

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

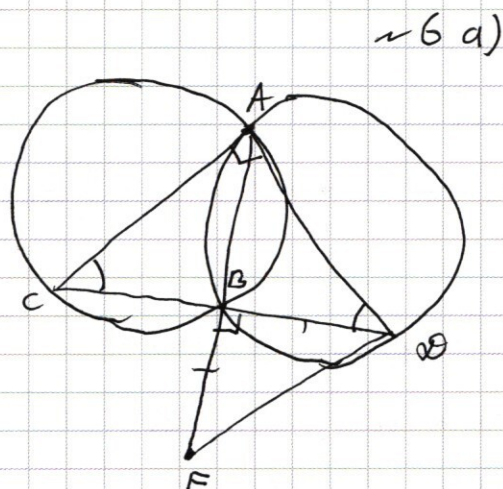
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



По теореме синусов

$$\cancel{17.2} = 17.2 = \frac{AC}{\sin A}$$

$$17.2 = \frac{A\textcircled{2}}{\sin \angle AB\textcircled{2}} = \frac{A\textcircled{2}}{\sin(180 - \angle ABC)} = \frac{A\textcircled{2}}{\sin \angle ABC}$$

$$AC = AD$$

$\angle ADB = 45^\circ$ (т.к. $\triangle ACD$ - прямоугольный и равнобедренный)

по свойству $A \oplus = AC = a$, $B \oplus = BF = b$.

по теореме синусов $AB = 17.2 \cdot \sin 45 = 17\sqrt{2}$

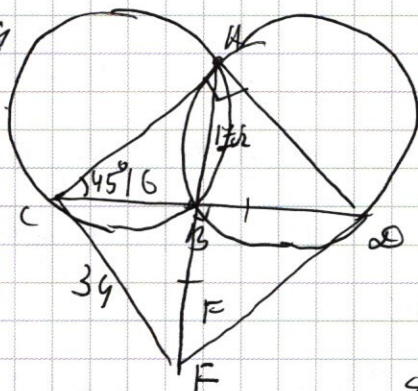
по теореме косинусов $AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 45^\circ = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab$

$$\Delta CB = CD - BD = \sqrt{2}a - b$$

по Т. Пифагора $(CF)^2 = (CB)^2 + FB^2 = (\sqrt{2}a - b)^2 + b^2 = 2a^2 + 2b^2 - 2\sqrt{2}ab$

$$CF^2 = 2AB^2 \Rightarrow CF = \sqrt{2} AB = 34 \quad \text{Ostet: } 34$$

5) $\text{AlBr}_3 + \text{KBr}$



По теореме синусов

$$34 = \frac{16}{\sin C AB}$$

$$\sin \angle CAB = \frac{8}{17} \Rightarrow \cos \angle CAB = \frac{15}{17}$$

$$\sin(\angle B A) = \sin(180^\circ - 45^\circ - \angle C A B)$$

$$\sin \angle CBA = \sin(45^\circ + \angle CAB) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{8}{17} + \frac{15}{17} \right)$$

$$\sin \angle CBA = \frac{23}{\sqrt{2} \cdot 17} \Rightarrow \text{по т. синусов } AC = 34 \cdot \frac{23}{17\sqrt{2}} = 23\sqrt{2}$$

~~$\sin \angle ACF = \sin (45 + \angle BCF)$~~

$$\text{скажи } \cos(\angle BCF) = \frac{8}{17} \Rightarrow \sin \angle BCF = \frac{15}{17}$$

$$\sin(\angle ACF) = \sin(45^\circ + \angle BCF) = \frac{23}{\sqrt{2}17}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \sin ACF \cdot AC \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot \frac{23}{\sqrt{2}17} \cdot 23\sqrt{2} \cdot 34 = 23^2 = 529$$

Ответ: 529

~2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) + \sqrt{2} \cos 4x + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sqrt{2} \cdot 2$$

$$2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \cdot \cos 5x + \sqrt{2} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \quad \text{или} \quad \cos 5x + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} - 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 5x = \cos\left(\frac{3}{4}\pi - 2x\right)$$

$$-2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{3}{4}\pi - 2x + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$5x = 2x - \frac{3}{4}\pi + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = -\frac{3}{4}\pi + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3}{24}\pi + \frac{2}{7}\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$, $\frac{3}{24}\pi + \frac{2}{7}\pi k$, $-\frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi k$, где k - целое

~1

$64827 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow$ в числе 4 цифры 7

одна 3, одна 9, две 1 или четыре 7, три 3, одна 1
восьмизначных чисел, в которых
одна 3, одна 9, четыре 7 и две 1

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{2 \cdot 1}{2!} = 840$$

восьмизначных, в которых четыре 7, три 3, одна 1

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} \cdot 1 = 280 \text{ трехзначных чисел}$$

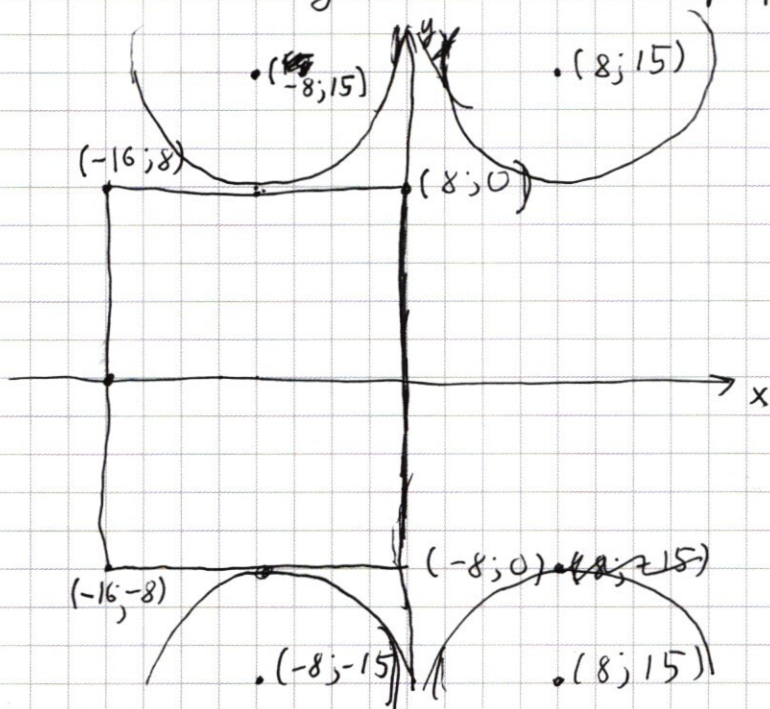
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

и 11 продолжение)

Всего тысяч погодных по условиям
 $840 + 280 = 1120$

at feet: 1120

~ 5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \leftarrow \text{график этого уравнения квадрат} \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 1 \leftarrow \text{график этого уравнения} \end{cases}$$


4 дуги и точка или
4 или 8 дуг окружностей
или 4 окружностей

с центрами в точках

$$(\pm 8; \pm 15) \text{ (при } a > 0, \text{ и радиусом } \sqrt{a})$$

при $a=0$ - 4 точки, при a

$a < 0$ пустое множество

Катя Зеттлмайр

~~hpa q = 49 -~~~~2 решения $(-8, \pm 8)$~~

(дан т.к. окружности касаются)

Если $\Delta < 49$, то решений нет (т.к. окружности не пересекают график Γ уравнения)

если $a = 49$, то 2 решения: $(-8; 8)$ и $(-8; -8)$

если $a = 15^2 + 8^2 = 289$ 2 решения: $0; 0$ и $(04; -16)$

если $49 \leq a \leq 289$ то решений ^{но меньше 4} ~~большее~~ ^и ~~уравнения~~ ^{т.к.} ~~дуги окружностей~~ ^{центры} $(-8; 15)$ и $(-8; -15)$ пересекают

~5 (продолжение)

график I уравнения каждой линии в 2 точки

если не совпадет то решений нет

ответ: $a = 289$, $a = 49$

~3

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{\ln(-y^2)} - \ln(x^2 y^4) = -y \ln(-y) \\ \begin{cases} y - x + 4 = 0 \\ y + 3x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{3\ln(y^2) - 2\ln x} = -y \ln(-y) \\ \begin{cases} y = -3x \\ y = -4 + x \end{cases} \end{cases}$$

если $y = -3x$

$$x^{3\ln(+3x) - 2\ln x} = (3x)^{\ln(3x)}$$

$$x^{\ln(27x)} = (3x)^{\ln(3x)}$$

$$x^{\ln 9} = 3x$$

$$x^{\ln 9 - 1} = 3$$

если $y = -3x$

$$x^{3\ln(3x) - 2\ln x} = (3x)^{\ln 3x}$$

$$x^{\ln 27x} = 3x^{\ln(3x)}$$

$$x^{\ln 27x} = 3^{\ln 3x} \quad x^{\ln 9} = 3^{\ln 3x}$$

$$9^{\ln x} = 3^{\ln 3x} \Rightarrow x^2 = 3x \Rightarrow \boxed{x=3 \quad y=-9} \leftarrow \text{не подходит}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

20 4) 400 + 120 15

23 23²

23
23
69
46
529

$\frac{a}{2R} = \sin \alpha$

$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$CF^2 = b^2 + (a - b)^2$

$CF^2 = 2a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$CF^2 = 2AB^2$

$CF = \sqrt{2} AB$

236×17

33

$34 = \frac{16}{\sin B}$

$\sin B = \frac{8}{17}$

$\sin(B + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\frac{23}{17}) = \frac{23}{17\sqrt{2}}$

$\sqrt{2} 34 = \frac{a}{\sin B}$

235

$\sin(\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{8}{17}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\frac{16}{17} + \frac{\sqrt{33}}{17}) = \frac{16 + \sqrt{33}}{17\sqrt{2}}$

$\frac{23\sqrt{2} \cdot 17 \cdot (16 + \sqrt{33})}{17\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{23 \cdot (16 + \sqrt{33})}{2} \cdot \frac{27 \times 3}{x^2}$

$\cos(\frac{\pi}{4} - x) + \cos(\frac{\pi}{4} + 3x) + \cos 4x + \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$27 \cos(\frac{\pi}{4} - 2x) \cdot \cos(5x) + \cos(4x + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos 1$

~ 3 (продолжение)

если $y = -4 + x$

т.к. по $0 \leq x \leq 3$ ~~$y \geq 0$~~ , а $x > 0$

$x < 3$, $-4 < y$

~~$x \ln x^2 = -y \ln(-y) - \ln(y)^3$~~

~~$x \ln x^2 = (-y) \ln(-y)$~~

~~$x \ln x = (-y) \ln(-y)$~~

~~$x \ln(-y) = (-y) \ln(x)$~~

~~$(-y) \ln x = (-y) \ln(-y)$~~

~~$x \ln \left(\frac{x}{-y} \right) = 1$~~

~~$\ln \frac{x}{-y} = 0 \Rightarrow \frac{x}{-y} = 1 \Rightarrow x = -y \Rightarrow x = 2, y = -2$~~

~~$x \ln(-y)^3 = 2 \ln x = (-y) \ln(-y)$~~

~~$x \ln(-y)^3 = 2 \ln x$~~

если $y = -4 + x \Rightarrow x = y + 4$

т.к. по $0 \leq x \leq 3$ $y < 0$, а $x > 0$

$x < 3$, ~~$-4 \leq y$~~ $-4 < y$

$(y+4) \ln(-y)^3 - \ln(y+4)^2 = (-y) \ln(-y)$

$(y+4)^3 - \ln(y+4)^2 = (-y)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$93 + 3^{28}x - 3x > 3^x \cdot 4 \cdot 3^{28}$$

$$3^{28}(x-4) - 3(x-4) > 3^x - 93 + 12 = 3^x - 81$$

$$3(3^{27}-1)(x-4) > 3^x - 81$$

$$(3^{27}-1)(x-4) > 3^{x-1} - 27$$

$$x=4$$

$$e^{\ln 3(x-1)}$$

$$e^{\ln 3(x-1)} \cdot \ln 3$$

$$64 + 49$$

$$103$$

$$2x + 16 = 16$$

$$-x - y - 8 + x - y + 8 = 16$$

$$\sqrt{103} < a < \sqrt{173}$$

$$y = -8$$

$$15 + 8 = 23$$

$$229 + 64$$

$$289$$

$$\sqrt{103} < a < \sqrt{(23)^2 + 8^2}$$

$$1$$

$$\text{сум } 1 \text{ корень}$$

$$(a=49)$$

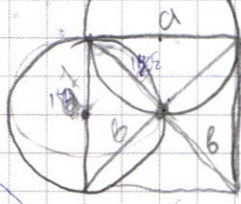
$$a = 13^2 + 8^2 = 269$$

$$\sqrt{a} < 5^2 + 8^2$$

$$15^2 < a \text{ и корень не}$$

$$OC \cdot BC = a \cdot t$$

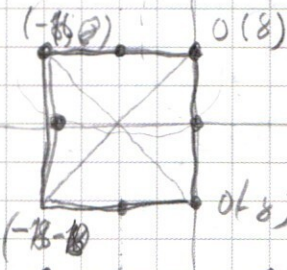
$$\frac{OC}{a} = \frac{BC}{t} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



$$a^2 + 2b^2$$

$$a^2 + b^2 = \sqrt{2}ab$$

$$2b^2$$



$$(3)$$

$$(\sqrt{2}a - b)^2 + b^2$$

$$2a^2$$

$$AF = a^2 + 2b^2 +$$

$$a^2 + b^2 = \sqrt{2}ab =$$

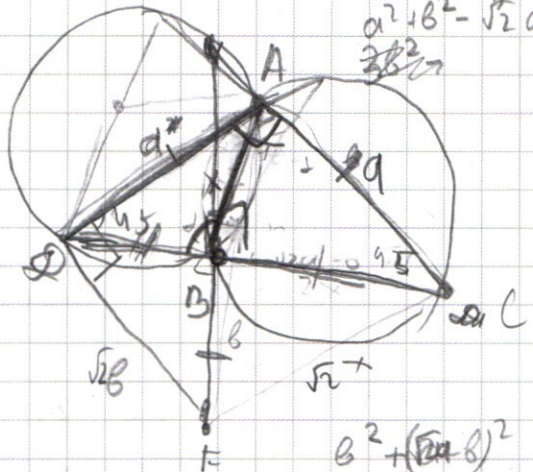
$$BF = b = a^2 + (\sqrt{2}a - b)^2 - \sqrt{2}ab =$$

$$AB = a^2 + b^2 - 2ab\sqrt{2}$$

$$AB^2 = a^2 + b^2 = ab\sqrt{2}$$

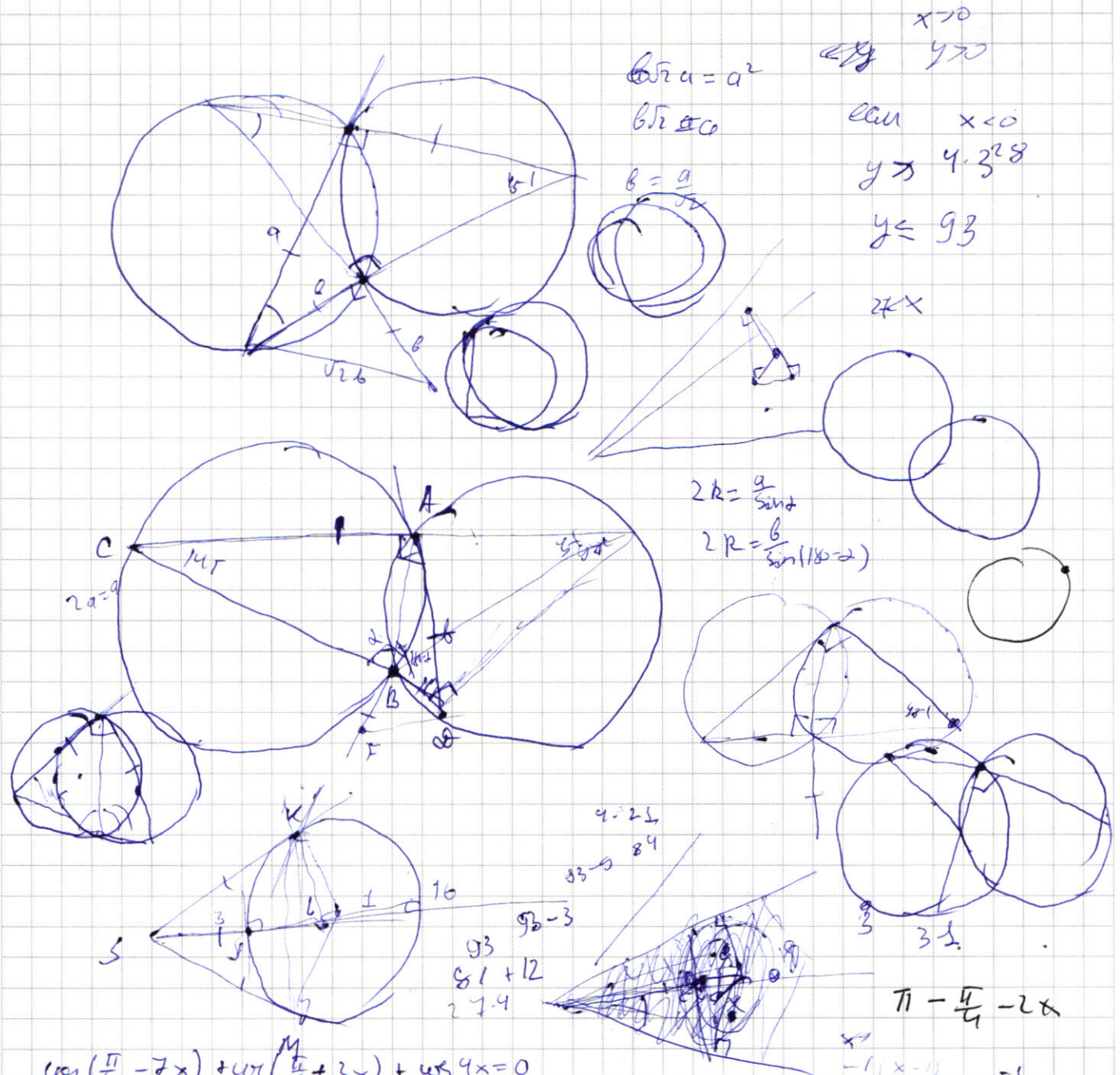
$$AB^2 = (a - \sqrt{2}b)^2 - b^2$$

$$b^2 - \sqrt{2}ab = 2a^2 - 2\sqrt{2}ab$$



$$b^2 + (\sqrt{2}a - b)^2$$

$$2a^2 + 2b^2 - 2\sqrt{2}ab$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) + \cos 9x = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) + \cos 9x = 0$$

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y > 3x + 4 \cdot 38$$

$$y \leq 93 +$$

$$y \leq 93 + 3^{28}x - 3x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3^{28}x - 3x$$

$$3^{x-1} + 4 \cdot 3^{27} < 93 + 3^{27}x - x$$

$$3^{x-1} - 89 < 3^{27} + 4(3^{27} - 1) + 4 < 93 + 3^{27}x - x$$

$$3^{x-1} - 89 < (3^{27} - 1)(x - 4)$$

если $x < 0$, то правая часть не 0

$$\begin{array}{r} 28 \\ 27+3 \\ 39 \\ 30 \\ 225 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 9} \\ \underline{63} \\ 18 \\ \underline{18} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \cdot 7203 \\ 7203 \overline{) 7} \\ \underline{7} \\ 20 \\ \underline{14} \\ 63 \end{array}$$

$$9 \cdot 7 \cdot 1027$$

$$\begin{array}{r} 1027 \overline{) 3} \\ \underline{9} \\ 12 \\ \underline{9} \\ 343 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ \underline{28} \\ 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 49 \\ \hline \end{array}$$

$$(50-1)^2 = 2500 + 1 - 100 = 2401$$

$$9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 343 = 7^2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 =$$

$$2401 \times 27 = 54,000 + 10,800 + 27 = 64827$$

$$7^4 \cdot 3^3$$

теперь 7

7

при 3
1-единица

одна, 8 раз 3
2 единицы

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ \times 7 \\ \times 42 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3!}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{2!}{2!}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} (4 + 12) = 70 \cdot 16 = 1120$$

$$\cos 7x + \sin 7x$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 7x + \sin 7x = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right)$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + 3x \right)$$

$$7 \cdot 8x$$

$$9x \cdot \frac{\pi}{4} - 7x \cdot \frac{\pi}{4} - 3x$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} + 3x \right) + \cos 4x = 0$$

$$2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) \cdot \cos 5x + \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x \cos 3x - \sin 3x \sin 4x + \cos 3x + \sin 4x \cos 3x + \sin 3x \cos 4x$$

$$-\sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 3x (\cos 4x + 1 + \sin 4x)$$

$$\left(\frac{x}{-y} \right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2)$$

$$(-y)^{\ln(-y)} = x^{\ln(-\frac{y^3}{x^2})}$$

$$\frac{x^{\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} = x^2 \ln(xy^2)$$

$$-y = x^{\ln(-y)}$$

$$\ln(-y)^{\ln(-y)} = x^{7 \ln(-y) - 2 \ln(xy^2)}$$

$$-y = x^3$$

$$(-y)^{\ln(-y)} = x^{\ln(-\frac{y^3}{x^2})}$$

$$y' + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(y + x + 4)$$

$$(y + 3x)$$

$$y - x + 4 = 0 \quad \text{или} \quad y + 3x = 0$$

$$-y = z$$

$$-z - x + 4 = 0 \quad \text{или} \quad 3x = z$$

$$\frac{x^2 \ln z}{z \ln(z)} = x^2 \ln(xz^2)$$

$$x^{\ln z} \cdot x^{-\ln(z^2 \cdot x^2)} = z^{\ln z}$$

$$x^{\ln(z^3/x^2)} = z^{\ln z}$$

$$z^{\log_2 x} \cdot \ln(z^3/x^2) = z^{\ln z}$$

$$\log_2 x \cdot \ln z^3/x^2 = \ln z$$

$$\ln x \cdot \ln \frac{z^3}{x^2} = \ln^2 z \cdot \ln$$

$$\log_2 \frac{z^3}{x^2} - \log_2 x = 0$$

$$\frac{z^3}{x^2} = x \quad z = x^{3 - \log_2 x^2}$$

$$3x = x^{3 - \log_2 x^2}$$

$$3x \cdot x^{\log_2 x^2} = x^3$$

$$3 \cdot x^2 \cdot \log_2 x^2 = x^2$$

$$\log_2 x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{9} \log_2 x^2 = \frac{1}{3} \quad -16 \quad 8$$

$$2 \log_2 x = 1 \quad -16 + 8 = -8$$

$$\log_2 x^2 = 1$$

$$3x = x \quad (x=3 \quad z=9)$$

$$2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 12$$

$$70 \cdot 12$$

$$840$$

$$840$$

$$70 \cdot 4$$

$$2 \cdot 25 + 69$$

$$-698 \mid 27$$

$$108$$

$$x + z = 4$$

$$z = x - 4$$

$$x = 4 - z$$

$$z = (4 - z)^{3 - \log_2(4 - z)^2}$$

$$z = (4 - z)^{3 - \log_2(4 - z)^2}$$

$$z \cdot (4 - z)^{\log_2(4 - z)^2} = (4 - z)^3$$

$$\text{если } z < 1, \text{ то } 4 - z > 1$$

$$z < 1 < (4 - z)$$

$$\text{если } z > 3, \text{ то } 4 - z < 1$$

$$z > 1 > (4 - z)$$

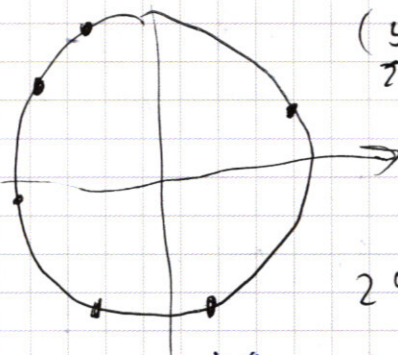
$$\text{если } 1 < z < 3, \text{ то } 1 < 4 - z < 3$$

$$0 < z^2 + z - 4$$

$$z < (4 - z)^3$$

$$\text{если } 2 < z < 3$$

$$z = (4 - z)^{3 - \log_2(4 - z)}$$



$$(50 - 1) \cdot 2500 - 10 \cdot 0 + 1$$

$$2401$$

$$\left(\frac{3^2}{3^2}\right)^{\ln 9} = x^2 \cdot \ln(3^5)$$

$$3^5 \ln 3 = 3^5 \ln 3$$