МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ[

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

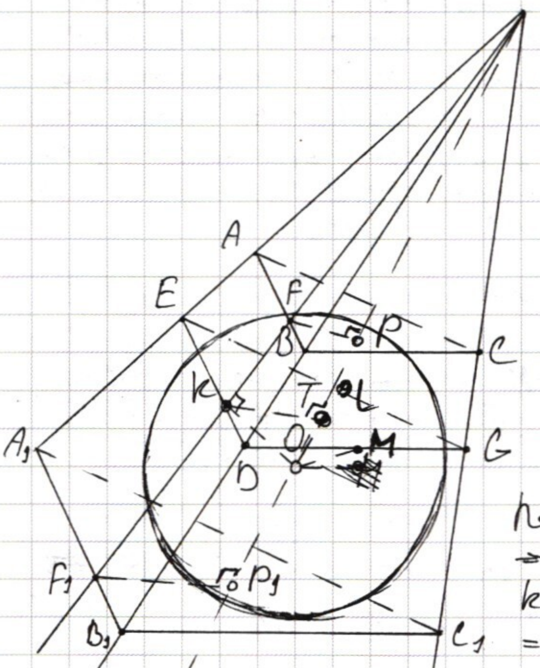
$64827 = \underset{①}{3^3 \cdot 7^4} = \underset{②}{9 \cdot 3 \cdot 7^4}$ ⇒ цифры, которые могут составлять число, всего 4:
- 1 (1 в разложении ① и 2 в разложении ②)
- 3 (3 в разложении ① и 1 в разложении ②)
- 7 (4 в обоих разложениях)
- 9 (1 в разложении ②)

Тогда всего составов числа может быть два вида:

1. $11377779 \longrightarrow \frac{8!}{2!\,4!} = 840$ чисел
2. $13337777 \longrightarrow \frac{8!}{3!\,4!} = 280$ чисел

всего 1120 чисел

Ответ: 1120 чисел.



№ 4.

Поскольку сфера вписана в трёхгранный ∠ ⇒ SO есть прямая, по которой пересекаются биссектрисы двухгранных ∠-в. Заметим также равенство $\triangle OKS = \triangle OMS = \triangle OLS$ по катету и гипотенузе (OS общая, $OK = OM = OL = r$)

$(A, A_1, B, B_1, C, C_1 \in$ рёбрам трёхгр. $\angle)$

Пусть $(ABC), (A_1B_1C_1) \perp SO$ и касаются сферы. Тогда, поскольку $O \in SO$, $P = (ABC) \cap$ сферой и $P_1 = (A_1B_1C_1) \cap$ сферой $P, P_1 \in SO$ и $= SO \cap$ сферой.

Поск. $(ABC), (A_1B_1C_1) \perp SO \Rightarrow (ABC) \parallel (A_1B_1C_1) \Rightarrow$ по соответствующей теореме $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ с $k = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$. Проведём SK, обозначим $SK \cap AB = F$, $SK \cap A_1B_1 = F_1$ и получим 3 подобных прямоугольных треугольника: $\triangle SPF \sim \triangle SP_1F_1$ (с $k = \frac{3}{4}$) $\sim \triangle SKO$.

Обозначим радиус сферы как r, SP возьмём за h. Тогда, по вышесказ. подобию, $\frac{SP}{SP_1} = \frac{h}{h+2r} = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4h = 3h + 6r \Rightarrow h = 6r \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{OK}{OS} = \arcsin \frac{OK}{OP + SP}$

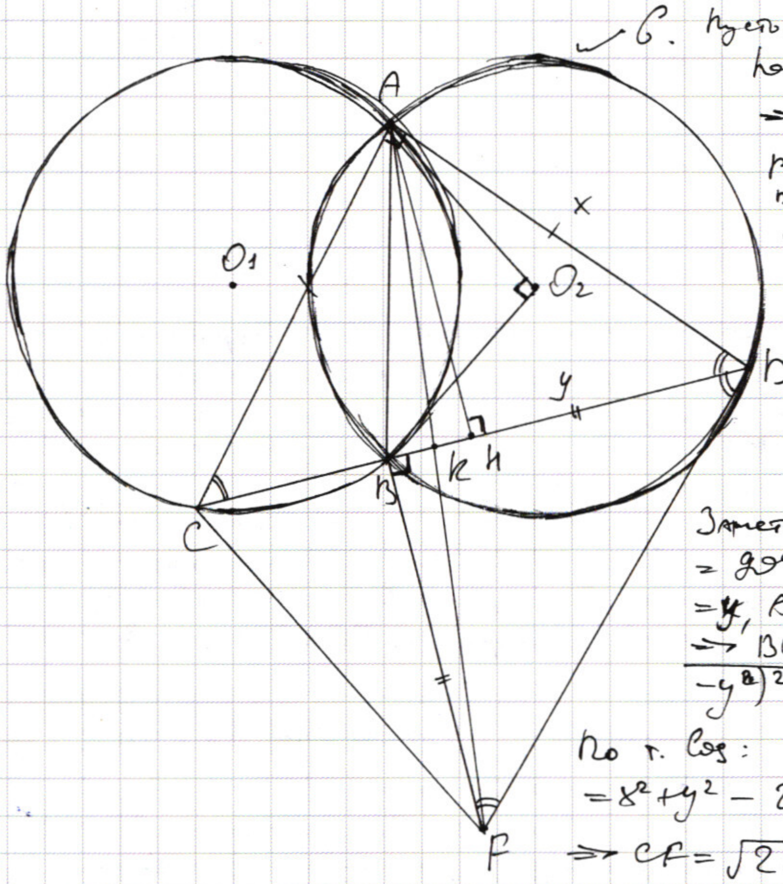
$= \arcsin \frac{r}{r + 6r} = \arcsin \frac{1}{7}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Заметим теперь, что по указ. в самом начале равенству соответствующих Δв $SK = SM = SL \Rightarrow$ при проведении через K, M, L $\parallel$ соответственно AB, BC и AC, эти прямые пересекутся друг с другом в местах пересечения с рёбрами трёхгранного $\angle$ (т. E, D, G) $\Rightarrow (EDG) \parallel (ABC) \parallel (A_1B_1C_1) \Rightarrow \triangle EDG \sim \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$; $\triangle EDG$ — искомое сечение.

По вышенайденному $\sin\angle KSO = \frac{1}{7} \Rightarrow \cos\angle KSO = \frac{4\sqrt{3}}{7} \Rightarrow SF = \frac{SP}{\frac{4\sqrt{3}}{7}} = \frac{7h}{4\sqrt{3}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{SK}{SP} = \frac{SO}{SF} \Rightarrow SK = \frac{h(h+r)}{\frac{7h}{4\sqrt{3}}} = \frac{7r\cdot 4\sqrt{3}}{7} = 4\sqrt{3}r$. Проведём теперь $KT \perp SO$ — тогда $\triangle STK \sim \triangle SPF (\sim \triangle SP_1F_1 \sim \triangle SKO) \Rightarrow \frac{KT}{PF} = \frac{SK}{SF} = \frac{4\sqrt{3}r}{\frac{7h}{4\sqrt{3}}} = \frac{48r}{7\cdot 6r} = \frac{8}{7} \Rightarrow k = \frac{8}{7} \Rightarrow \frac{S_{EDG}}{S_{ABC}} = \frac{64}{49} \Rightarrow S_{EDG} = \frac{64\cdot 9}{49} = \frac{576}{49}$.

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\frac{1}{7}$; $S_{сеч} = \frac{576}{49}$.



6. Пусть O_1, O_2 — центры окружностей. Поскольку окружности равны $\Rightarrow$ дуги $\cup AB$ у каждой из них равны $\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB$ как вписанные в равные окружности, опирающиеся на равные дуги $= 45^\circ$, поскольку $\angle CAD = 90^\circ$ по усл; $AC = AD$. Соответственно, $\angle BDF = \angle BFD = 45^\circ$, т.к. $\triangle BDF$ по усл равнобедренный и прямоугольный $\Rightarrow \angle ADF = 90^\circ = \angle CAD \Rightarrow AC \parallel DF \perp AD$.

Заметим также, что $\angle AO_2B = 2\angle ADB = 90^\circ \Rightarrow AB = 17\sqrt{2}$. Обозначив $BD = y$, $AD = x$, получим, что $CD = x\sqrt{2} \Rightarrow BC = x\sqrt{2} - y \Rightarrow CF = \sqrt{y^2 + (x\sqrt{2} - y)^2} = \sqrt{2y^2 + 2x^2 - 2\sqrt{2}xy}$.

По т. cos: $AB^2 = x^2 + y^2 - 2\cos 45^\circ xy = x^2 + y^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}xy = x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy \Rightarrow CF = \sqrt{2AB^2} = AB\sqrt{2} = 34$.

б). $BC = 16$, $CF = 34 \Rightarrow y = BF = 30 \Rightarrow x = \frac{BC + y}{\sqrt{2}} = 23\sqrt{2}$. Опустим высоту AH на CD — тогда $AH = \frac{x}{\sqrt{2}} = 23$. Из этого следует, что $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 16\cdot 23 = 184$, $S_{CBF} = \frac{1}{2}\cdot 30\cdot 16 = 240$, $BH = \frac{x\sqrt{2}}{2} - BC = 23 - 16 = 7$.

Обозначим $AF \cap CD = K$, заметим $\triangle AHK \sim \triangle FBK$ по острому $\angle$ ($\angle BKF = \angle HKA$ как вертикальные) с $k = \frac{23}{30} \Rightarrow BK = \frac{30}{53}BH = \frac{210}{53} \Rightarrow S_{AKB} + S_{FKB} = \frac{1}{2}\cdot\frac{210}{53}(23+30) = 105$. Тогда $S_{ACF} = S_{ABC} + S_{CBF} + S_{AKB} + S_{FKB} = 184 + 240 + 105 = 529$.

Ответ: $CF = 34$, $S_{ACF} = 529$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 2\cos 5x \cos 2x + 2\sin 2x \cdot$

$\cdot \cos 5x + \sqrt{2}\cos 4x = 2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) =$

$= (\cos 2x + \sin 2x)(2\cos 5x + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)) = 0$

1. $\cos 2x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{8} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

2. $\sqrt{2}\cos 5x + \cos 2x - \sin 2x = 0$

$\sqrt{2}\cos 2x \cos 3x - \sqrt{2}\sin 2x \sin 3x + \cos 2x - \sin 2x = 0$

$\cancel{\cos 2x(\sqrt{2}\cos 3x + 1) - \sin 2x(\sqrt{2}\sin 3x + 1) = 0}$

$\cancel{\sqrt{2}\cos 2x \cos 2x \cos x - \sqrt{2}\cos 2x \sin 2x \sin x - \sqrt{2}\sin 2x \sin x \cos 2x +}$

$\cancel{-\sqrt{2}\sin 2x \sin 2x \cos x + \cos 2x - \sin 2x = 0}$

$\cancel{\sqrt{2}\cos^2 2x \cos x + \cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x \sin x \cos 2x - (\sqrt{2}\sin^2 2x \cos x + \sin 2x}$

$\left(\begin{aligned} &\cos 2x(\sqrt{2}\cos 3x + 1) - \sin 2x(\sqrt{2}\sin 3x + 1) = 0 \\ &\cos 2x(\cos 3x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}) - \sin 2x(\sin 3x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}) = 0 \end{aligned}\right)$

$\sqrt{2}\cos^2 2x \cos x - \sqrt{2}\sin 2x \cos 2x \sin x - \sqrt{2}\sin 2x \cos 2x \sin x - \sqrt{2}\sin^2 2x \cos x +$
$+ \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}\cos x(\cos^2 2x - \sin^2 2x) - 2\sqrt{2}\sin 2x \cos 2x \sin x + \cos 2x -$
$- \sin 2x = \sqrt{2}\cos x \cos 4x - \sqrt{2}\cos 4x \sin x + \cos 2x - \sin 2x = \cancel{\sqrt{2}\cos 4x}$
$= \sqrt{2}\cos 4x(\cos x - \sin x) + \cos 2x - \sin 2x$

№ 3.

$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} xy^2 > 0 \\ -y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$

Пусть $-y = p,\ p > 0.$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\frac{x^{7\ln p}}{p^{\ln p}} = x^{2\ln x} \cdot x^{2\ln p^2} = x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln p} \Rightarrow x^{3\ln p} = x^{2\ln x} \cdot p^{\ln p} \Rightarrow x^{3\ln p - 2\ln x} = p^{\ln p}$

$\cancel{\Rightarrow x^{\ln \frac{p^3}{x^2}} = p^{\ln p} \Rightarrow x = \log_{\ln \frac{(-y)^3}{x^2}} (-y)^{\ln(-y)} = \ln(-y) \log_{3\ln(-y) - \ln x^2} (-y)}$

Рассмотрим II ур-ние относительно y: $y^2 + (2x+4)y - 3x^2 + 12x =$
$= y^2 + 2(x+2)y - (3x^2 - 12x) = 0$

$D_1 = x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x = 4x^2 - 8x + 4 = 4(x^2 - 2x + 1) = 4(x-1)^2 \geq 0$,
причём 1 корень достигается при $x_1 = 1$:
$y^2 + 6y + 9 = 0 \Rightarrow y_1 = -3$.

В остальных случаях $y_1 = \frac{-x+2+2(x-1)}{2} = \frac{x}{2}$, но $x > 0$, а $y < 0$ по ОДЗ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ этот корень не подходит;

$y_2 = \frac{-x+2-2(x-1)}{2} = \frac{-3x}{2} + 2$

$-\frac{3x}{2} + 2 < 0 \Rightarrow x > \frac{4}{3}$.

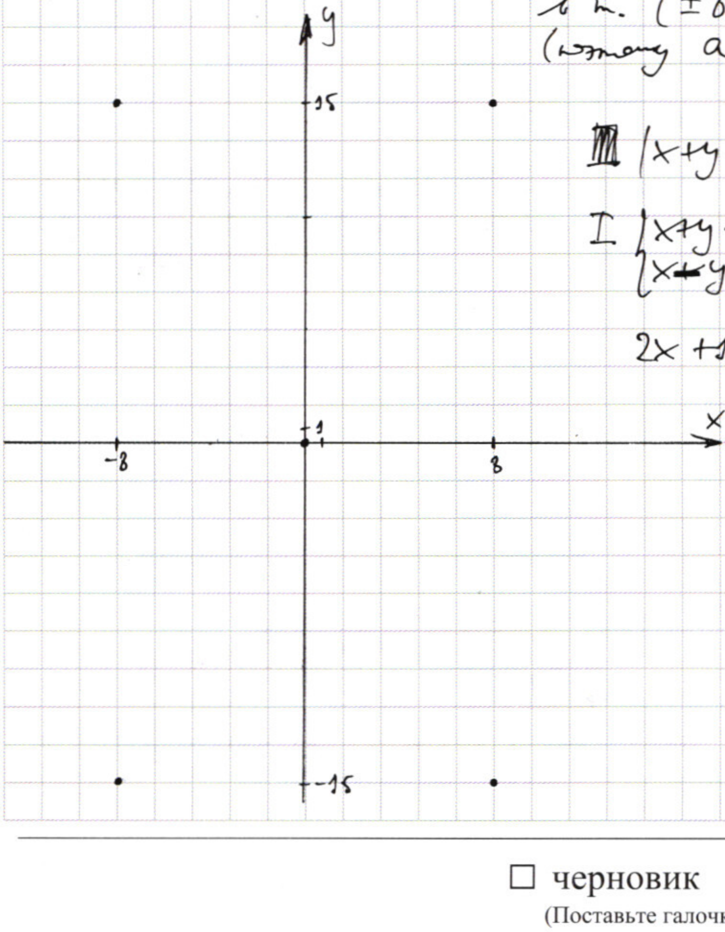
$\cancel{\Rightarrow p^{\ln p} = x^{3\ln p - 2\ln x} \Rightarrow p^{\ln p}}$

$\left(\frac{x^7}{-\frac{3x}{2}+2}\right)^{\ln\left(\frac{3x}{2}-2\right)} = x^{2\ln\left(x \cdot \frac{9x^2 - 24x + 16}{4}\right)}$

№5.

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

$(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$ – ур-ние четырёх окружностей с центрами в т. $(\pm 8; \pm 15)$ и радиусами $= \sqrt{a}$ (поэтому $a \geq 0$).



III $|x+y+8| + |x-y+8| = 16$

I $\begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+16 \geq 0 \\ \cancel{\ldots} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -8 \\ \cancel{x+y \geq -8} \end{cases}$

$2x + 16 = 16 \Rightarrow x = 0$

II $\begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \end{cases}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$

$\sin 3x = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x$

$x^a = b \Rightarrow \log_x b = a$ (cos3)

$x = \log_a b$

$\sqrt{2}\cos^2 2x \cos x + \cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x \sin x \cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x \cos x - \sin 2x - \sqrt{2}\cos 2x \cdot$

$\cdot \sin 2x \sin x = \sqrt{2}\cos^2 2x \cos x + \cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x \cos 2x \sin x - \sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\cos^2 2x \cos x -$

$- \sin 2x$

$\cos 2x - \sin 2x = \cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x \cos x$

$2\cos 4x \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\frac{\cos x - \sin x}{\sin 2x - \cos 2x}$ $\qquad \frac{-x+2+2x-2}{2}$ $\qquad \frac{x^{7\ln p}}{p^{\ln p}} = x^{2\ln x}$

$\log_2 10$

$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

$y \le 31 \cdot 3 + 3(3^{27} - 1)x = 3((3^{27} - 1)x - 31)$

$y/y = 0$: $|x+8| + |x+8| = 16$

$2|x+8| = 16$

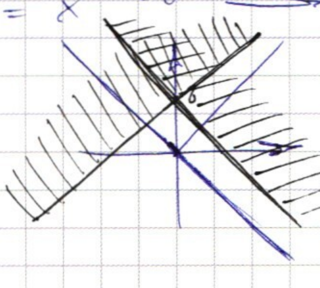
$|x+8| = 8 \Rightarrow x = 0$

$\begin{cases} x + y + 8 \ge 0 \\ x - y + 8 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + 16 \ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \ge -8$

$y \ge 0$

$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \xrightarrow{-y = p} \frac{x^{7\ln p}}{p} = x^{2\ln x} \cdot x^{2\ln p}$



$|y| = |x|$

$|x+y|$

$-\frac{3x}{2} < -2$

$3x > 4$

$x > \frac{4}{3}$

$\left(\frac{-3x+4}{2}\right)^2 = \frac{9x^2 - 24x + 16}{4}$

$y^2 + 2xy + x^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0$

$(x+y)^2 - 4x(x-3) + 4y$

$p^2 - 4p + 4px - 3(x^2 - 4x$ $\quad -2px$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

64827	3
21609	3
7203	3
2401	7
343	7
49	7
7	7

$2401 : 11$: -22, 20, -11, 91 … 21

$2401 : 7 = 343$; $343 : 7 = 49$

$$840 + 280 = 1120$$

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4 = 9 \cdot 3 \cdot 7^4$$

Т.о. в числах могут быть цифры: $-1\,(1/2)$, $-3\,(1/3)$, $-7\,(4)$, $-9\,(1/0)$

Возможн. сост. чисел: 11377779 — $\frac{8!}{2!\,4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2} = 840$

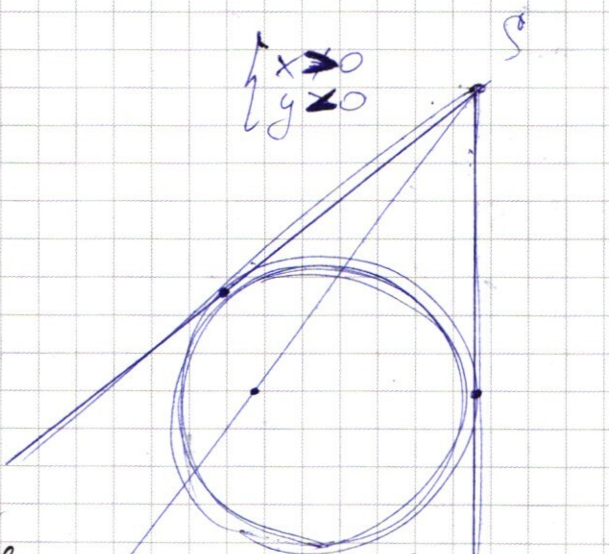
13337777 — $\frac{8!}{3!\,4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3} = 280$

Ответ: 840

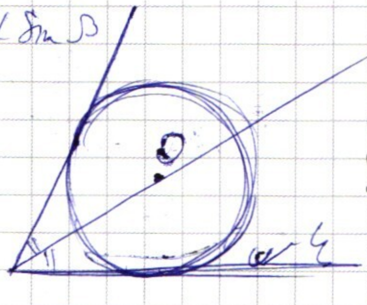
№3

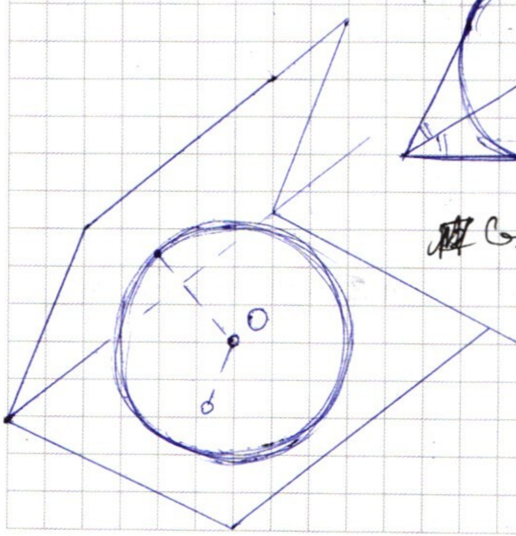
$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$



$$\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$
$$\sin 3x = \cos 2x \sin x + \cos x \sin 2x$$



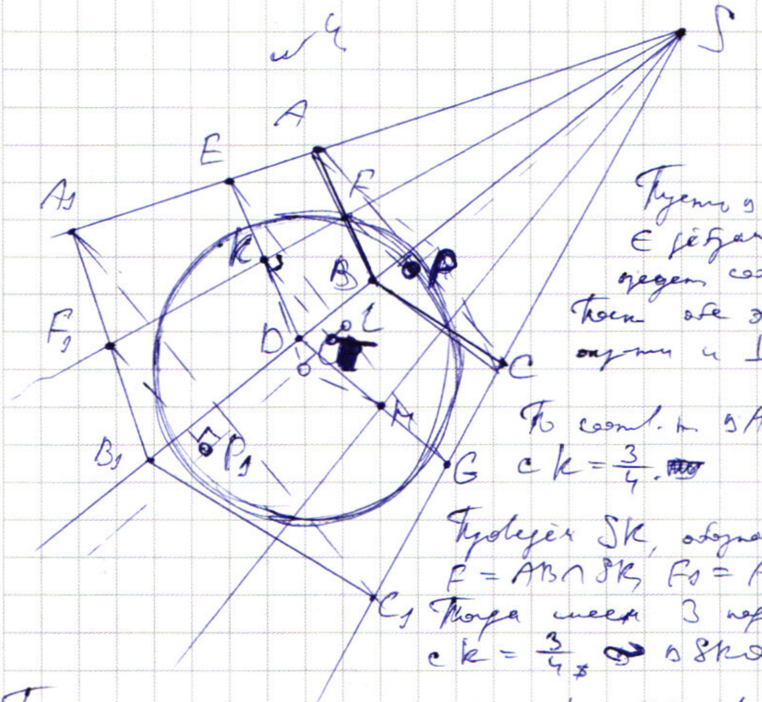


$\cos 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = \pm 1 \neq 0$

$-\sqrt{2}\sin 2x \sin 3x - \sin 2x = 0$

$\sqrt{2}\sin 3x \neq 0$

№4



Если ~~центр~~ сфера вписана в трёхгран. $\angle \Rightarrow$
$\Rightarrow SO$ — ~~центр~~ прямая пересеч. биссекторов двугр. $\angle$ в, сост. трёхгран. $\angle$

Пусть $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ ($A, A_1, B, B_1, C, C_1 \in$ $\in$ рёбрам трёхгран. $\angle$) — треугольники, кот. предст. собой сеч. $\angle(S)$ укз. в усл. плоскостями.
Тогда обе эти плоск-ти кас. сферы и $\perp SO \Rightarrow$ 1. Они $\parallel$
2. Они пас. SO в т. её пересеч. со сферой

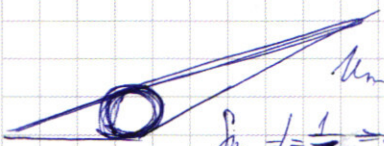
(по усл. и ~~...~~ $\triangle OKS = \triangle OLS = \triangle OMS$

(т. P и P_1 д/соотв. плоскостей)

По соотв. т. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ с $k = \frac{3}{4}$.

Проведём SK, обозначим за $F = AB \cap SK$, $F_1 = A_1B_1 \cap SK$, соединим P и F и P_1 и F_1.
Тогда имеем 3 пары ~~...~~ по остр. $\angle$ $\perp$-ка: $SPF \sim SP_1F_1$ с $k = \frac{3}{4}$, $\triangle SKO$.

Пусть радиус сферы $= r$, $SP = h$, ~~...~~ Тогда $\frac{h}{h+2r} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4h = 3h + 6r$
$\Rightarrow h = 6r \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{OK}{OS} = \arcsin \frac{r}{r+h} = \arcsin \frac{r}{7r} = \arcsin \frac{1}{7}$



Итак, $PF =$

$\sin \angle = \frac{1}{7} \Rightarrow \cos \angle = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \Rightarrow$ ~~...~~ $SF = \frac{7SP}{4\sqrt{3}} = \frac{7h}{4\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}h}{12}$

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x$ ~~$\sqrt{2}\cos$~~ $= 2\cos 5x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 5x =$
$= 2\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = 2\sqrt{2}\cos 5x \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$
$= 2\cos 5x\left(\cos 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right) = 2\cos 5x \cdot 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) =$
$= 2\sqrt{2}\cos 5x \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ ~~$= \cos(5x + 2x + \frac{\pi}{4})$~~

$2\sqrt{2}\cos 5x\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos 4x = \sqrt{2}\left(2\cos 5x \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x\right)$

$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$
$2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} \overset{3}{64} \\ \times\ 9 \\ \hline 576 \end{array}$$

Тогда по подобию $\frac{SK}{SP} = \frac{SO}{SF} \Rightarrow SK = \frac{h(h+r)}{\frac{7h}{4\sqrt{3}}} = \frac{7r \cdot 4\sqrt{3}}{7} = 4\sqrt{3}r$

Пусть $KT \perp SO$ — очевидно, ещё один $\triangle$-к в ряду подобных — $\triangle KTS$.
$\frac{KT}{PF} = \frac{SK}{SF} = \frac{4\sqrt{3}r}{\frac{7h}{4\sqrt{3}}} = \frac{48r}{7 \cdot 6r} = \frac{8}{7}$

$\cos(2x + 3x) = \cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x$

$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \le 93 + 3(3^{27} - 1)x = 93 + 3^{28}x - 3x \end{cases}$ $\quad y \in (3^x + 4 \cdot 3^{28}; 93 - 3x + 3^{28}x]$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

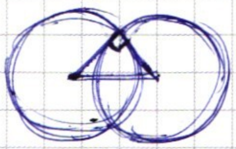
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

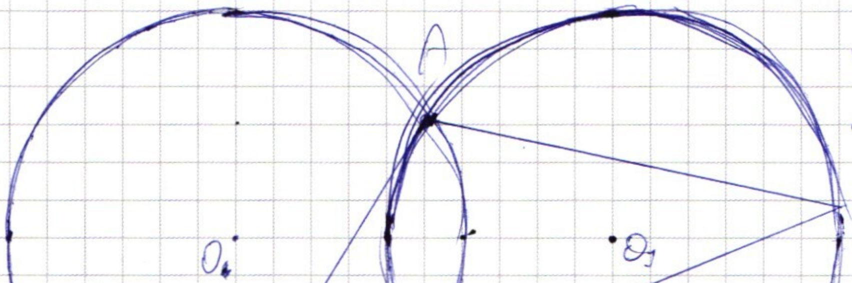
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6.



$289 \times 2 = 578$



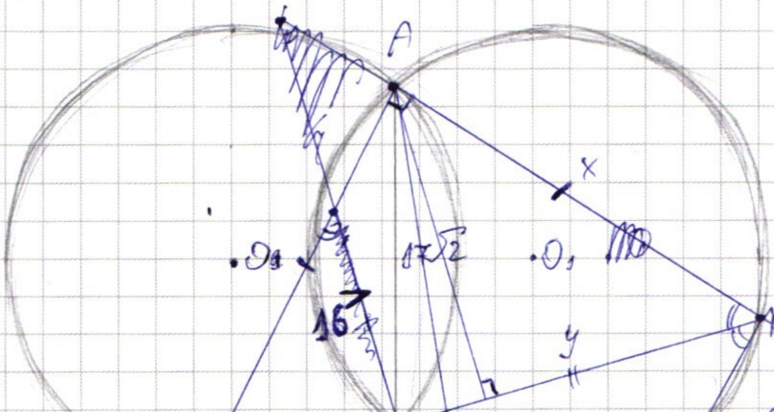
~~Проверим AB~~

Т.к. окружн. им. рав. радиус => => дуги $\cup AB$ у них равны => => $\angle ACB = \angle ADB$ как впис., опир. на рав. дуги рав. окружн. => $AC = AD$, ~~...~~ $\triangle CAD$ равнобедр. и прямоуг. => $\angle ACB = \angle ADB = 45°$.

По усл. $BD = BF \Rightarrow \angle BDF = \angle BFD = 45° \Rightarrow AD \perp AC$ и $DF \Rightarrow AC \parallel DF \perp AD$.

Замети

34 $23 \times 8 = 184$



$y = \sqrt{34 \cdot 34 - 16 \cdot 16} = 2\sqrt{289 - 64} = 2\sqrt{225} = 30$

$184 + 240 + 105 = 529$

$x > \log_3 \frac{3^{28} - 3}{\ln 3}$, т.е. $x \geq 27$ => тогда сущ. решение при $x \leq 27$.

$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 93 - 3x + 3^{28}x$ $3^{x-1} + (x - 3^{27}x$

~~$3^{x-28} + 4 = \frac{31}{3^{27}} - \frac{x}{3^{28}} + x$~~

$f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{28} \Rightarrow f'(x) = \ln 3 \cdot 3^x$

$g(x) = 93 - 3x + 3^{28}x \Rightarrow g'(x) = 3^{28} - 3 =$

$3^x \cdot \ln 3 > 3^{28} - 3$

$3^x > \frac{3^{28} - 3}{\ln 3}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

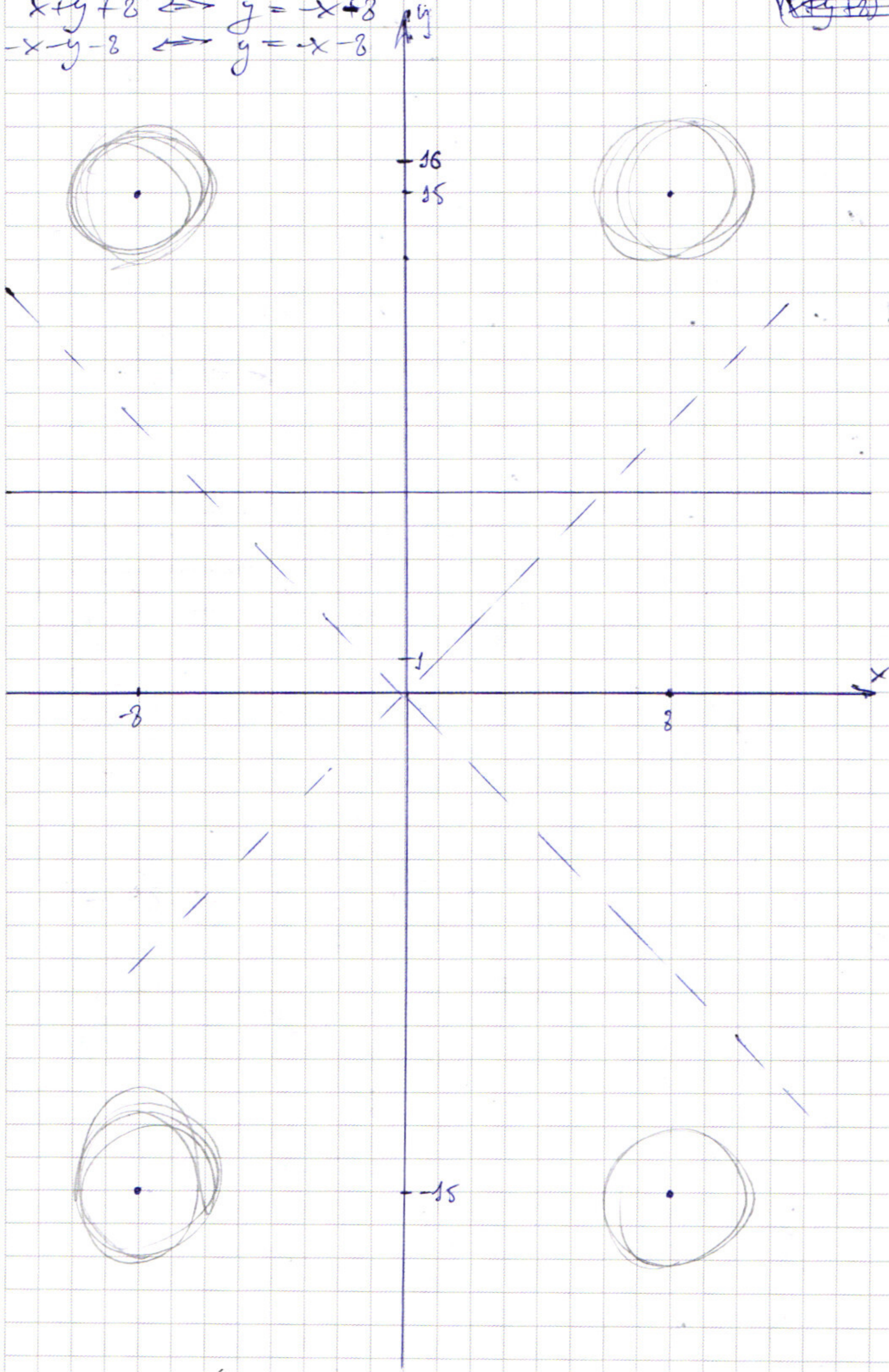
№5.

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$ — 4 окружн. с центрами $(\pm 8; \pm 15)$ и радиусом $\sqrt{a}$.

~~$(x+y+8)^2 + (x-y+8)^2 = 256$~~

$x+y+8 \Rightarrow y = -x+8$

$-x-y-8 \Rightarrow y = -x-8$



$|x+y| + |x-y|$