^2 + 6t\ln 3 - t\ln 3 - \ln^2 3 = 4t\ln 3 + 6t^2$$

$$t \cdot \ln 3 = \ln^2 3 \Rightarrow t = \ln 3 \Rightarrow \ln x = \ln 3 \Rightarrow$$

$$x = 3 \Rightarrow y = -9$$

$$\text{II } y - x + 4 = 0$$

$$y = x - 4$$

$y < 0 \Rightarrow x > 4$ и при этом $x > 0$
(по условию)

$$\left(-\frac{x}{x-4}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln(x(x-4)^2)}$$

$$\ln(4-x) \ln \frac{x^7}{x-4} = 2 \ln x (x-4)^2 \ln x$$

$$7 \ln x \ln(4-x) - \ln^2(4-x) + 2 \ln^2 x + 4 \ln x \cdot \ln(4-x)$$

$$\ln(4-x) = a \quad \ln x = b$$

$$7ab - a^2 - 2b^2 - 4ab = 0$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$a = b \quad \text{или} \quad a = 2b$$

$$\ln(4-x) = \ln x$$

$$x=2 \Rightarrow y=-2$$

$$\ln(4-x) = 2 \ln x$$

$$4 - x = x^2$$

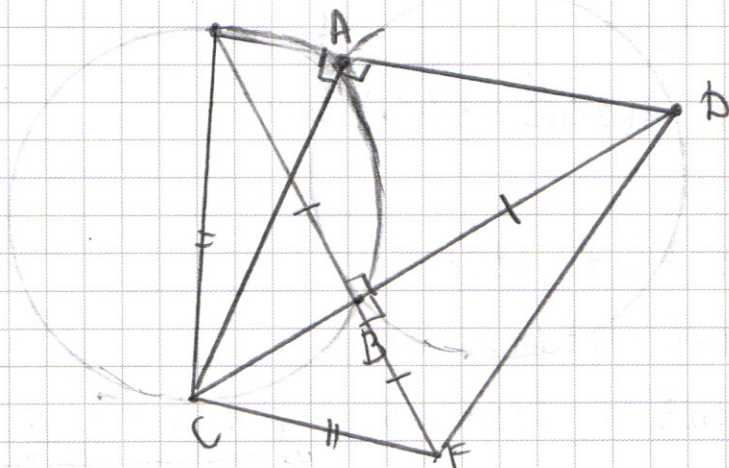
$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \rightarrow$$

$$y = \frac{\sqrt{17} - 9}{2}$$

②6

$$CF = 2R = 34$$



$$\begin{cases} 3^{x-28} + 4 < y \\ 3^{-27}(32-x) \geq y \end{cases}$$

$x \geq 32$, но

$$3^{-27}(32-x) \geq y \Rightarrow y < 0, \text{ но } 3^{x-28} + 4 < y - \text{всегда несправедливо.}$$

$x = 31$

$3^{-27} \geq y$, но

$3^3 + 4 < y = 31$

$3^{-27} > 31$ - противоречие.

$x = 30$

$13 < y$, но

$\frac{2}{3^{27}} \geq y$ - противоречие

Аналогично ...

~~$x = 28$~~

~~$5 < y$~~

~~$x = 2$~~

$x = 30$

$3^{-8} + 4 < y$

$3^{-27} \cdot 12 \geq y$

$x = 10$

$3^{-18} + 4 < y$

$x = 2$

$3^{-26} + 4 < y$

$3^{-27} \cdot 30 \geq y$

!!!

если $32-x < 3^{27}$, то

$y < 1$

, но в 3 случае больше 4 !!!

$x = 1$

$3^{-27} + 4 < y$

$3^{-27} \cdot 31 \geq y$

!!!

$x = 3^{27} + 32$

(N2)

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

~~$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sin(3x - \frac{\pi}{4})$~~

~~$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sin(3x - \frac{\pi}{4})$~~

$\sqrt{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$

$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4} + 3x) + \cos 4x = 0$

$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) + 2 \cos(\frac{\pi}{8} + \frac{7x}{2}) \cdot \cos(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}) = 0$

$2 \sin(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) + 2 \cos(\frac{\pi}{8} + \frac{7x}{2}) \cos(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}) = 0$

$2 \sin(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) (\cos(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) + \cos(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2})) = 0$

$\sin(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$

$2 \cos(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}) \cdot \cos 2x = 0$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi m}{8}, m \in \mathbb{Z}$

$2 \cos(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$

$\cos 2x = 0$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

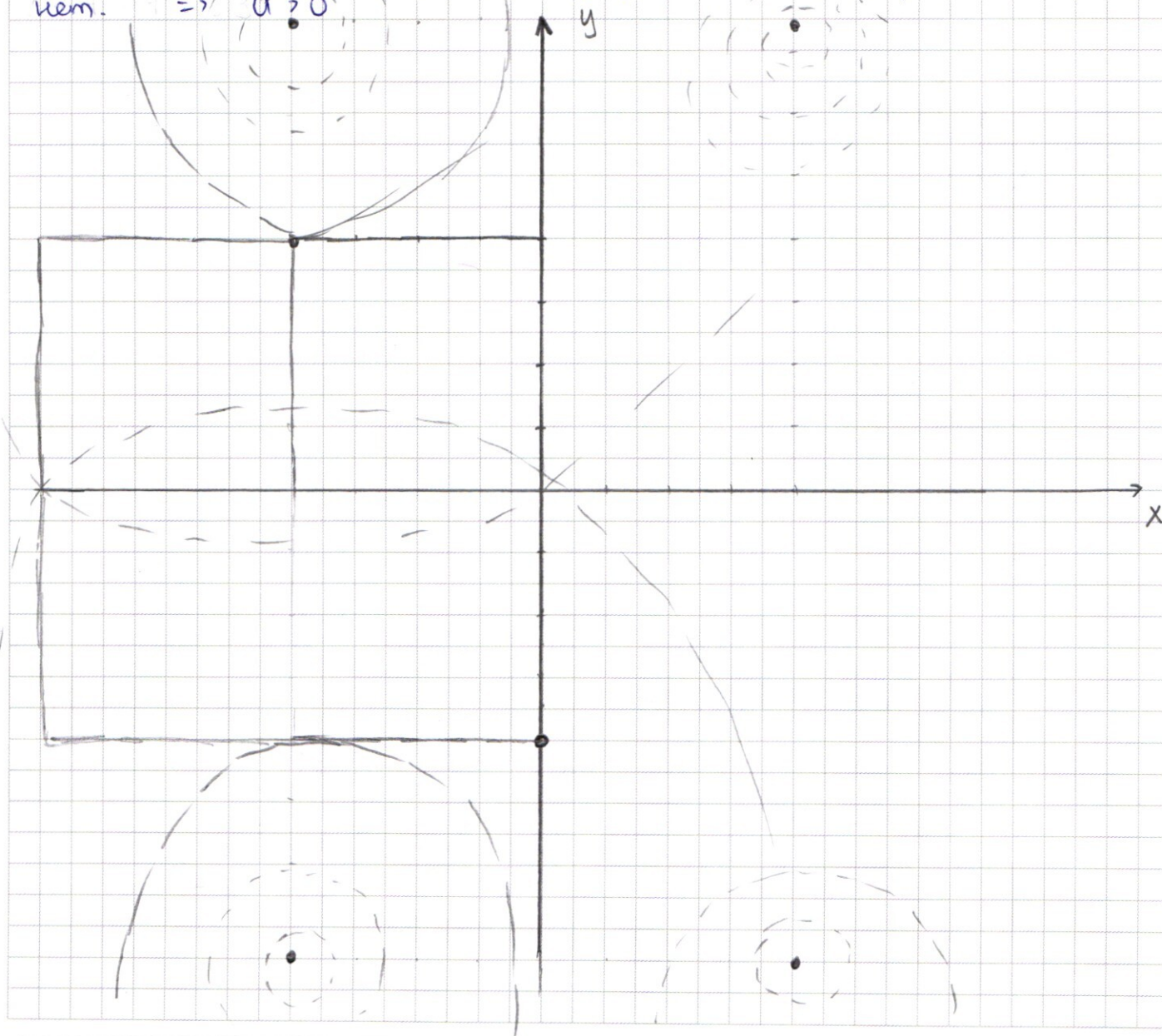
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & - \text{квадрат} \text{ центр } \text{ } \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & - 4 \text{ окружности центр } (8; 15) \\ & (8; -15) \\ & (-8; 15) \\ & (-8; -15) \end{cases}$$

Заметим, что $a \geq 0$ нет. $\Rightarrow$ a - радиус $\Rightarrow a \leq 0$ решений



2 решения при:

$$\textcircled{1} R = \sqrt{a} = 7 \Rightarrow a = 49$$

$$\textcircled{2} R_1 = \sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{49 + 64} = \sqrt{113} \leftarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{289} = 17$$

добавил 2-е корня

$$R_2 = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$$

$$\begin{cases} \left(\frac{-x}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy)^2} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases} \quad \textcircled{23}$$

$$(y+3x)(y-x) + 4(3x+y) = 0$$

$$(3x+y)(y-x+4) = 0$$

$$1 \quad 3x+y=0$$

$$y = -3x$$

$$+ \left(\frac{x^3}{3x}\right)^{\ln 3x} = x^{2\ln(9x^3)}$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln 3x} = x^{2\ln 9x^3}$$

$$\ln 3x \cdot \ln\left(\frac{x^6}{3}\right) = 2\ln 9x^3 \cdot \ln x$$

$$(\ln 3 + \ln x)(6\ln x - \ln 3) = 2(2\ln 3 + 3\ln x) \ln x$$

$$\ln x = t$$

$$(4 + \ln 3)(6t - \ln 3) = 2(2\ln 3 + 3t)t$$

$$6t^2 - 6t \ln 3 - t \ln 3 - \ln 3^2 = 4t \ln 3 + 6t^2$$

$$6t^2 - 6t \ln 3 - t \ln 3 - \ln 3^2 = 4t \ln 3 + 6t^2$$

$$t \ln 3 = \ln 3^2$$

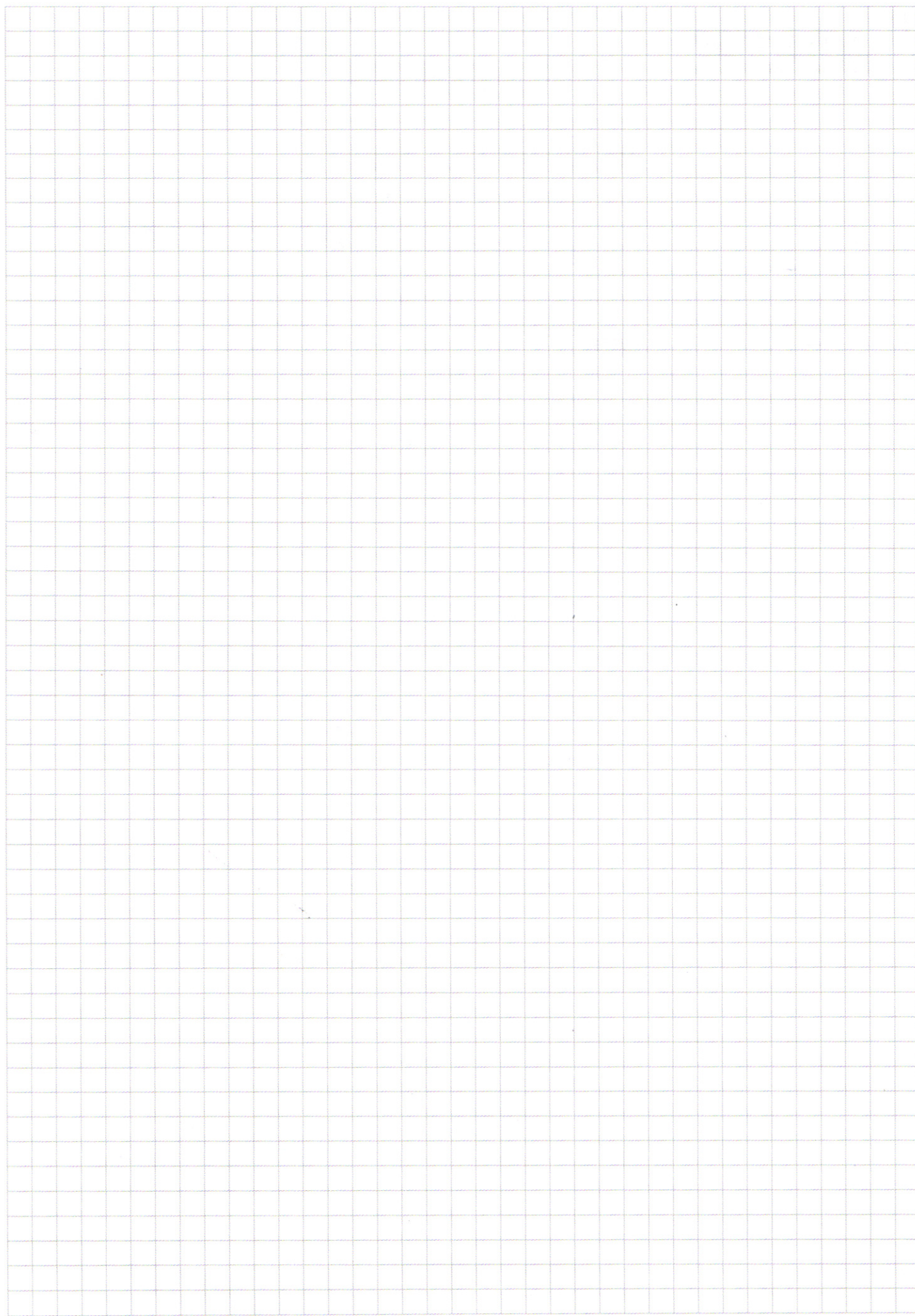
$$t = \ln 3$$

$$\ln x = \ln 3 \Rightarrow x = 3$$
$$y = -9$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \text{II} \quad y - x + 4 &= 0 \\ y &= x - 4 \\ y < 0 &\Rightarrow x < 4 \quad \text{и} \quad x \geq 0 \\ \left(-\frac{x^7}{x-4}\right) \ln(4-x) &= 2x^2 \ln(x(x-4)^2) \end{aligned}$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)