

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

- † 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- † 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- † 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) - \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

разделим на ~~корень~~ $\sqrt{2}$ и соберем функции:

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$$

Соберем сумму косинусов:

$$2 \cos\left(\frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Разложим синус по формуле двойного угла

$$2 \cos\left(\frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

или

$$\cos\left(\frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = \sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) - \sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{11x}{2}\right) - \sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{11x}{2} - \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{11x}{2} + \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{3\pi - 14x}{4}\right) = 0 \text{ или } \cos\left(\frac{\pi - 8x}{4}\right) = 0$$

$$\frac{3\pi - 14x}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi - 8x}{4} = \pi k \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{28} - \frac{2\pi k}{7} \quad k \in \mathbb{Z}$$

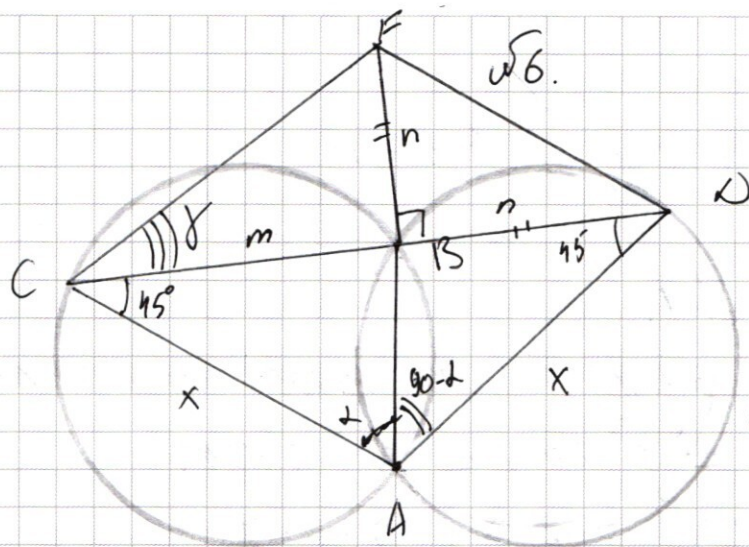
$$x_3 = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi k}{2} \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Одним: } x_1 = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{28} - \frac{2\pi n}{7} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi m}{2} \quad m \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\angle ACD = \angle ADC$
т.к. эти вписанные
углы опираются на одну
дугу в окружности —
дугу радиуса.

$\Rightarrow AC = AD = x$

а) Пот. сисуров.

$$\frac{m}{\sin \alpha} = 2 \text{ l} \quad \frac{n}{\sin(\alpha - \beta)} = 2 \text{ l}$$

$$\sin d = \frac{m}{2R} \lambda \quad \cos d = \frac{n}{2R} \lambda$$

$$\sin^2 \angle + \cos^2 \angle = 1$$

$$1 = \frac{m^2}{4R^2} + \frac{n^2}{4R^2} \quad m^2 + n^2 = 4R^2$$

$$\Delta \text{CFB-треугольный} \Rightarrow CF = \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{412^2} = 2R = 34$$

8) $m = 16$ $\frac{m}{\sin 2} = 212$ $\sin 2 = \frac{m}{212} = \frac{16}{212} = \frac{8}{106}$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{15}{17}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{15}{17}$$

$$\begin{aligned} L &= \arcsin \frac{8}{17} \\ \angle CBA &= 180 - 45 - \arcsin \frac{8}{17} = \\ &= 135 - \arcsin \frac{8}{17} \end{aligned}$$

$$\frac{x}{\sin(135 - \arcsin \frac{8}{17})} = 212$$

$$X = 2R \left(\sin 135^\circ \cdot \cos \arccos \frac{8}{17} - \frac{8}{17} \cdot \cos 135^\circ \right) =$$

$$= 34 \left(\frac{1 \cdot 15}{\sqrt{2} \cdot 17} + \frac{8 \cdot 1}{17 \cdot \sqrt{2}} \right) = \frac{34 \cdot 23}{17 \sqrt{2}} = \frac{46 \sqrt{2}}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = 23 \sqrt{2}$$

by ΔCFB ~~$\sin \delta = \frac{m}{CF}$~~ $\cos \delta = \frac{m}{CF} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$ $\delta = \arccos \frac{8}{17} = \arcsin \frac{15}{17}$

$$S_{\Delta CFA} = \frac{1}{2} \sin(45^\circ) \cdot CF \cdot CA = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 23\sqrt{2} \left(\sin 45^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 45^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ = 17 \cdot 23 (\sin 45^\circ + \cos 45^\circ) = 17 \cdot 23 \left(\frac{15}{17} + \frac{8}{17} \right) = 23 \cdot 23 = \\ = 23^2 = 529$$

Ответ: а) $CF = 34$

б) $S_{\Delta CFA} = 529$.

к1.

Разложим число 64827 на простые множители.

$$64827 = 9 \cdot 7203 = 3^3 \cdot 2401 = 3^3 \cdot 7 \cdot 343 = \\ = 3^3 \cdot 7^2 \cdot 49 = 3^3 \cdot 7^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

Восьмизначное число состоит из 8-ми цифр.

Есть два случая: 1) состоит из (3, 3, 3, 7, 7, 7, 7, 1)
2) состоит из (9, 3, 7, 7, 7, 7, 1, 1)

1) Надо найти количество способов расставить эти цифры на 8 позиций

~~Вариант~~ C_7^3 - количество способов расставить тройки и семерки на 7 мест. В каждом случае мы можем расставить единицу восьмью способами.
 $\Rightarrow 8 \cdot C_7^3 = \frac{8 \cdot 7!}{3! \cdot (7-3)!} = 8 \cdot 35 = 280$

2) C_6^2 - число способов расставить единицы и семерки на 6 позиций

~~Вариант~~ В каждом случае мы можем вставить единицу семеркой семью способами $\Rightarrow 7 \cdot C_6^2$
В каждом случае мы можем восьмью способами вставить девятку $\Rightarrow$

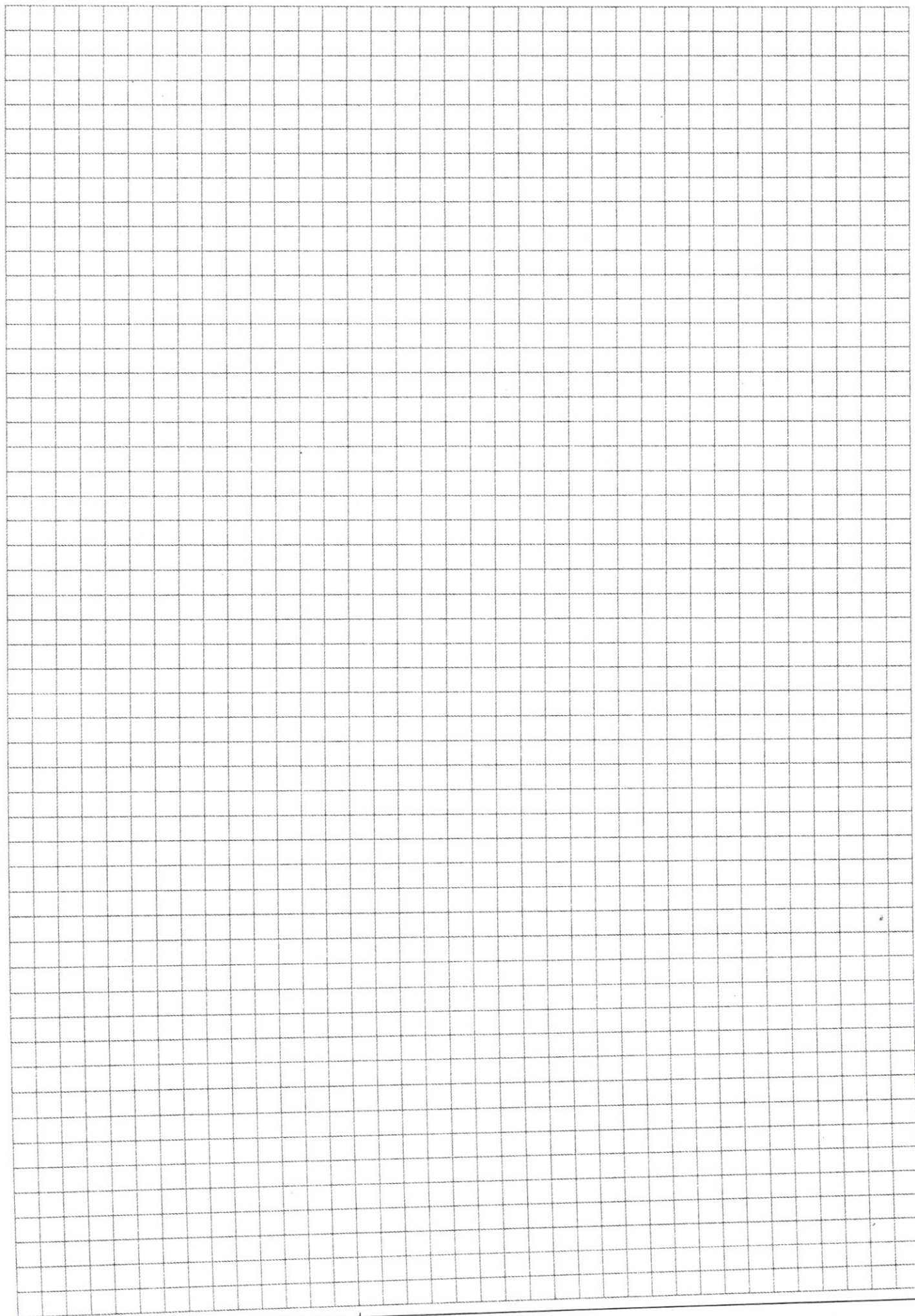
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow 8 \cdot 7 \cdot C_6^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2! \cdot 4!} = 15 \cdot 8 \cdot 7 = 120 \cdot 7 = 840$$

Итого надо сложить первой и второй
случай

$$8 \cdot C_7^3 + 8 \cdot 7 \cdot C_6^2 = 8(C_7^3 + 7C_6^2) =$$
$$= 840 + 280 = 1120 \text{ способов}$$

Ответ: $8(C_7^3 + 7C_6^2) = 1120$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

D=

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

~~cos~~

$$\alpha + \beta = x \quad \alpha = x + y$$

$$\alpha - \beta = y$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{2} - \frac{11x - \frac{\pi}{11}}{2}\right) - \sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{11}}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{11x}{2}\right) - \sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{11}}{2}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2} - 11x - 3x + \frac{\pi}{11}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2} - 11x + 3x - \frac{\pi}{11}}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\frac{3}{2}\pi - 14x}{11}\right) = 0 \quad \vee \quad \cos\left(\frac{\pi - 8x}{11}\right) = 0$$

$$\frac{\frac{3}{2}\pi - 14x}{11} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3}{2}\pi - 14x = 2\pi + 4\pi k$$

$$-14x = \frac{\pi}{2} + 4\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{28} - \frac{2\pi k}{7} \quad n \in \mathbb{Z}$$

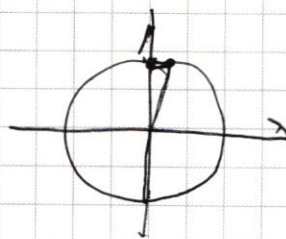
$$\frac{\pi - 8x}{11} = \pi k$$

$$-8x = 4\pi k - \pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$8x = \pi - 4\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi k}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$14 \cdot 2 = 28$$



$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2) \\ y^7 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$x^y = a^b$$

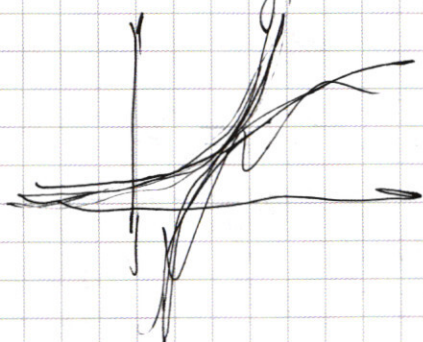
$$(-x^7)^{\ln(-y)} \cdot y^{-\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2)$$

$$-y^{\ln(x^7)} \cdot (-y)^{-\ln y} = x^2 \ln(xy^2) \cdot x^{\ln(xy^2)}$$

$$-y^{\ln(x^7)} - \ln y =$$

$$-y^{\ln(-\frac{x^7}{y})} = (xy^2)^{\ln x^2}$$

$$x^{2 \ln x} \cdot x^{\ln y} = x^{2 \ln x} \cdot y^{\ln x}$$



$$y < 0$$

$$\ln(-y)$$

$$x \neq 0$$

$$\ln(-y) = 2 \ln(xy^2)^2$$

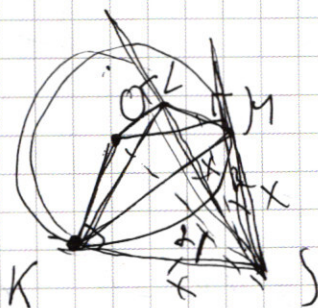
$$\ln$$

$$KL = 2x \sin \alpha \quad ML = 2x \sin \beta$$

$$y > 3^{20} + a \cdot 3^{20} \sin \gamma$$

$$y \leq 93 + (3^{20} - 3)x$$

$$y \leq 93 + x \cdot 3^{20} - 3x$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 = m^2 + AB^2 - 2AB \cdot m \cos \beta$$

$$x^2 = m^2 + AB^2 + 2AB \cdot n \cos \beta$$

$$0 = (m^2 - n^2) - 2AB \cos \beta (m + n)$$

$$m - n = 2AB \cos \beta$$

$$n^2 = AB^2 + x^2 - 2 \times AB \cdot \cos(\varphi - \alpha)$$

$$m^2 = x^2 + AB^2 - 2 \times AB \cdot \cos \alpha$$

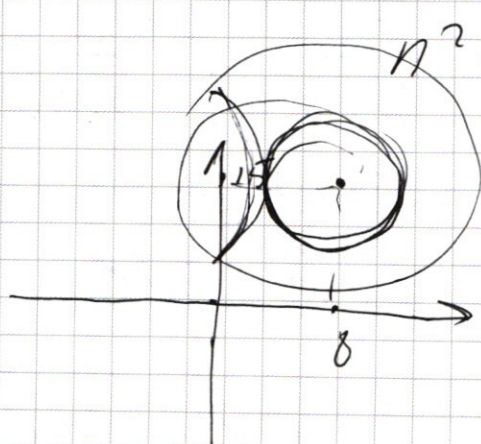
$$(n - m)(n + m) = -2 \times AB (\cos \alpha - \cos \varphi)$$

$$2 \times AB \cos \varphi = AB^2 + x^2 - n^2$$

$$2 \times AB \cos \alpha = AB^2 + x^2 - m^2$$

$$4x^2 AB^2 = (AB^2 + x^2 - n^2)^2 + (AB^2 + x^2 - m^2)^2$$

$$CF = \sqrt{m^2 + n^2} = 2R = 34.2x$$



$$n^2 + m^2 = 4R^2$$

$$|x + y + 8| = 16$$

$$x + y = 0$$

$$x - y = 6$$

$$|a + 0| = |6 + 0|$$

$$64827 =$$

$$= 9 \cdot 7203 = 3^3 \cdot 2401 =$$

$$\begin{array}{r} \overline{2401} \mid 7 \\ -21 \\ \hline 301 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{301} \mid 7 \\ -28 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{2401} \mid 7 \\ -21 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 21 \\ -21 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{64827} \mid 9 \\ -63 \\ \hline 18 \\ -18 \\ \hline 027 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{7203} \mid 3 \\ -6 \\ \hline 12 \\ -12 \\ \hline 003 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2401} &\approx \sqrt{2400} \approx \\ &\approx 10 \sqrt{24} \approx \\ &\approx 10 \cdot 2 \sqrt{6} \approx \\ &20\sqrt{6} \approx \end{aligned}$$

$$20.2 \leq 20\sqrt{6} \leq 20.3$$

$$\begin{array}{r} \times 35 \\ 8 \\ \hline 280 \end{array}$$

$$\textcircled{=} 3^3 \cdot 7 \cdot 343 =$$

$$= 3^3 \cdot 7^2 \cdot 49 =$$

$$= 3^3 \cdot 7^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} \overline{343} \mid 7 \\ -28 \\ \hline 63 \\ -63 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\underline{3} \quad \underline{3} \quad \underline{3} \quad \underline{7} \quad \underline{7} \quad \underline{7} \quad \underline{7} \quad \underline{1}$$

~~3333~~

на 7 мест

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} =$$

$$19377771 \quad \frac{7!}{4!3!}$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

$$\text{Потому } 35 \cdot 8 = 280$$

$$C_7^2 \cdot C_6^1 \cdot C_5^1$$

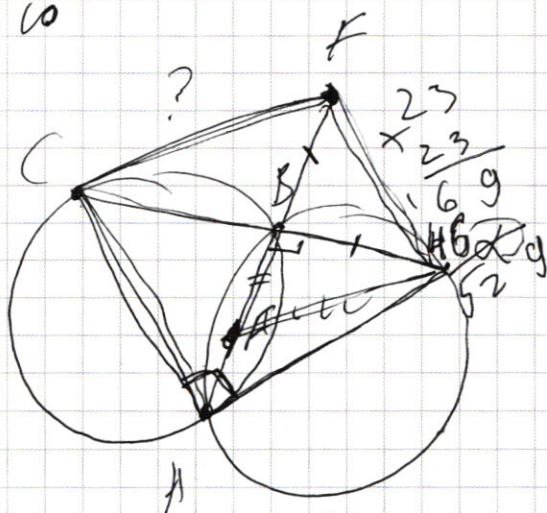
$$\begin{array}{r} \times 15 \\ 8 \\ \hline 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 120 \\ 7 \\ \hline 840 \end{array}$$

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 4}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 15$$

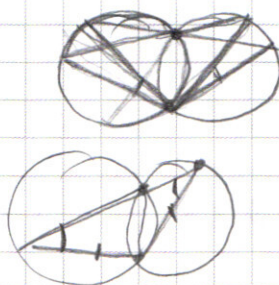
$$C_6^4 = \frac{6!}{4!2!}$$

10

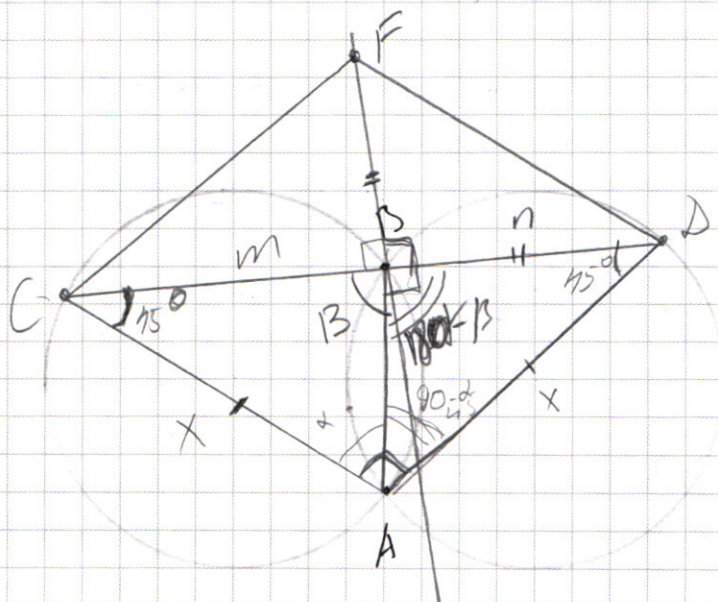


$$CF = ?$$

$$12 = 17$$



$$\begin{array}{r} 284 \\ - 64 \\ \hline 220 \\ \times 17 \\ \hline 3740 \\ \times 11 \\ \hline 41140 \\ \hline 2809 \end{array}$$



$$\frac{AB}{\sin 45} = 2R$$

$$AB = 2R \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1 ~~100~~

$$2x^2 = (m+n) \quad \frac{AB}{\sin 45} = 2R$$

$$2R = \frac{x}{\sin(180^\circ - \beta)}$$

$$\sin \beta = \frac{x}{2R}$$

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{x}{2R}$$

$$= \frac{34}{\sqrt{2}}$$



$$\beta = 90^\circ$$

$$\sin \beta = \frac{x}{2R} = \frac{17\sqrt{2}}{217} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \beta = 45^\circ$$

$$\frac{x^2}{4R^2} + \frac{x^2}{4R^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{2R^2} = 1$$

$$x^2 = 2R^2$$

$$x = R\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$$

$$x = 2R \sin \beta = 34 \sin \beta$$

$$\frac{\sin m}{\sin d} = 2R$$

$$\frac{m}{\cos 2} = 2R$$

$$\cos 2 = \frac{r}{2R}$$

$$\sin d = \frac{m}{2R}$$

$$1 = \frac{m^2 + r^2}{4R^2}$$

$$m^2 + r^2 = 4R^2$$



$$17 \cdot 2 = 34$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) + \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{7x + \frac{\pi}{4} - 3x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cdot \cos \frac{10x}{2} + \cos 4x = 0$$

$$\sin 2 - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos 5x + \cos 4x = 0$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0$$

$$2 \cos \left(\frac{10x + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{4x}{2} \right) = 0$$

$$2 \cos \left(\frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$2 \cos \left(\frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \right)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\cos \left(\frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = \sin \left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \right)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad - \frac{1}{\sqrt{2}}$$