

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$64827 = 7^4 \cdot 3^3$$

Число может быть представлено в виде:

1) число, содержащее ~~4~~ 4 семерки, 3 тройки и 1 единицу в записи
всего таких чисел: $C_8^4 \cdot C_4^3 = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{4!}{3!1!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 35 \cdot 8 = 280$

2) число, содержащее 4 семерки, 1 девятку ~~и~~, 1 тройку и ~~две~~ две единицы
всего таких чисел: $C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{3!}{2!1!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 35 \cdot 8 \cdot 3$
 $= 280 \cdot 3 = 840$ других конфигураций не может быть

всего: $280 + 840 = 1120$ чисел

Ответ: 1120.

N2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$(\cos 7x + \sin 7x) + (\cos 3x - \sin 3x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

Применяя формулу гон. аргумента, получим:

$$\sqrt{2} \left(\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \right) + \sqrt{2} \left(\cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos \left(\frac{4x - \frac{\pi}{2}}{2} \right) + \cos 4x = 0$$

Пусть $4x - \frac{\pi}{2} = \alpha$, тогда:

$$2 \cos 5x \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$2 \cos 5x \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \alpha = 0$$

$$2 \cos 5x \cos \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 0$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} (\cos 5x - \sin \frac{\alpha}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 & (1) \\ \cos 5x - \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 & (2) \end{cases}$$

↓ см. продолжение

$$① \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n; n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{3\pi}{4} + \pi \cdot n; n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot n; n \in \mathbb{Z}$$

$$② \cos 5x - \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\cos 5x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\cos 5x - \cos\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) = 0$$

$$-2 \sin\left(\frac{7x + \frac{3\pi}{4}}{2}\right) \sin\left(\frac{3x + \frac{3\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(3,5x - \frac{3\pi}{8}\right) = 0 & ③ \\ \sin\left(1,5x + \frac{3\pi}{8}\right) = 0 & ④ \end{cases}$$

$$③ \frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{8} = \pi \cdot m; m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3}{2}x = -\frac{3\pi}{8} + \pi \cdot m; m \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi \cdot m; m \in \mathbb{Z}$$

$$④ \sin\left(3,5x - \frac{3\pi}{8}\right) = 0$$

$$3,5x - \frac{3\pi}{8} = \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z}$$

$$3,5x = \frac{3\pi}{8} + \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{7}{2}x = \frac{3\pi}{8} + \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3}{28}\pi + \frac{2}{7}\pi \cdot k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot n; n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3}{28}\pi + \frac{2}{7}\pi \cdot k; k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi \cdot m; m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

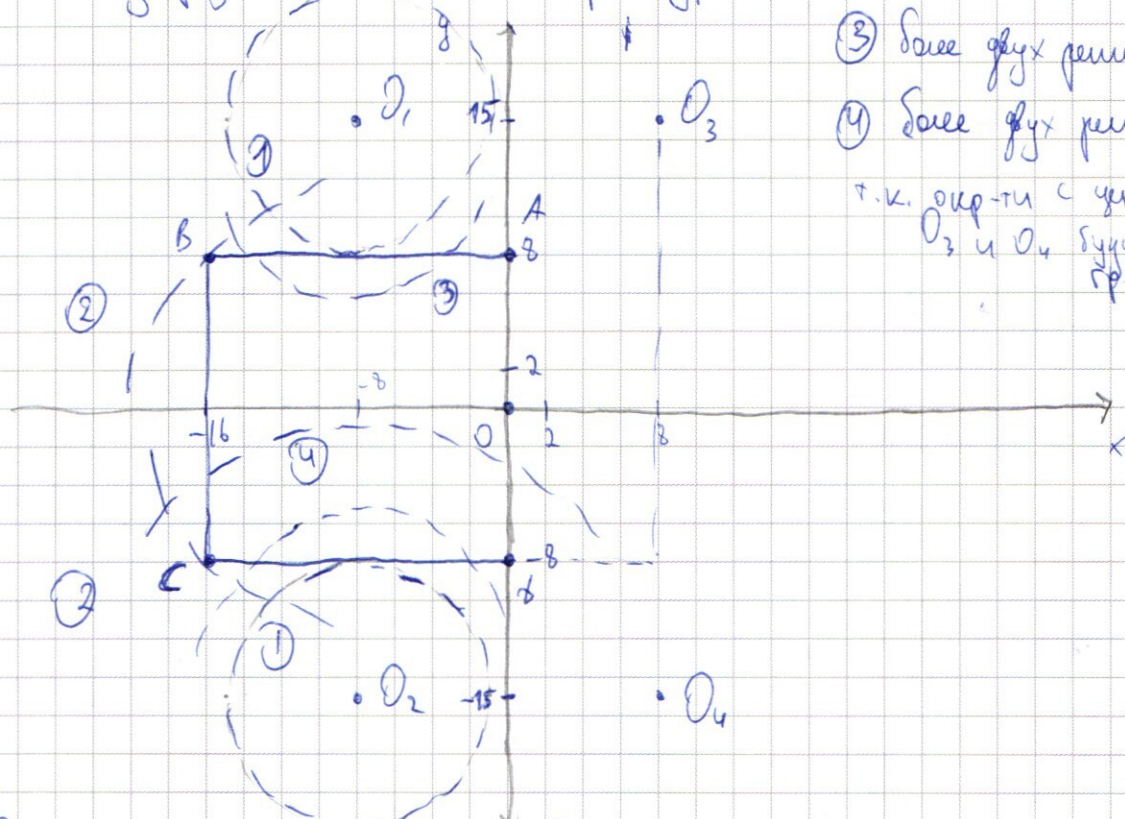
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

второе уравнение задает 4 окружности на плоскости с центрами $(8; 15)$, $(-8; 15)$, $(8; -15)$, $(-8; -15)$.

изобразим на плоскости первое уравнение



- ③ более двух решений
- ④ более двух решений
- т.к. окр-ти с центрами O_3 и O_4 будут пересекать гр-ки

~~Заметим, что $|x+y+8| + |x-y+8| \geq 2x+16 \Rightarrow x \leq 0$~~

① окр-ти с центрами O_1, O_2 касаются гр-ки первого ур-я

тогда $a = (15-8)^2 = 7^2 = 49$

② окр-ти с центрами O_3 и O_4 содержат т-ки C и B

соответственно, тогда по т. Пифагора $a = 23^2 + 24^2 = 529 + 576 = 1105$

Отв: $a = 49; a = 1105.$

$$\begin{cases} \left(\frac{-x}{y}\right)^{2 \ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

Д.б.з. : $y < 0$
 $x > 0$

$$\begin{aligned} y^2 + 2xy - 3x^2 + 6x^2 + 12x + 4y &= 0 \\ (y-3x)(y+3x) + 2x(y+3x) + 4(y+3x) &= 0 \\ (y+3x)(y-3x+2x+4) &= 0 \\ (y+3x)(y-x+4) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = -3x & ① \\ y = x - 4 & ② \end{cases} \quad \text{1) Подставим ① в первое ур-е, получим:}$$

$$\Rightarrow y = -3$$

$$\begin{aligned} x &= 1, y = -3 \\ y - 6 - 3 + 12 - 12 &= 0 \end{aligned}$$

$(1; -3)$ - решение
проверим по $\ln 3x$

$$\begin{aligned} 2 \log_{3x} 3 \log_{3x} x &= 1 \\ 2 \log_{3x} x &= 1 \end{aligned}$$

$$\sqrt{3x} = x$$

$$3x = x^2 \quad | : x \neq 0$$

$$x = 3$$

$$\Rightarrow y = -9$$

$(3; -9)$ - решение

$$\begin{aligned} \left(\frac{-x}{-3x}\right)^{2 \ln(3x)} &= x^{2 \ln(9x^3)} \\ \left(\frac{x}{3}\right)^{6 \ln(3x)} &= x^{(2 \ln 9x^3 + 2 \ln x)} \\ x^{6 \ln(3x)} &= 3^{\ln(3x)} \cdot x^{2 \ln(9x^3)} \\ x^{6 \ln 3x} &= 3^{\ln 3x} \cdot x^{4 \ln 3x} \cdot x^{2 \ln x} \\ x^{2 \ln 3x} &= 3^{\ln 3x} \cdot x^{2 \ln x} \\ x^{2 \ln 3} \cdot x^{2 \ln x} &= 3^{\ln 3x} \cdot x^{2 \ln x} \\ x^{2 \ln 3} &= 3^{\ln 3} \cdot x^{\ln 3} \end{aligned}$$

$$\text{проверим } x=0 \Rightarrow y=0$$

$$y \neq 0 \text{ по Д.б.з.}$$

$$\Rightarrow x \neq 0$$

$$x^{2 \ln 3} = 3^{\ln 3x}$$

логарифмируем по осн - по 3

$$2 \ln 3 \log_{3x} x = \ln 3x$$

$$2 \ln 3 \log_{3x} x = \ln 3 + \ln x$$

$$\text{проверим } x=1$$

↓ см. продолжение

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

2) Подставим ②

$$\left(\frac{-x^2}{x-4}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln(x(x-4)^2)}$$

~~Или так~~

$$\left(\frac{-x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$\left(\frac{-x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln(-y)}$$

$$\left(\frac{-x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln x}$$

$$\left(\frac{-x^3}{x-4}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln x}$$

$$\frac{3\ln(4-x)}{x-4} = \frac{2\ln x}{x}$$

$$\rightarrow \log_x \left(\frac{-x^3}{x-4}\right)^{\ln(4-x)} = 2\ln x$$

при этом $x > 0$ и $x < 4$

т.к. $x \in (0, 4)$: $(3 - \log_x(4-x))(\log_x(4-x)) = 2$

$$\log_x(4-x) = d$$

$$-d + 3d + 2 = 0$$

$$d = 9 + 8 = 1$$

$$d = \frac{-3 \pm 1}{-2} = 2; 1$$

↓ см. продолжение

$$\begin{cases} \lg_x(4-x) = 1 \\ \lg_x(4-x) = 2 \end{cases}$$

$$1) x = 4 - x \rightarrow x = 2 \rightarrow y = -2$$

$$2) x^2 = 4 - x$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

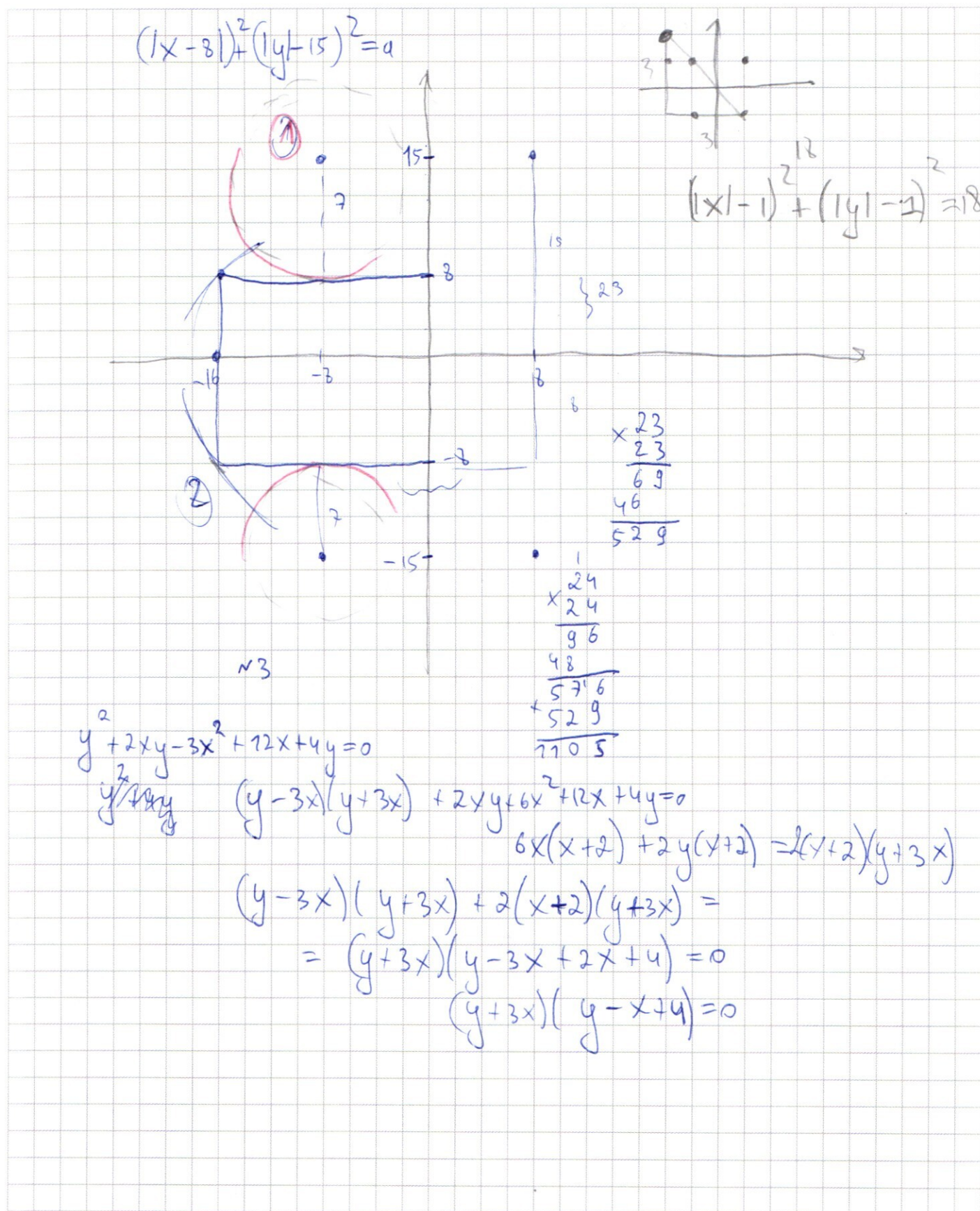
$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \rightarrow y = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} > 0$$

$\Rightarrow$ не подходит

Ответ: $(1; -3), (3; -9), (2; -2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$(y+3x)(y-x+4)=0$$

$$y^2 - xy + 4y + 3xy - 3x^2 + 12x = 0$$

$$\begin{cases} y = -3x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$\left(\frac{-x}{y}\right)^7 \ln(-y)$$

$$y - 6 - 3 + 12 - 12 = 0$$

$$\left(\frac{-x}{y}\right)^7 \ln(-y) = x^{2 \ln(xy^2)}$$

$$\left(\frac{-x}{-3x}\right)^7 \ln 3x = x^{2 \ln(9x^3)}$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^6 \ln(3x) = x^{2 \ln(9x^3)}$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^6 \ln(3x) = x^{2 \ln x + 2 \ln(9x^2)}$$

$$x^{6 \ln 3x} = 3^{\ln(3x)} \cdot x^{2 \ln x} \cdot x^{4 \ln 3x}$$

$$x^{2 \ln 3x} = 3^{\ln(3x)} \cdot x^{2 \ln x}$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 \ln 3x = x^{2 \ln x}$$

$$x^{6 \ln(3x)} = 3^{\ln(3x)} \cdot x^{4 \ln 3x} \cdot x^{2 \ln x}$$

$$x^{2 \ln 3x} = 3^{\ln 3x} \cdot x^{2 \ln x}$$

$$x^{2 \ln 3} \cdot x^{2 \ln x} = 3^{\ln 3x} \cdot x^{2 \ln x}$$

$$x^{2 \ln 3} = 3^{\ln 3x}$$

$$x^{2 \ln 3} = 3^{\ln(3 \cdot x)}$$

$$\cancel{x^{2 \ln 3}} = \cancel{3^{\ln 3x}}$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^{2 \ln 3} = 3^x$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$2 \ln_3 3x = \ln 3x$$

$$2 \ln_{3x} 3 \ln_3 x = 1$$

$$2 \ln_{3x} x = 1$$

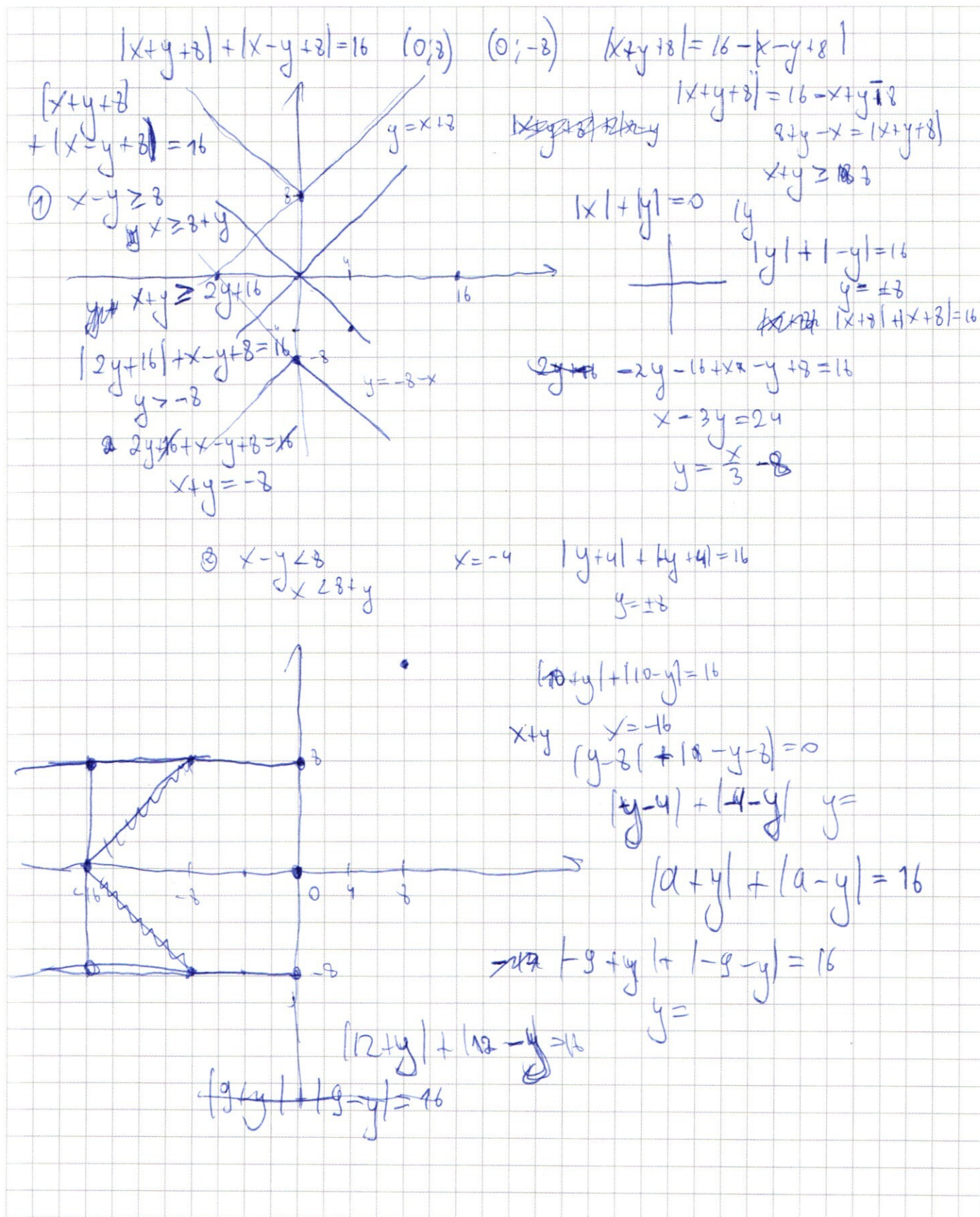
$$\ln_{3x} x = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{3x} = x$$

$$3x = x^2$$

$$x = 0 \quad x = 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\left(\frac{-x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$-x^{3\ln a} = a^{\ln a \cdot 2\ln x}$$

$$\left(\frac{-x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln(-y)}$$

$$= x^{3\ln a} = a^{\ln a \cdot 2\ln x}$$

$$\cancel{\left(\frac{-x^2}{y}\right)^{\ln(-y)}} = x^{2\ln x}$$

$$\log_{ax} e$$

$$-x^{3\ln(-y)} = y^{\ln(-y)} x^{2\ln x}$$

$$\left(\frac{-x^2}{y}\right)^{\ln a \cdot 2\ln x} = x^{2\ln x}$$

$$\log_x \left(\frac{-x^3}{x-4}\right) \ln(4-x) =$$

$$-x^3 = y \cdot x^{\frac{2\ln x}{\ln(-y)}}$$

$$= 2\ln x$$

$$= -x^3 = y \cdot x^{2\ln(-y)x} \log$$

$$\log_x \left(\frac{-x^3}{x-4}\right) \cdot \log_x(4-x) = 2$$

$$\begin{aligned} & x \in (0, 4) \\ & (3 \log_x x^3 - \log_x(4-x)) \log_x(4-x) = 2 \\ & 3 \log_x(4-x) - \log_x \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 9} \\ 63 \\ \hline 18 \\ 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7203 \overline{) 3} \\ -6 \\ \hline 12 \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 49 \\ \hline 341 \\ 156 \\ \hline 1882 \end{array}$$

$$64827 =$$

$$= 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} 2401 \overline{) 7} \\ -21 \\ \hline 30 \\ 27 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ -28 \\ \hline 63 \\ 49 \\ \hline 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \overline{) 7} \\ -49 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\textcircled{1} 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\textcircled{2} 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$$

$$\textcircled{1} C_8^4 \cdot C_4^3 + \textcircled{2} C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1$$

n_2

$$(\cos 7x + \cos 3x) + (\sin 7x - \sin 3x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) + \sqrt{2}$$

$$(\cos 7x + \sin 7x) + (\cos 3x - \sin 3x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos(7x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + \cos 4x = 0 \quad 2 \cos 5x \cos(2x - \frac{\pi}{2}) + \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \sin 2x + \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \sin 2x + 2 \sin^2 2x + 1 = 0$$

$$\sqrt{2} \cos(7x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos(7x - \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos(2x - \frac{\pi}{2}) + \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos(\frac{\alpha}{2}) + \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$2 \cos 5x \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha = 0$$

$$2 \cos 5x \cos \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 0$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} (\cos 5x - \sin \frac{\alpha}{2}) = 0$$

$$\cos \frac{4x - \frac{\pi}{2}}{2} (\cos 5x - \sin(2x - \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\cos \frac{4x - \frac{\pi}{2}}{2} (\cos 5x - \cos(\frac{\pi}{4} - 2x)) = 0$$

$$2 \sin 2x (\cos 5x - \sin 2x) + 1$$

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos 2x \cos 2x + \sin 2x \cos 2x \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin 2x \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - (2x - \frac{\pi}{4})) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(y+2x)^2 - 4x^2 + x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$-3x(x-4)$$

$$(y-2x)(y+2x)$$

$$(x+y)^2$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 6x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$-3x^2 + 6x^2$$

$$(-3x+y)(x+y) = -3x^2 - 3xy + xy + y^2 = -3x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x+y)^2$$

$$(-3x+y)(x+y) + 4xy + 12x + 4y =$$

$$6x + 6x$$

$$4xy + 12x + 4y$$

$$3x(y+4)$$

$$= 6 \cdot 2x(2y+3x) + 2(2y+3x) =$$

$$= (2y+3x)(2x+2)$$

$$(-3x+2y)(x+y) = 0$$

$$[-3x^2 - 3xy + 2yx + 2y^2] - y^2 + 3xy + 12x + 4y$$

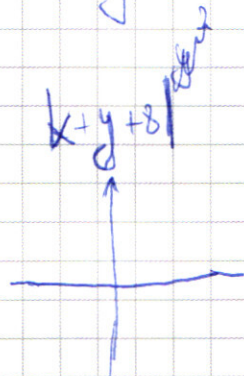
$$(y-2)^2 = y^2 - 4y + 4$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^2 \ln(-y) = x^2 \ln(xy^2)$$

$$x-y=0$$

$$x=y$$

$$|x+y| + |x-y| = 0$$



$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(y+x)^2 - 4x^2 + 12x + 4y = -4(x-3x+y)$$

~5

$$(0; -8)$$

$$(0; 8)$$

или
или

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$|x+y+8| = 16 - |x-y+8|$$

$$|x+y+8| + |x-y+8| \geq 2x+16$$

20

$$x+y+8$$

