

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в папку
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{1}{2} \cdot 23\sqrt{2} \cdot 34 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot 23}{34} = 23^2 = 529$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 460 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{15}{17} + \frac{8}{17} \right) \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot 23}{34}$$

$$16 + 30 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$34^2 - 16^2$$

$$(34 + 16)(34 - 16)$$

$$50 - 18$$

$$5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$5 \cdot 2 \cdot 3$$

$$90$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$AC =$$

$$\sin \alpha = \frac{30}{34}, \cos \alpha = \frac{16}{34}$$

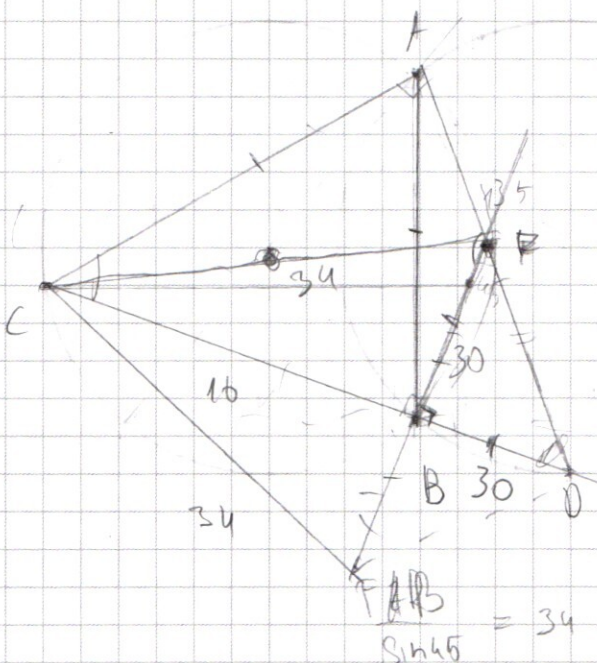
$$17\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 34 \quad \frac{15}{17} \cdot \frac{8}{17}$$

$$16 + 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{46\sqrt{2}}{2} = 23\sqrt{2}$$

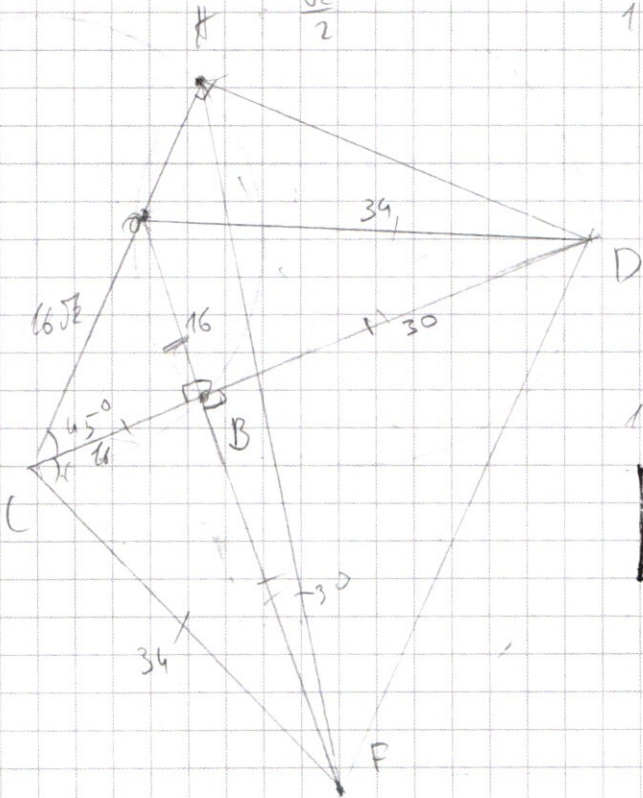
$$\sin \alpha = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$16 \cdot 30 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10$$



$$\frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 34$$



$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad 31$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} \leq 93 + 3^{28}x - 3x$$

$$3^{28}x - 3x - 3^x \geq 93 - 13$$

$$3^{28}x - x - 3^{x-1} \geq 21$$

$$3^{28}x - 3^{x-1}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} > 93 + 3^{28}x - 3x$$

$$3^{28}(4-x) > 93 - 3x - 3^x$$

$$3^{28}(4-x) > 21 - x - 3^{x-1}$$

$$2x + 16 = 16 \quad x = 0$$

$$(x+y+8) + (x-y+8)$$

$$x+y > 8$$

$$x-8 > y$$

$$8-x$$

$$-x+y+8 = -x+y+8$$

$$-2x-16 = 16$$

$$x = -16$$

$$x+y > 8 \quad x-8 > -y$$

$$y > 8-x$$

$$x+y > 8$$

$$x-8 > y$$

$$15-8 \quad a > 49$$

$$+ \sqrt{7}$$

$$\sqrt{a}$$

$$x \neq y \quad 2x+16$$

$$x-8 \quad y-15$$

$$-8$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

И когда окружность 142 проходила через точки O и 16 ,
радиусе $-\sqrt{15^2+8^2}$ $a = 15^2+8^2=289$
Ответ: $49, 289$

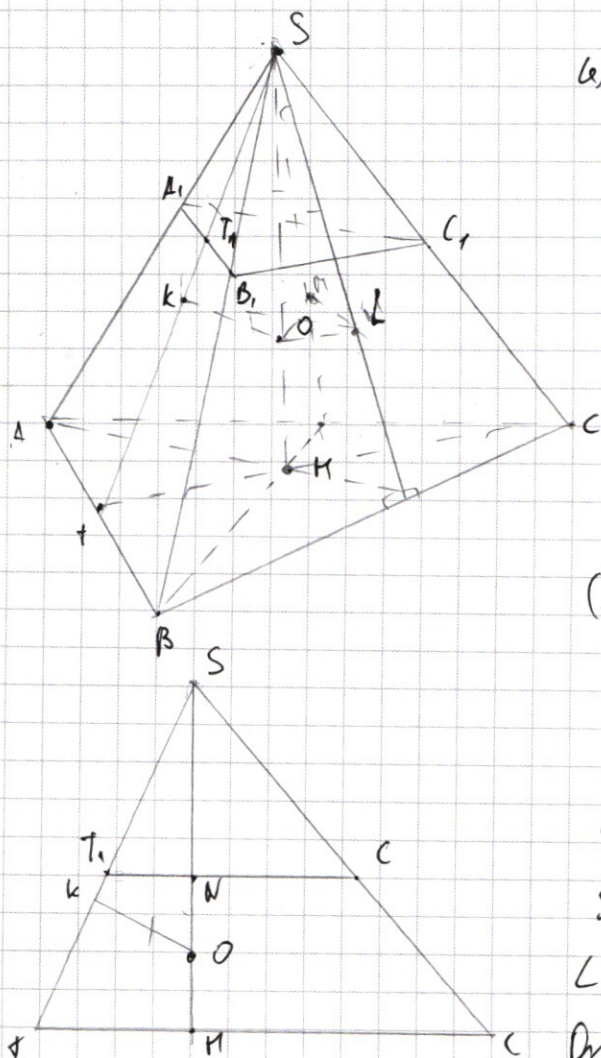
$$\cos 7x + \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos(7x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos(3x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos(7x + \frac{\pi}{4}) + \cos(3x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \cos \frac{\pi}{4} - \sin 7x \sin \frac{\pi}{4} + \cos 3x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 3x \sin \frac{\pi}{4} + \cos 4x = 0$$

N4



а) Большая плоскость сечет
угол плоскостью (A, B, C) ,

меньшая (A_1, B_1, C_1)

SH - высота, $OG \perp SH$

$A_1, B_1 \cap SK = T_1$

$AB \cap SK = T$

$(SKO) = (STC)$ т.к. SK - проекция SO,

$(ST) = (SK), (SO) = (ON)$

$SH \perp T_1, C_1 = N$

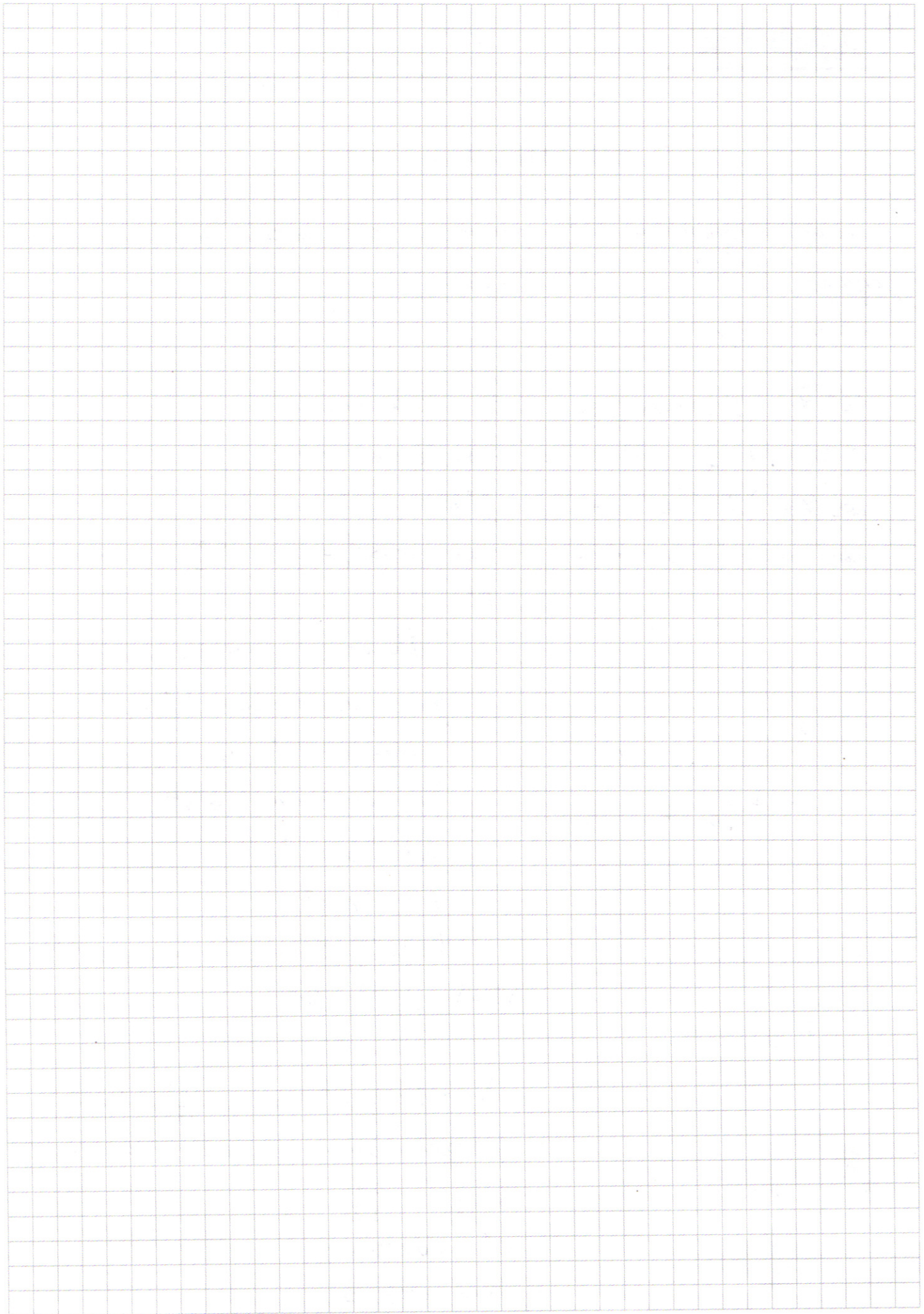
$SN = 3a, SH = 4a$ т.к. $\frac{CT_1}{CT} = \frac{3}{4} = \sqrt{\frac{9}{16}}$

из подобия ΔK по условию $\Rightarrow OK = ON = OH = \frac{a}{2}$

$$\sin \angle KSO = \frac{0.5a}{3.5a} = \frac{1}{7}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$$

Ответ: $\arcsin \frac{1}{7}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

Следовательно, восьмизначное число, состоящее в задании может состоять из двух наборов цифр:

1) 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7

2) 1, 1, 3, 7, 7, 7, 7, 9

Вариантов чисел

$$\frac{8!}{3! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5$$

Вариантов чисел:

$$\frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$$

$$\text{Итого: } 8 \cdot 7 \cdot 5 + 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 1120 \text{ чисел}$$

Ответ: 1120 чисел

N 6

Окружности ω_1 и ω_2
равны по условию,

$\angle ACB$ и $\angle ADB$ опираются
на одну дугу в равных

окружностях - $\angle ACB = \angle ADB$

$$\angle ACB + \angle ADB + \angle CAP = 180^\circ$$

$$2\alpha + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\text{По т. синусов } \frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$\frac{2AB}{\sqrt{2}} = 34 \quad AB = 17\sqrt{2}$$

$(BF) \cap AC = F'$ Рассмотрим $\triangle F'BD$

$$\angle F'AD = \angle F'BD = 90^\circ \Rightarrow F' \in \omega_2, F'D - \text{диаметр}$$

т.к. $F'ADB$ - вписанный $\angle$ и $\angle$ центральный, $ABD \in \omega_2 \Rightarrow F'D = 34$

$$\angle P'CB = 45^\circ, \angle P'BC = 90^\circ \Rightarrow F'B = BC$$

$$PB = BD \text{ по условию.}$$

$$\triangle CPB = \triangle DP'B \text{ по двум сторонам и углу} \Rightarrow CP = DP' = 34$$

$$\delta) \sin \angle PCB = \frac{BP}{34}$$

$$BP = \sqrt{CP^2 - CB^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$$

$$\sin \angle PCB = \frac{15}{17}$$

$$\cos \angle PCB = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$$

$$\angle DCA = 45^\circ$$

$$\angle PCA = \angle PCB + \angle DCA$$

$$\sin(\angle PCA) = \sin(\angle PCB + \angle DCA) = \sin 45^\circ \cdot \frac{8}{17} + \cos 45^\circ \cdot \frac{15}{17} = \frac{23\sqrt{2}}{34}$$

$$AC = \frac{DC \sin 45^\circ}{\sin \angle PCA} = 23\sqrt{2}$$

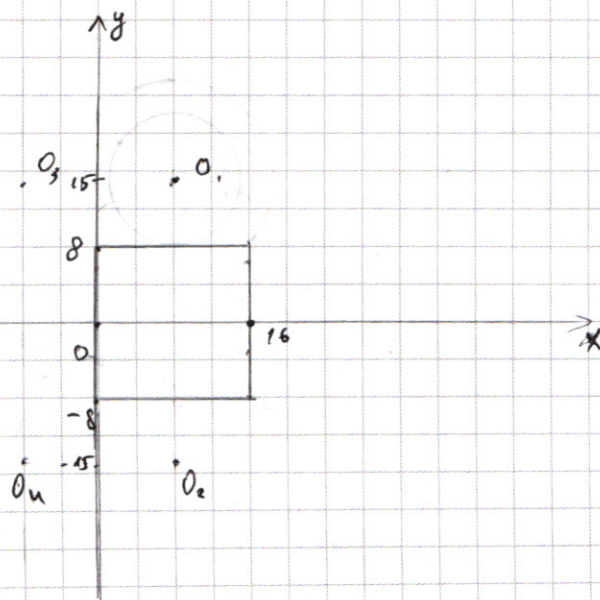
$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AC \cdot \sin \angle ACF = 549$$

Ответ: 549

№ 5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x-8| + (|y|-15)) = a \end{cases}$$

Эта система представляет собой на графике квадрат с вершинами в точках $(0,8); (0,-8); (16,8); (16,-8)$



И четыре окружности (или дуги) с центрами в точках $(\pm 8; \pm 15)$ и

радиусом 8, лежащих касаясь в четверти II, IV, третьей и первой.

Два симметричных решения при касании окружностей касаются - тогда их радиус равен $15-8=7$, $a=49$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 648243 \\ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4 \\ 3 \\ 18 \\ 24 \end{array}$$

$$y - 3x + 4 \cdot 3^{28} > 0$$

$$\begin{array}{r} 21609 \\ 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7203 \\ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \\ 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 876 \\ 3 \end{array}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

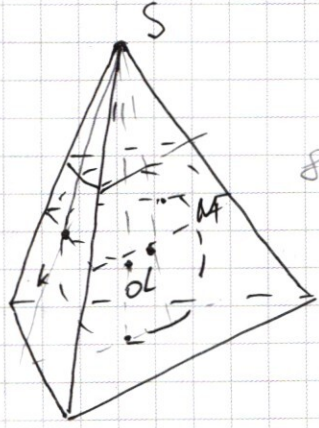


$$\cos x + \cos y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

$$56 + 5 = 61$$

$$28 + 15 + 2$$

$$61 + 45 = 106 - \text{нравится}$$



$$8 \cdot 7 \cdot 5 + 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$$

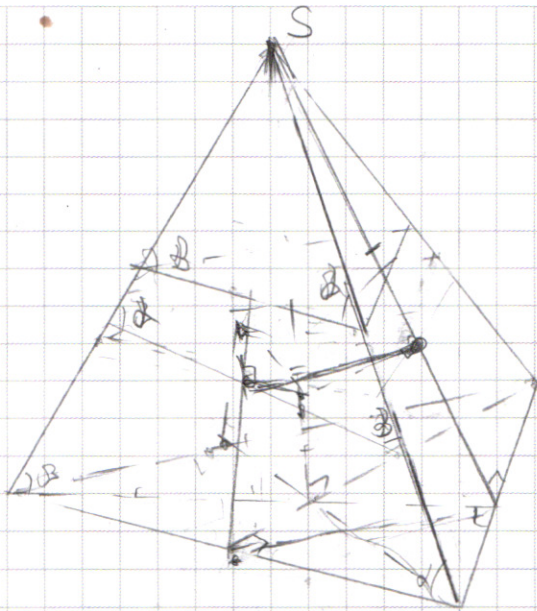
$$8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ 200 \\ 1120 \end{array}$$

$$\frac{8!}{3!4!} + \frac{8!}{4!2!}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$33 + x(3^{28} - 1) \cdot 3$$



$$y^2 + 2xy$$

$$\sqrt{9a^2 - 6} = 4\sqrt{3}6$$

$$2l = 6$$

$$\frac{0}{3.5}$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{4\sqrt{3} \cdot 8}{4\sqrt{3} \cdot 8} = \frac{8}{8}$$

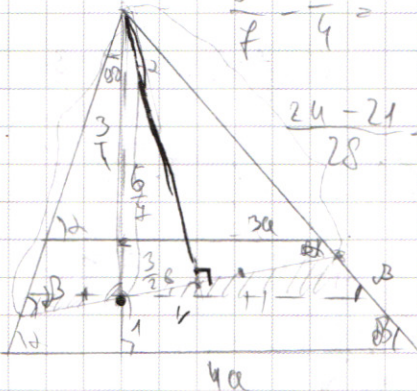
$$\sin \alpha = \frac{0.5}{3.5} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{48}{48}$$

$$1 - \frac{1}{48} = \frac{47}{48} \cdot 16.3$$

$$48 \cdot 16.3 = 782.4$$

$$\frac{16}{32} \cdot 16.3 = \frac{16 \cdot 16.3}{32}$$



$$\frac{6}{7} - \frac{3}{4} =$$

$$y^2 + 4xy + 4$$

$$y^2 + 2xy + x^2 - 4x^2 - 12x + 4y$$

$$\frac{24 - 21}{28} = \frac{3(x+y)^2 - 4(x+y) + 4y - 8x}{28}$$

$$a \sin \alpha$$

$$\frac{6}{7} \cdot 10$$

$$y^2 + 2xy + x^2 - 4x^2 - 12x + 4y$$

$$(x+y) \approx y^2 + (2x+4)y - 3x^2 + 12x$$

$$y^2 \cdot D = 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 + 36x$$

$$16x^2 + 48x + 16 =$$

$$4x^2 + 13x + 4$$

$$16x^2 - 20x + 16$$

$$4x^2 - 5x + 4$$

$$(4x-5)(x-1)$$

$$2 \log e^x$$

$$e^3 \cdot x^{\log y} \cdot e^x \cdot 1 \cdot \log y - 1 = 0$$

$$e^3 \cdot x^{\log y} + e^x \cdot 1 \cdot \log y - 1 = 0$$

$$\frac{1}{x^{\log y}} = e^3 + e^x \cdot \log y$$

$$e^3 \cdot x^{\log y} + e^x \cdot \log y \cdot x^{\log y} - 1 = 0$$

$$e^3 \cdot x^{\log y}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
 $\cos x + \sin y = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \right)$
 $\sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
 $\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
 $\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
 $\sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$
 $\sqrt{2} \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$
 $\cos 4x \cos \frac{\pi}{4} - \sin 4x \sin \frac{\pi}{4} + \sin 3x \cos \frac{\pi}{4} + \cos 3x \sin \frac{\pi}{4} + \cos 4x = 0$

$3 + 4 + 2\sqrt{3}$
 $2 + \sqrt{3}$
 $2 \cos \frac{x+3}{2} \cos \frac{x-3}{2} = \frac{(2+\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})}{14 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 6}$
 $2 \cos 5x + \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$
 $2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$24^2 + (24^2 - 1)^2$
 $2 \cdot 24^2 = 2 \cdot 24 + 1$
 $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$
 $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$
 $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$
 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\cos 2 + \sin 2 = 1$
 $23^2 + 24^2 = 10^2 + 8^2$
 $u + \sqrt{1-u^2}$
 $\cos 2 + \sin 2 = A(\cos 2)$
 $r = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
 $\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$15^2 + 8^2$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 15 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ + 64 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$$

$$1 + 0 = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} =$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

$$y^2 + 2xy + x^2 - 4x^2 + 4y$$

$$0 - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$(y)$$

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos 2x \cos \frac{\pi}{4} - \sin 2x \sin \frac{\pi}{4} + \cos 3x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 3x \sin \frac{\pi}{4} - \cos 4x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x + \cos 3x - \sin 2x)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$



$$\cos 2x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x + \sin 5x) + \cos 4x = 0$$

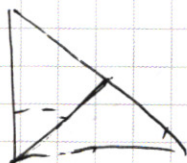
$$2 \cos 2x \sqrt{2} \cos(5x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 2x \cos 5x \cos \frac{\pi}{4} - 2 \cos 2x \sin 5x \sin \frac{\pi}{4} + \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 2x$$

$$\frac{1}{2} \cos 5x = 2 \cos 5x \times 1$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x + \sin 5x) + \sqrt{2} 2 \cos 2x - 1$$



$$\left(-\frac{x}{y}\right) \ln(-y) = \sqrt{2} \ln(1+y)$$

$$(y-x)(y+x) + 2y(x-$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$\frac{1}{2} (y+x) + xy + x^2$$

$$3^{-1} + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3^{28} - 3x$$

$$y^2 + 2xy + x^2 - 4x^2 + 12x + 4y$$

$$+ 4x^2 + 4x + 1 = 8$$