

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{x}{3}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} y < 0 \\ x > 0 \end{array}$$

$$x^2 \cdot (-y)^{-\ln(y)}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y^2 + 2xy + x^2 - 4x^2 + 12x + 4y &= 0 \\ (y+x)^2 - 4x^2 + 4(3x+y) &= 0 \\ (y+x-2x)(y+x+2x) + 4(3x+y) &= 0 \\ (3x+y)(y-x) + 4(3x+y) &= 0 \\ (3x+y)(y-x+4) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln a &= \\ a &= \\ &= a^{\frac{1}{\log_a e}} = \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{3}\right)^{6\ln 3x} &= (81x^6)^{\ln x} \\ x^{6\ln x} \cdot 81^{\ln x} &= x^{6\ln 3x} \\ x^{6\ln x} \cdot x^{\ln 81} &= x^{6\ln 3x} \\ x^{\ln 81} &= 3 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{(4-x)^2}{x^2} \right)^{\ln x} = (x^4 (4-x))^{\ln(4-x)}$$

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3^{28} x - 3x \end{cases}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < y \leq 93 - 3x + 3^{28} x$$

$$y = 93 + 3^{28} x - 3x = 3(31 - x) + 3^{28}$$

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 - 3x + 3^{28} > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{2}$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x = \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cdot \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = -\cos 4x$$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = \sin^2 2x - \cos^2 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = (\sin 2x + \cos 2x)(\sin 2x - \cos 2x)$$

$$(\sin 2x + \cos 2x) (\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$1) \sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$2) \sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$1) \sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$\tan 2x + 1 = 0$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

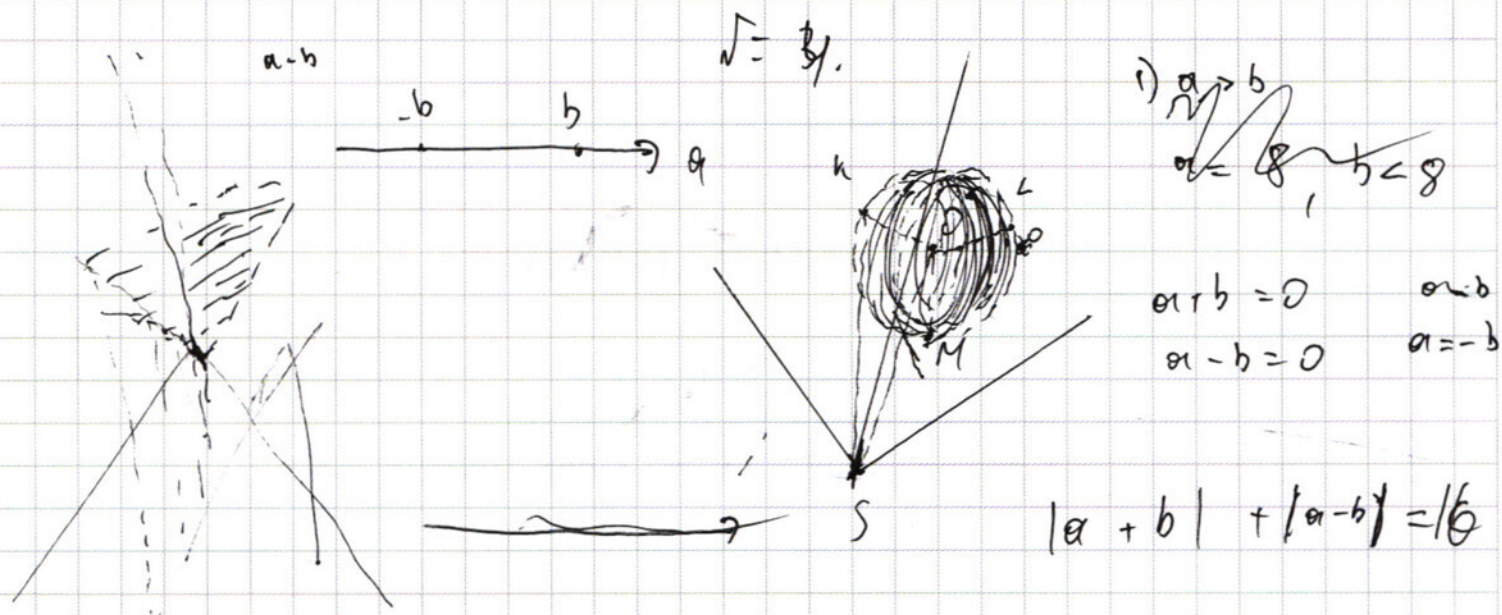
$$\Leftrightarrow \tan 2x = -1 \quad x \in \text{arctan}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2} (\cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x) + \cos 2x - \sin 2x = 0$$

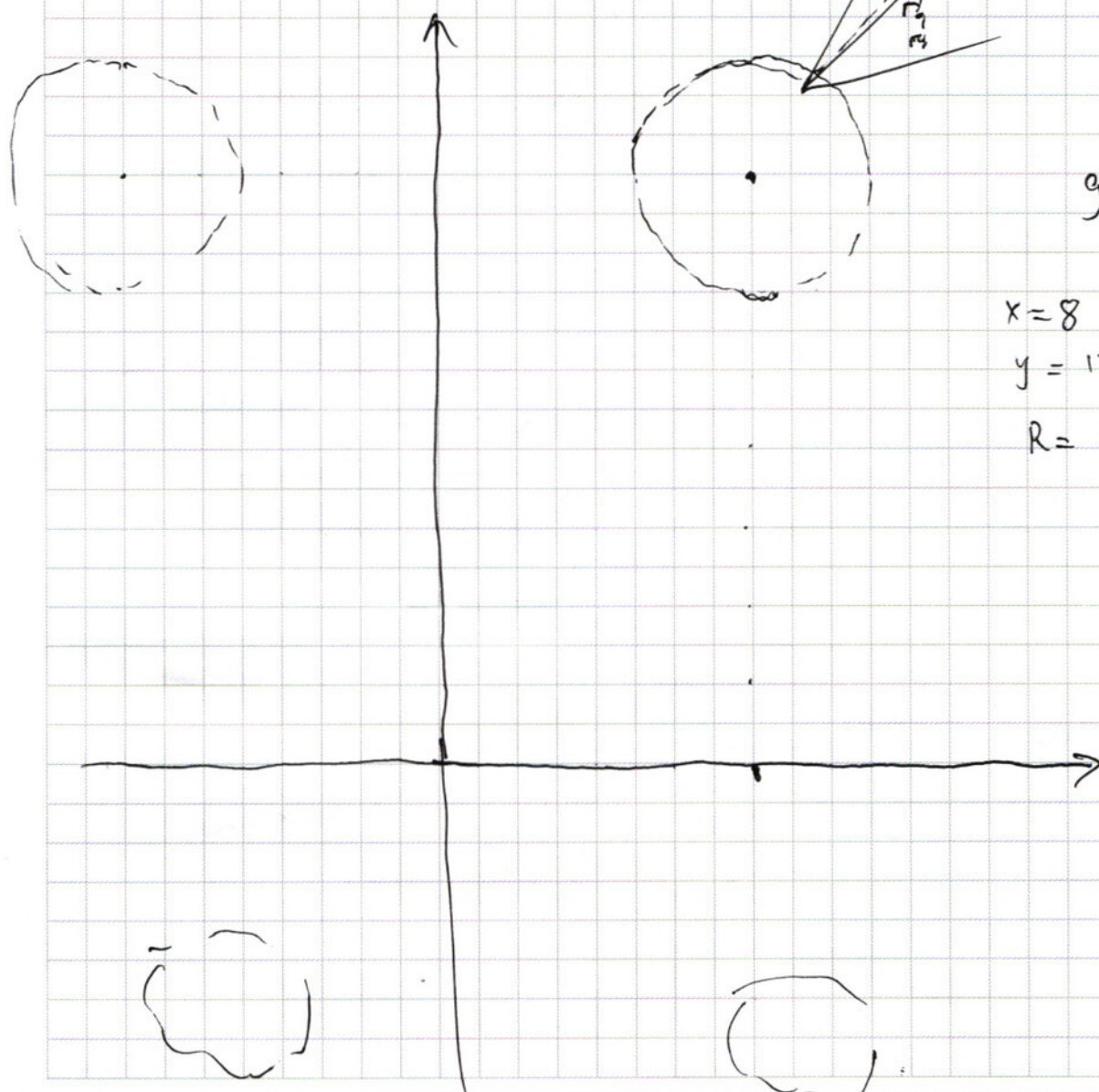
$$\cos 2x (\sqrt{2} \cos 3x + 1) - \sin 2x (\sqrt{2} \sin 3x + 1) = 0$$



$\sqrt{36}$

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-5)^2 = 9 \end{cases}$$

$\exists$ ровно 2 решения



$$\begin{aligned} x &= 8 \\ y &= 12 \\ R &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -8 \\ y &= 12 \\ R &= 9 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$x+y+8=0$$

$$x+y+8=0$$

$$x+y+8 > 0$$

$$x+8$$

$$-y$$

$$\longrightarrow x$$

$$1) x+y+8=0$$

$$y = -8-x$$

$$|x+8+x+8| = 16$$

$$\begin{cases} x+y+8 > 0 \\ y > -8-x \end{cases}$$

$$|x+8| = 8$$

$$x=0, y=-8$$

$$x=-16$$

$$y=8$$

$$\textcircled{1} < 0$$

$$y < -8-x$$

$$2) x-y+8=0$$

$$y = x+8$$

$$\begin{cases} x-y+8 > 0 \\ y < x+8 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} < 0$$

$$y > x+8$$

$$R = \sqrt{84 + 225}$$

$$1) -8-x < y < x+8$$

$$1) x+y > -x+8 \quad = 17$$

$$\begin{cases} x=0 \\ -8 < y < 8 \end{cases}$$

$$49 + 64 = 113$$

$$-x-y-8 -x+y-8 = 16$$

$$-2x = 32$$

$$P = \sqrt{84 + 225}$$

$$\begin{cases} x = -16 \\ -8 < y < 8 \end{cases}$$

$$3) \textcircled{1} < 0$$

$$\textcircled{2} > 0$$

$$\begin{cases} y < -8-x \\ y < x+8 \end{cases}$$

$$-x-y-8 + x-y+8 = 16$$

$$y = -8$$

$$\begin{cases} y = -8 \\ x < 0 \\ x > -16 \end{cases}$$

$$4) \textcircled{1} > 0$$

$$\textcircled{2} < 0$$

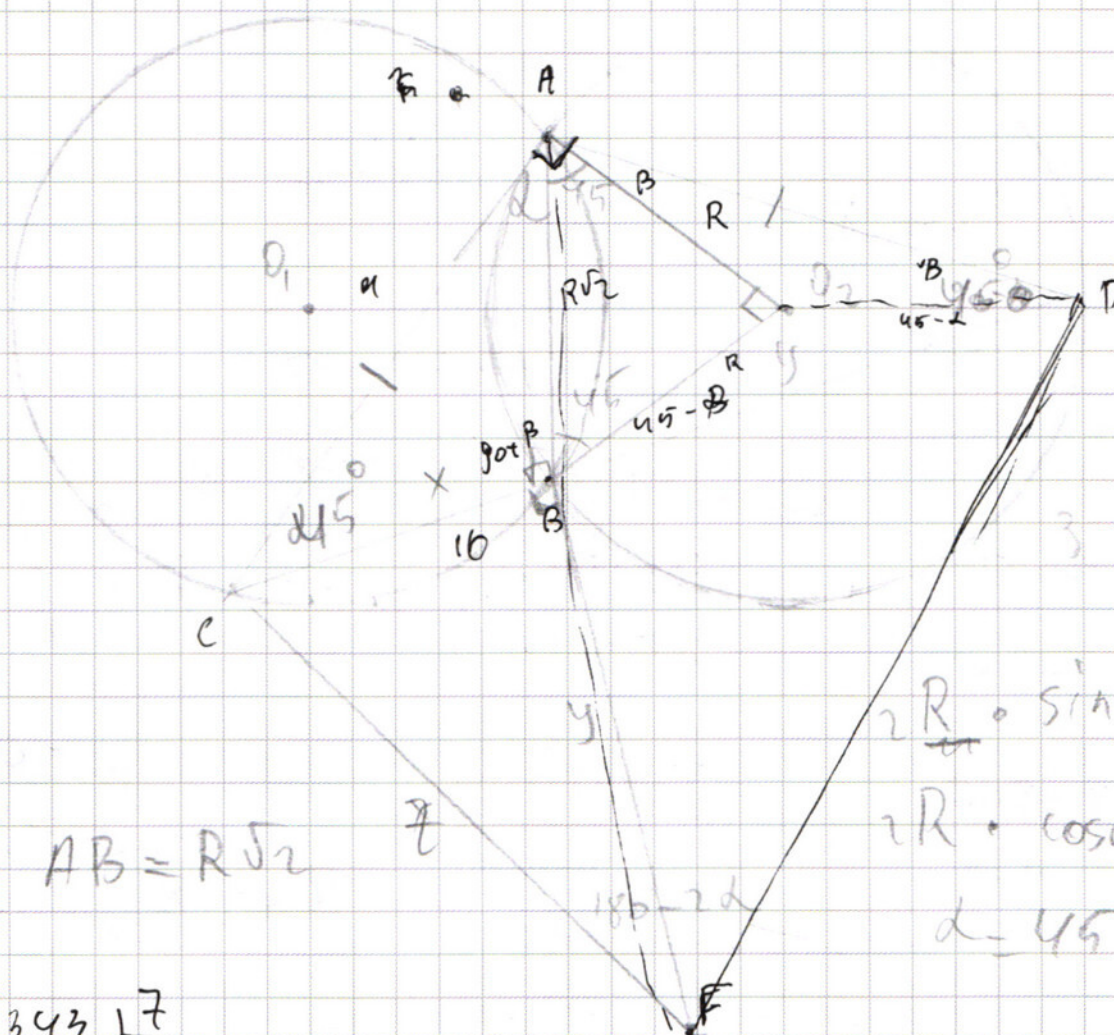
$$\begin{cases} y > -8-x \\ y > x+8 \end{cases}$$

$$x+y+8 -x+y-8 = 16$$

$$\begin{cases} y = 8 \\ x > -16 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1$$

$$R = 17.$$



$$AB = R\sqrt{2}$$

$$2R \cdot \sin \alpha = AB$$

$$2R \cdot \cos \alpha = AB$$

$$\alpha = 45$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ - 28 \\ \hline 63 \end{array}$$

Варианты:

$$\begin{array}{r} 2401 \overline{) 7} \\ - 21 \\ \hline 301 \\ - 28 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$N = 1$$

целые числа от 1 до 9

$$\begin{array}{r} 64827 \\ 21609 \\ 7203 \\ 2401 \\ 343 \\ 49 \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21609 \overline{) 3} \\ - 21 \\ \hline 09 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 3} \\ - 6 \\ \hline 48 \\ - 48 \\ \hline 00 \\ - 3 \\ \hline 18 \\ - 18 \\ \hline 00 \\ 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7203 \overline{) 3} \\ - 6 \\ \hline 12 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 5x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow (\cos 2x + \sin 2x) (\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x + \sin 2x = 0 & (1) \\ \sqrt{2} \cos 5x = \sin 2x - \cos 2x & (2) \end{cases}$$

1) $\cos 2x + \sin 2x = 0$ $\cos 2x \neq 0$, иначе $\sin 2x = 0$, что невозможно.

$\Rightarrow$ делим на $\cos 2x$. $\tan 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = -1$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

2) $\sqrt{2} \cos 5x = \sin 2x - \cos 2x$. Разделим обе части на $\sqrt{2}$.

$$\cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left(\text{т.к. } \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \text{ и } \cos \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x = \cos\left(\pi - 2x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos 5x = \cos\left(\frac{3}{4}\pi - 2x\right)$$

$$\begin{cases} 5x = \frac{3}{4}\pi - 2x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 5x = 2x - \frac{3}{4}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = \frac{3}{7}\pi + \frac{2}{5}\pi k$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{7}\pi + \frac{2}{5}\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

№ 2 (продолжение)

Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$

№ 5

$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$ ①

$(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$ ②

$a = ?$ $\exists$ ровно 2 решения

1) $|x+y+8| + |x-y+8| = 16$

а) $|x+y+8| = 0$

$\Rightarrow y = -8-x \Leftrightarrow \begin{cases} y = -8-x \\ |x-y+8| = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -8-x \\ |x+8| = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -8-x \\ \begin{cases} x=0 \\ x=-16 \end{cases} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=-8 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-16 \\ y=8 \end{cases} \end{cases}$

б) $|x-y+8| = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} y = x+8 \\ |x+y+8| = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+8 \\ |x+8| = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x+8 \\ \begin{cases} x=0 \\ x=-16 \end{cases} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=8 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-16 \\ y=-8 \end{cases} \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y+8 > 0 \\ x-y+8 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -x-8 < y < x+8 \\ x=0 \end{cases}$ (раскрыли модули)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -8 < y < 8 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+y+8 < 0 \\ x-y+8 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+8 < y < -x-8 \\ x=-16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-16 \\ -8 < y < 8 \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+y+8 > 0 \\ x-y+8 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y > -x-8 \\ y < x+8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -8-y \\ x < y-8 \\ y=8 \end{cases}$

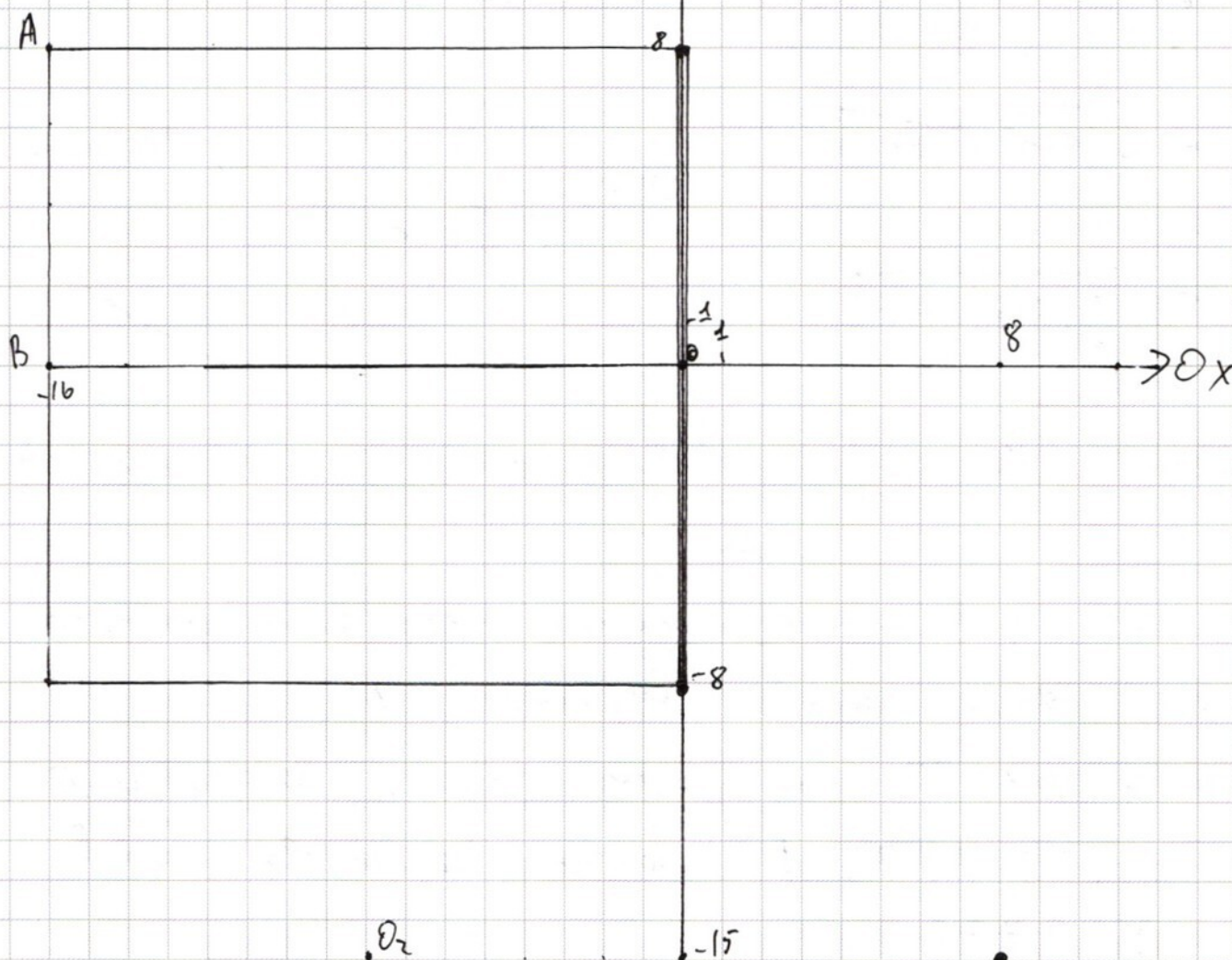
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5 (продолжение)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 \\ -16 < x < 0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y + 8 < 0 \\ x - y + 8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 8 < x < -y - 8 \\ y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -8 \\ -16 < x < 0 \end{cases}$$

2) график ① - окружность, отраженная относительно Ox ,
с радиусом $\sqrt{25}$, график ② - 4 ^{отрезка} ~~прямые~~.
центр окр. в $\pm$ четверти $-(8; 15)$



№: 5 (продолжение)

Чтобы было ровно 2 решения, окружности должны касаться с отрезками ровно 2 раза.

Это возможно, когда:

1) окружности касаются отрезков во II и III четв. и не касаются в I и IV

2) окр-ти касаются отрезков в I и IV четв. и не касаются во II и III.

① возможно только при $\Delta a = 15 - 8 = 7$, иначе будет больше или 0 решений $a = 49$.

Ули или R окр O_1 (ввели обозначение окр. во II четв.) $\rightarrow O_1 A$ $R < O_1 B$ и $R > r_0$ окр.

$A(-16; 8)$, $B(-16; 0)$

$$\begin{cases} \Delta a > \sqrt{(15-8)^2 + (-8+16)^2} \\ \Delta a > 15 \\ \Delta a < \sqrt{(-8+16)^2 + 15^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta a > 15 \\ \Delta a < 17 \end{cases} \Leftrightarrow 175 < a < 189$$

② Решений нет

Ответ: $a \in (175; 189) \cup \{49\}$

№: 1

Дано число 64827 - произведение цифр восьмизначного числа n. Найти кол-во вариантов n.

1) Разложили 64827 на простые числа: Получившийся набор - 333 7777 1. Также возможны ^{набор} набор цифр 9 3 7777 11.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$N: 1$ (продолжение)

Посчитаем кол-во комбинаций.

$$n = \frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} =$$

$$= 280 + 120 \cdot 2 = 280 + 240 = 520$$

Ответ: 520

$N: 3.$

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2) & (1) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 & (2) \end{cases} \quad \begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \Leftrightarrow (y+x)^2 - 4x^2 + 4(3x+y) =$$

$$= 0 \Leftrightarrow (y+x-2x)(y+x+2x) + 4(3x+y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3x+y)(y-x+4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \\ \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x & (4) \\ y = x - 4 & (5) \end{cases}$$

$$(A) \begin{cases} y = -3x \\ y < 0 \\ x > 0 \\ \left(-\frac{x^2}{-3x}\right)^{\ln(3x)} = x^2 \ln(x \cdot 9x^2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ y = -3x \\ \left(\frac{x}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^2 \ln(9x^3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ y = -3x \\ \left(\frac{x}{3}\right)^{6 \ln(3x)} = (81x^6)^{\ln x} \end{cases}$$

$$\log_b C = C^{\log_b a} \Rightarrow$$

$$\frac{(3x)^{6 \ln x}}{3^{6 \ln x}} = x^{6 \ln x} \cdot 81^{\ln x}$$

$$\frac{6 \ln x}{x} > 0 \Rightarrow \frac{3^{6 \ln x}}{3^{6 \ln x}} = 81^{\ln x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \ln = 3$$

$$6 \ln x - \ln(3x) = 4 \ln x \Leftrightarrow 2 \ln x = \ln(3x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3x$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=3 \\ x>0 \\ y<0 \\ y=-3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-9 \\ x<0 \end{cases}$$

$$(5) \quad y = x - 4$$

$$\left(\frac{-x}{x-4}\right)^{7 \ln(4-x)} = x^{2 \ln(x(x-4)^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{7 \ln(4-x)}{x} = \frac{2 \ln(x(x-4)^2)}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{7 \ln(4-x)}{x} = \frac{2 \ln x + 4 \ln(x-4)}{x}$$

$$\frac{7 \ln(4-x) - 2 \ln x}{x} = \ln(4-x)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\ln \frac{(4-x)^7}{x^2} = (4-x) \ln(x^4(4-x))$$

$N=3$ (продолжение)

Ответ: (3, -9)

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

$N=7$

② Рассмотрим и случай равенства.

$$y = 93 + 3^{28}x - 3x \Leftrightarrow y = 3(31 - x) + 3^{28}x$$

$$93 + 3^{28}x - 3x > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3^{28}(x-4) > 3^x + 3x$$

$$3(31 - 4 \cdot 3^{27}) > 3^x + 3x - 3x$$

Дано:

$$\omega_1 = \omega_2$$

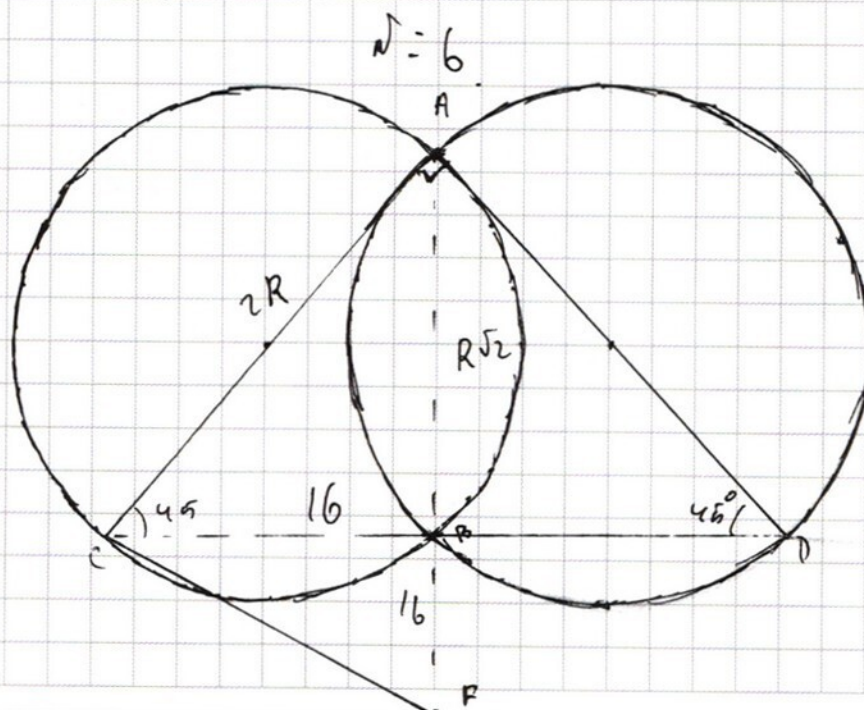
$$R = 17$$

$\triangle ACD$ - прям.

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$CF = ?$

$$S_{ACF} = ?$$



Решение!

1) Распишем AB для двух опр. $\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R = \frac{AB}{\sin(90-\alpha)}$

где $\alpha = \angle ACB$, а $90-\alpha = \angle ADC$

$$\sin \alpha = \cos \alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ \Rightarrow AC = CD.$$

Единственный вариант построения - когда AD и AC проходят через центр окр. (по т. косинусов для $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$)

2) B - середина $CD \Rightarrow AB$ - медиана и высота

$$CB = BD = BF \Rightarrow CF = CB\sqrt{2} = AB\sqrt{2} \quad (\text{из } \triangle ABC) \\ = R\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2R = 34 \quad \left(AB = \frac{2R}{\sqrt{2}} \text{ из } \text{прям. } \triangle ABD \right) \\ \text{, по в-ву мед. прям. } \angle)$$

$$3) S_{\triangle ACF} = \frac{CF \cdot AF}{2} \quad (\text{т.к. } CF \perp AB) = 16^2 = 256$$

Ответ: 34, 256.