

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 2x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1$$

$$\sqrt{2} \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos(3x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2} \cos(5x - \frac{\pi}{4}) \cos 2x +$$

$$\sqrt{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} 2 \sin(2x - \frac{\pi}{4}) \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$(\sin(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos(2x - \frac{\pi}{4})) \cos 5x = 0$$

$$\cos 2x \cos 5x = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi h}{2}, \\ x = \frac{\pi h}{5}, \end{cases} \quad h \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi h}{10}, \quad h \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{3}$$

$$y' + 2xy - 3x^2 + 72x + 99 = 0$$

$$x > 0$$

$$y < 0$$

$$V = \frac{-34 \pm \sqrt{34^2 + 44^2}}{2}$$

$$u = \frac{-3 \pm \sqrt{43}}{2}$$

$$-y = x e^{\frac{-3 \pm \sqrt{43}}{2} x} = (x+2) \pm 2|x-1| = (x+2) \pm 2(x-1)$$

$$\begin{cases} 2x = 3x - 1 \\ 2x = -x + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{-1}{1-3} > 0 \\ x = \frac{3}{2+1} > 0 \end{cases}$$

$$y^2 + 2(x+2)y - 3x(x-4) = 0$$

$$y = \frac{-(x+2) \pm \sqrt{x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x}}{2}$$

$$= \frac{-(x+2) \pm \sqrt{4x^2 - 8x + 4}}{2} = \frac{-(x+2) \pm 2}{2} = -\frac{(x+2) \pm 2}{2} = -\frac{(x+2) \pm 2}{2} = -\frac{(x+2) \pm 2}{2}$$

$$e^{\ln x (11x + 2(11-9))}$$

$$11x = 9$$

$$e^{24(11+2v)}$$

$$(11v) = v$$

$$= e^{v(24+11)}$$

$$2u^2 + 4uv = 74v + v^2$$

$$2u^2 - 34v - v^2 = 0$$

$$v^2 + 34v - 2u^2 = 0$$

№5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-8-y| = 16 \\ (x-8)^2 + (y-15)^2 = a \end{cases}$$

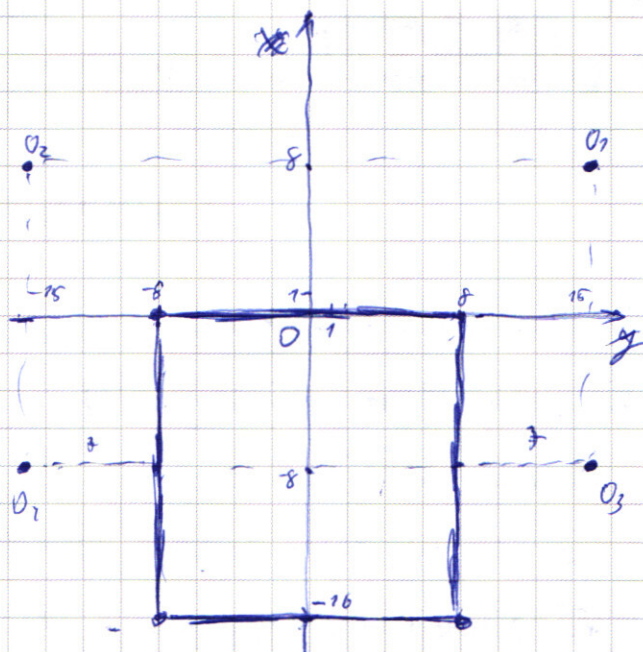
$$\begin{cases} x+8+y \geq 0 \\ x+8-y \geq 0 \\ 2x+16=16 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -8 \leq y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+8+y \geq 0 \\ x+8-y < 0 \\ y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=8 \\ -16 \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+8+y < 0 \\ x+8-y \geq 0 \\ y=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-8 \\ -16 \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+8+y < 0 \\ x+8-y < 0 \\ x=-16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-16 \\ -8 < y \leq 8 \end{cases}$$

$$R^2 = 7^2 + 8^2 = a = 49 + 64 = 113$$



$$x \geq 0, y \geq 0 \\ (x-8)^2 + (y-15)^2 = a = R^2$$

$$x \geq 0, y < 0 \\ (x-8)^2 + (y+15)^2 = R^2$$

$$x < 0, y \geq 0 \\ (x+8)^2 + (y-15)^2 = R^2$$

$$x < 0, y < 0 \\ (x+8)^2 + (y+15)^2 = R^2$$

$$\cos 7x \geq \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x$$

$$\cos 4x + 2 (\cos 7x \cos 3x + \sin 7x \sin 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x + \cos 3x)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 7x - \sin 3x)^2$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos^2 7x + 2 \cos 7x \cos 3x + \cos^2 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 7x + \cos 3x)^2$$

$$(\cos 7x + \cos 3x) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - 1 \right)$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ 64 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ \times 12 \\ \hline 144 \\ + 720 \\ \hline 864 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ 64 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ 27 \\ \hline 7 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{7}$

6	9	8	2	7	5
2	1	6	0	9	3
7	2	0	3	3	
2	9	0	1	2	
3	9	3	7		
4	8	7			
2	7				
1					

$$1 \cdot 3^3 \cdot 7^4$$

~~7-7-7~~

$$C_8^4 \cdot C_4^1 + C_8^4 \cdot C_4^2 + \cancel{C_8^4 \cdot C_4^3}$$

$$= \frac{8!}{4!4!} \left(4 + \frac{4!}{2!2!} \right) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} (4 + 6)$$

$$+ \frac{4 \cdot 3}{2} = 30 (4 + 6) = \boxed{300}$$

$\sqrt{2}$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \cos 5x \sin 2x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cancel{2 \cos 5x (\cos 2x - \sin 2x)}$$

$$2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) = -\sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cancel{\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x}$$

$$\cos 4x = \cos 7x \cos 3x + \sin 7x \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x \cos 3x + 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \sin 3x = 0$$

$$\cancel{\cos 2x \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x \right) + \cos 3x \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x \right) \cdot \frac{2x}{84}}$$

$$\cancel{\cos 4x}$$

$$\sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0$$

$$\begin{aligned} 2 \cos 4x \cos \frac{\pi}{4} &= \cos \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) \\ 2 \cos 2x \sin \frac{\pi}{4} &= \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 529 \end{array}$$

$\sqrt{3}$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{\ln(xy^2)}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(y+x)^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = y^2 + 2(x+2)y - 3x(x-4)$$

$$y = \frac{-(x+2) \pm \sqrt{(x+2)^2 + 12x(x-4)}}{2} = -(x+2) \pm \sqrt{x^2 + 4x + 4 + 12x^2 - 48x}$$

$$= -(x+2) \pm \sqrt{13x^2 - 44x + 4} = -(x+2) \pm 2\sqrt{x-1}$$

$$\cos 3x + \cos 5x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 9x$$

$$2 \cos 5x \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \sin \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} \cos(3x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}$$

$$2 \cos 5x \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos 5x \cos 2x + \sin 5x \sin 2x = 0$$

$$\cos 2 + \cos \beta = 2 \cos \frac{2+\beta}{2} \cos \frac{2-\beta}{2} = 2 \cos 1 \cos \frac{2-\beta}{2}$$

$$\cos \frac{2+\beta}{2} \cos \frac{2-\beta}{2} + \sin \frac{2+\beta}{2} \sin \frac{2-\beta}{2} = \cos \beta$$

$$\cos \frac{2+\beta}{2} \cos \frac{2-\beta}{2} + \sin \frac{2+\beta}{2} \sin \frac{2-\beta}{2} = \cos 2$$

$$\sin \frac{2-\beta}{2} \cos \frac{2+\beta}{2} + \sin \frac{2+\beta}{2} \cos \frac{2-\beta}{2} = \sin 2$$

$$\sin \frac{2-\beta}{2} \cos \frac{2+\beta}{2} + \sin \frac{2+\beta}{2} \cos \frac{2-\beta}{2} = \sin \beta$$

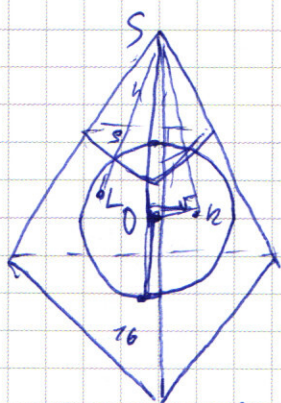
$$\sin 2 - \sin \beta = 2 \sin \frac{2-\beta}{2} \cos \frac{2+\beta}{2}$$

$$\sin 2 + \sin \beta = 2 \sin \frac{2+\beta}{2} \cos \frac{2-\beta}{2}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 9x = 0$$

$$2 \sqrt{2} \cos 5x \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos 9x = 0$$

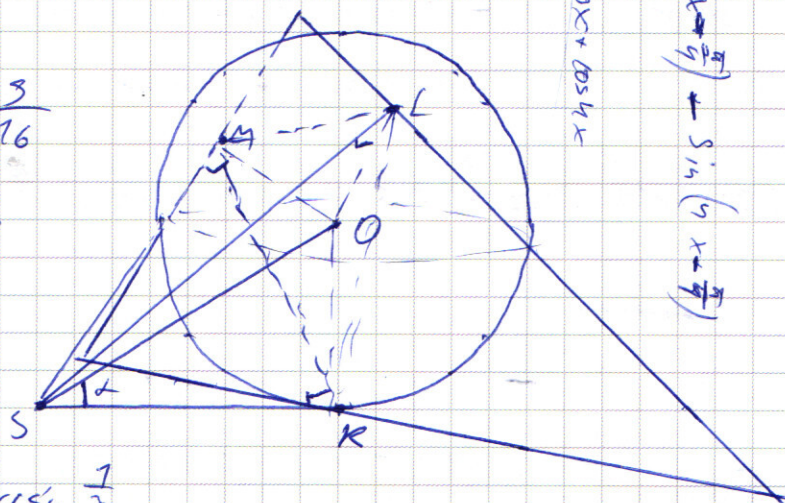
$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cos 4x &= \sqrt{2} \cos(4x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = \\ &= \sqrt{2} (\cos 4x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 4x \sin \frac{\pi}{4}) = \\ &= \cos 4x + \sin 4x \end{aligned}$$

 $\sqrt{3} \sqrt{4}$ 

$$\left(\frac{h}{h+2R}\right)^2 = \frac{3}{16}$$

$$\frac{h}{h+2R} = \frac{3}{4}$$

$$h = 6R$$



$$\sin^2 \alpha = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{3R} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{1}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

6	4	8	2	2	3
2	1	6	0	9	3
7	2	0	3	2	
2	4	0	1	2	
3	4	3	2		
4	9	2			
2	7	2			
1					

$$648272 = 3^3 \cdot 7^4$$

Тогда рассмотрим количество возможных вариантов наборов из 8 цифр.

1) 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7

Вариантов расположить их

$$C_8^1 \cdot C_4^1$$

выберем 1 место для единицы
4 места для семерки

Группы попарно не

оставшиеся места 1 способ

2) 1, 1, 3, 3, 7, 7, 7, 7

Вариантов расположить: $C_8^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1$

Значит получим

$$C_8^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1$$

расположим 2 единицы
2 семерки
группы

каждое место 1 способ

Этот же набор цифр мы, т.к. если мы поставим каждую цифру так во все возможные места.

$$\text{Результат: } C_8^2 \cdot C_4^1 \cdot C_8^1 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 = C_8^2 (C_4^1 + C_4^2 \cdot C_2^1) =$$

$$= \frac{8!}{2!4!} \left(4 + \frac{4!}{2!2!} \cdot 2 \right) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 2} \left(4 + \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 2 \right) =$$

$$= 70 \cdot 16 = 1120$$

Ответ: 1120.

$\sqrt{2}$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos x \pm \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x \pm \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) = \sqrt{2} \cos \left(x \mp \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sqrt{2} \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos x + \cos \beta = 2 \cos \frac{x+\beta}{2} \cos \frac{x-\beta}{2}$$

$$2 \cos 5x \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0 \quad (1)$$

Вернёмся к какому-то упр-ю.

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos x \pm \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos x \pm \cos \frac{\pi}{4} \sin x \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} \pm x \right)$$

$$\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + 7x \right) + \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin x + \sin \beta = 2 \sin \frac{x+\beta}{2} \cos \frac{x-\beta}{2}$$

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) \cos 5x + \cos 4x = 0 \quad (2)$$

из упр-я (1) выведем упр-е (2)

$$\sqrt{2} \cos 5x \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \cos 5x = 0$$

$$\cos 5x \left(\cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \quad (1)$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + yy = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y^2 > 0 \\ xy^2 > 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x > 0$$

$$-y > 0 \Rightarrow y < 0$$

$$(1): y^2 + 2(x+2)y - 3x(x-4) = 0$$

$$\begin{aligned} y &= -(x+2) \pm \sqrt{x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x} = -(x+2) \pm 2\sqrt{x^2 - 2x + 1} \\ &= -(x+2) \pm 2(x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = -3x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$(2): \left(\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$e^{\ln\left(\frac{x^2}{y}\right)\ln(y)} = e^{2\ln x \ln(xy^2)}$$

$$e^{\ln(-y)(2\ln x + \ln(-y))} = e^{2\ln x (\ln x + 2\ln(-y))}$$

$$\ln x = 4$$

$$\ln(-y) = v$$

$$v(7 + v) = 2(4 + 2v)$$

$$7v + v^2 = 8 + 4v$$

$$v^2 - 3v - 8 = 0$$

$$v = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 32}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2} \quad u = \frac{3 \pm 1}{2} = 4$$

$$\ln(-y) = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \ln x$$

$$\begin{cases} -y = x \\ y = -3x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = x \\ 4 - x = x \end{cases}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow y = -2$$

$$x = 2 \Rightarrow y = -2$$

$$y = 4 \cdot \frac{e^{\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}}}{1 + e^{\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}}}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = \frac{4}{1 + e^{\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}}} \\ y = \frac{4}{1 + e^{\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x \\ y = x - 4 \\ y = -x^2 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2n \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(-y) = 2 \ln x \\ \ln(-y) = \ln x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y = x^2 \\ -y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ y = -x \end{cases}$$

$$1) y = -3x = -x^2$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$x \in \emptyset, y \in \emptyset$$

$$2) y = -3x = -x$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$x \in \emptyset, y \in \emptyset$$

$$3) y = x - 4 = -x^2$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} - 4 = \frac{\sqrt{17} - 9}{2} \end{cases}$$

$$4) y = x - 4 = -x$$

$$x = 2, y = -2$$

$$\text{Answer: } (2, -2); \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2}, \frac{\sqrt{17} - 9}{2} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

√7

$$\text{д.н. } (A_1B_1C_1) \cap \text{сф.}(O; R) = M_1$$

$$(ABC) \cap \text{сф.}(O; R) = M$$

$$\begin{aligned} (A_1B_1C_1) \perp SO \\ (ABC) \perp SO \end{aligned} \Rightarrow (A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$$

Получились 2 подобных

треугольн. $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$$

$$S_{\triangle ABC} = 16$$

$$S_{\triangle A_1B_1C_1} = 9$$

$$SM = SM_1 + 2R$$

из подобия получаем

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{SM^2}{SM_1^2} = \frac{16}{9}$$

$$\frac{SM}{SM_1} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{SM_1 + 2R}{SM_1} = \frac{4}{3}$$

$$3SM_1 + 6R = 4SM_1$$

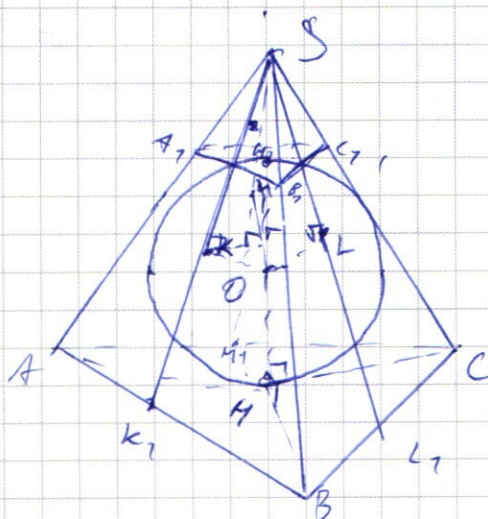
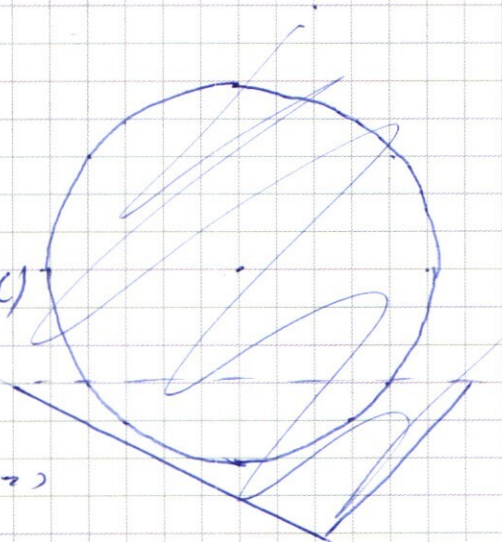
$$SM_1 = 6R$$

$$\triangle SOK: SO = SM_1 + R = 7R$$

$$OK = R$$

$$\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{1}{7}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$$



т.к. сфера вписана

в тетраэдр $SABC \Rightarrow$

O — т. пересечения биссектрис

треугольн. $\Rightarrow O \in (ABC)$

т. M — точка пересечения

бисс-с $\triangle ABC$

Она $KT \perp SO$

$$SK = \frac{OK}{\tan \angle KSO}$$

$$KT = \frac{SK}{\sin \angle KSO} = OK \frac{\cos \angle KSO}{\sin \angle KSO} = R \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\sin \angle KSO = \frac{1}{2}$$

$$\cos \angle KSO = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

В треугольнике KT - радиус
вписанной окружности

$$ST \perp KT$$

$SO \perp (A_2 B_2 C_2) \rightarrow$ линия отрезка SO перпендикулярна плоскости $(A_2 B_2 C_2)$.

$$\frac{S_{A_2 B_2 C_2}}{S_{ABC}} = \left(\frac{ST}{SM} \right)^2$$

$$SM = 8R$$

$$ST = \frac{SK}{\tan \angle KSO}$$

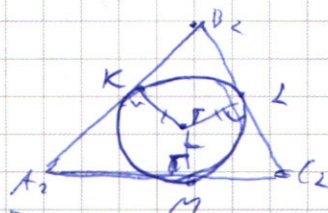
$$= R \frac{4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{4\sqrt{3}}{2} R$$

$$\left(\frac{4\sqrt{3}R}{8R} \right)^2 = \frac{S_{A_2 B_2 C_2}}{16}$$

$$S_{A_2 B_2 C_2} = \frac{9\sqrt{3}}{4} = 1 \frac{1}{4}$$

Ответ: $\arcsin \frac{1}{2}, 1 \frac{1}{4}$

✓



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$(|x+8| + |x-y+8| = 16 \quad (1)$$

$$((x-8)^2 + (y-15)^2 = a \quad (2)$$

$$(1): |x+8+y| + |x+8-y| = 16$$

$$\begin{cases} x+8+y \geq 0 \\ x+8-y \geq 0 \\ x+8+y + x+8-y = 16 \end{cases}$$

$$x+8+y \geq 0$$

$$x+8-y \leq 0$$

$$x+8+y - x-8+y = 16$$

$$x+8+y \leq 0$$

$$x+8-y \geq 0$$

$$-x-8+y + x+8-y = 16$$

$$x+8+y \leq 0$$

$$x+8-y \leq 0$$

$$-x-8-y - x-8+y = 16$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -8 \leq y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 8 \\ -8 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -8 \\ -16 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -16 \\ -8 < y < 8 \end{cases}$$

- квадрат

$$(2): ((x-8)^2 + (y-15)^2 = a$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$y \geq 0$$

$$(x-8)^2 + (y-15)^2 = a$$

$$x \leq 0$$

$$y \geq 0$$

$$(x+8)^2 + (y-15)^2 = a$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

$$y \leq 0$$

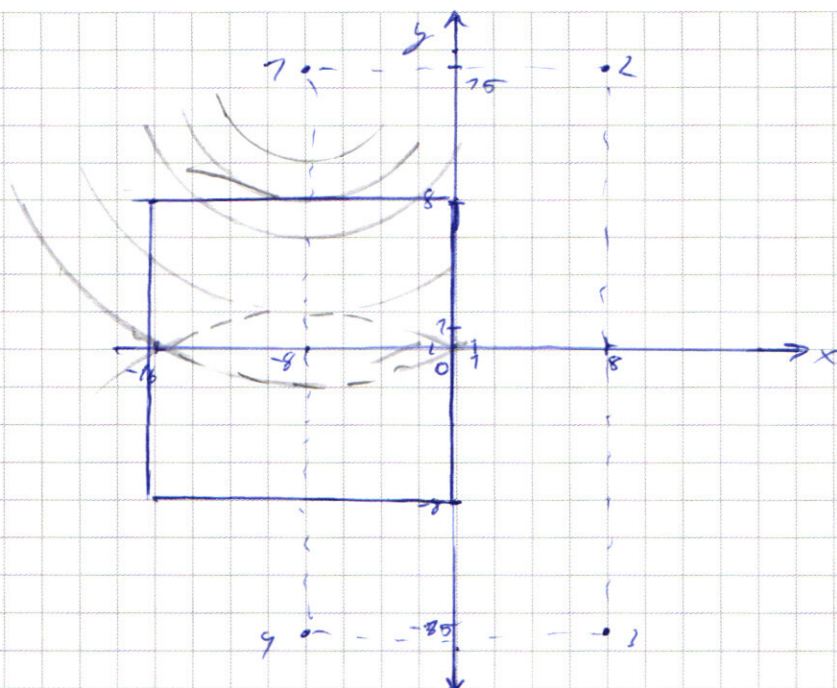
$$(x-8)^2 + (y+15)^2 = a$$

$$x \leq 0$$

$$y \leq 0$$

$$(x+8)^2 + (y+15)^2 = a$$

- часть окружности
в 4 четвертях,
каждая из которых
образует свой
затвердевший.



- 1) Если окруж-ти касаются квадрата, то 2 и 3 не достигаются
2 решения этот случай нас устраивает.
- 2) Если 1 и 4 не достигаются, то и 2 и 3 не достигаются
0 решений не устраивает
- 3) 1 и 4 пересекают фигуру в 4 разных точках
4 решения - не устраивает
- 4) 1 и 4 пересекают в 2 точках (0;0) и (-16;0); в каждом
лучше окруж-ти 2 и 3 пересекут квадрат только в т. (0;0)
(т.к. 1 и 4 симметричны относительно ОО, Оу и Ох) $\Rightarrow$ 2 решения
лучше нас устраивает.
- 5) Если окруж. 1 и 4 такие большие, что квадрат лежит
в них, то 2 и 3 выйдут за границы своих центров
и обрежутся, не пересекая квадрат.
в см. 1. $a = R^2 = (15-8)^2 = 49$.
в см 2. $a = R^2 = 15^2 + 8^2 = 289$.

Ответ. 49; 289

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6.

$$a) \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = 45^\circ$$

$$\frac{1}{2} \angle AOB = \angle ADB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle ADB = \triangle ADC$$

$$\angle A = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$$

$$AC = AD$$

$$\frac{1}{2} \angle AOB = 45^\circ \Rightarrow \angle AOB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AOB = 90^\circ \Rightarrow \triangle AOB - \text{прямоугольный}$$

по т. Пифагора

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 7\sqrt{2}$$

$$AD = AC \Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$$

$$\angle ABC = 2; \angle ADB = 180^\circ - \alpha; \angle CAB = \beta; \angle OAB = 90^\circ - \alpha$$

по т. синусов в $\triangle ABC$ и $\triangle ADB$

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{CB}{\sin \beta} = \frac{BD}{\sin (90^\circ - \beta)} = \frac{AD}{\sin \alpha}$$

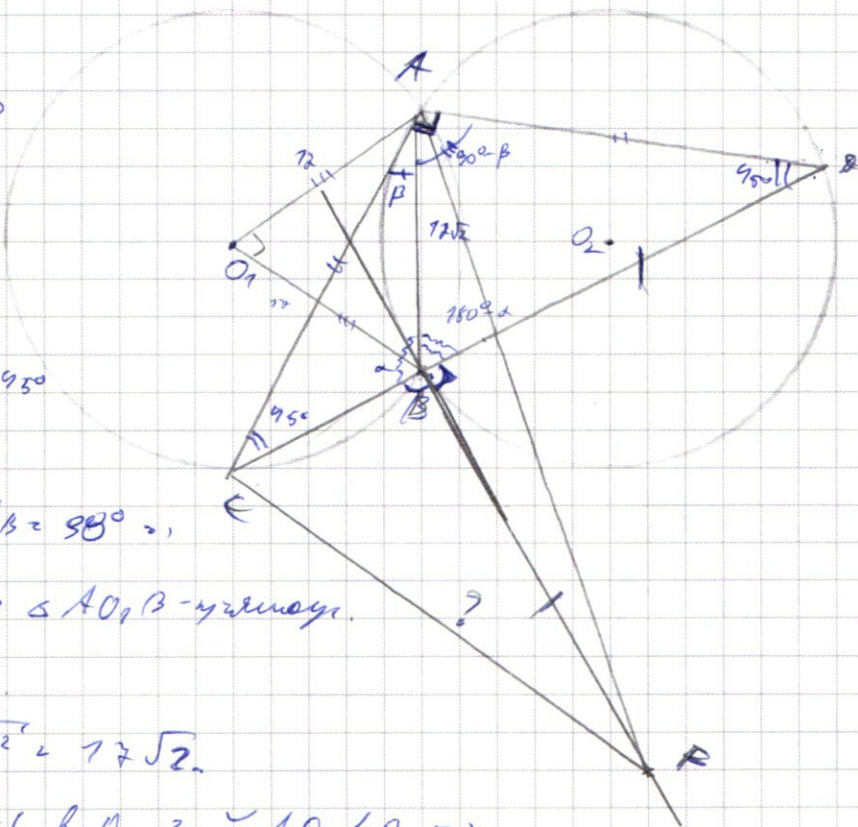
$$\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{CB}{\sin \beta} = \frac{BD}{\cos \beta} = 34$$

$$CB = 34 \sin \beta$$

$$BD = 34 \cos \beta$$

по т. Пифагора в $\triangle CDB$

$$CD = \sqrt{CB^2 + BD^2} = \sqrt{(34 \sin \beta)^2 + (34 \cos \beta)^2} = 34$$



$$5) BC = 16$$

$$S_{ACR} = ?$$

$$CP = 34$$

По т. Пифагора в $\triangle BCP$

$$BP = BC = \sqrt{CP^2 - BC^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 2\sqrt{17^2 - 8^2} = 30$$

$$CQ = BP = CB = 46$$

$$\angle A \approx \angle C: AC \sqrt{2} = \text{---} CQ$$

$$AC = 23\sqrt{2}$$

$$BC = 16 \quad \text{в } \triangle BCP - \text{вычисляем } \sin \angle BCP = \frac{BP}{CP} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$$

$$CP = 34 \quad \cos \angle BCP = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$$

$$BP = 30$$

$$S_{AACP} = \frac{1}{2} AC \cdot CP \cdot \sin \angle ACP = \frac{1}{2} 23\sqrt{2} \cdot 34 \cdot \sin \left(45^\circ + \arcsin \frac{15}{17} \right)$$

$$= 17 \cdot 23\sqrt{2} \left(\sin 45^\circ \cos \left(\arcsin \frac{15}{17} \right) + \cos 45^\circ \cdot \sin \left(\arcsin \frac{15}{17} \right) \right)$$

$$= 17 \cdot 23\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{8}{17} + \frac{15}{17} \right) = 23^2 = 529$$

Ответ: а) 34

б) 529.

д) 7

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x$$

$$\text{при } x = 28$$

$$\text{при } x = 29$$

$$x = 30$$

$$x = 31$$

$$x = 32$$

$$\text{при } x = 4$$

$$93 + 3^{28}x - 3x > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3^{28}(x - 4) > 3^x + 3x$$

$$93 + 3^{28} \cdot 24 > 3^{28} + 84$$

$$93 + 3^{28} \cdot 25 > 3 \cdot 3^{28} + 85$$

$$93 + 3^{28} \cdot 26 > 9 \cdot 3^{28} + 88$$

$$91 + 3^{28} \cdot 27 > 27 \cdot 3^{28} + 91$$

$$91 + 3^{28} \cdot 28 < 81 \cdot 3^{28} + 94$$

$$93 = 81 + 12 = 93$$

структурная
сложность

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.е. находим x от 5 до 31 Т.к. функция

то есть всего 27 нр.

ответ: 27.

$\sqrt{2}$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x \geq 0$$

$$\cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x + \cos 3x + \sin 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x \geq 0$$

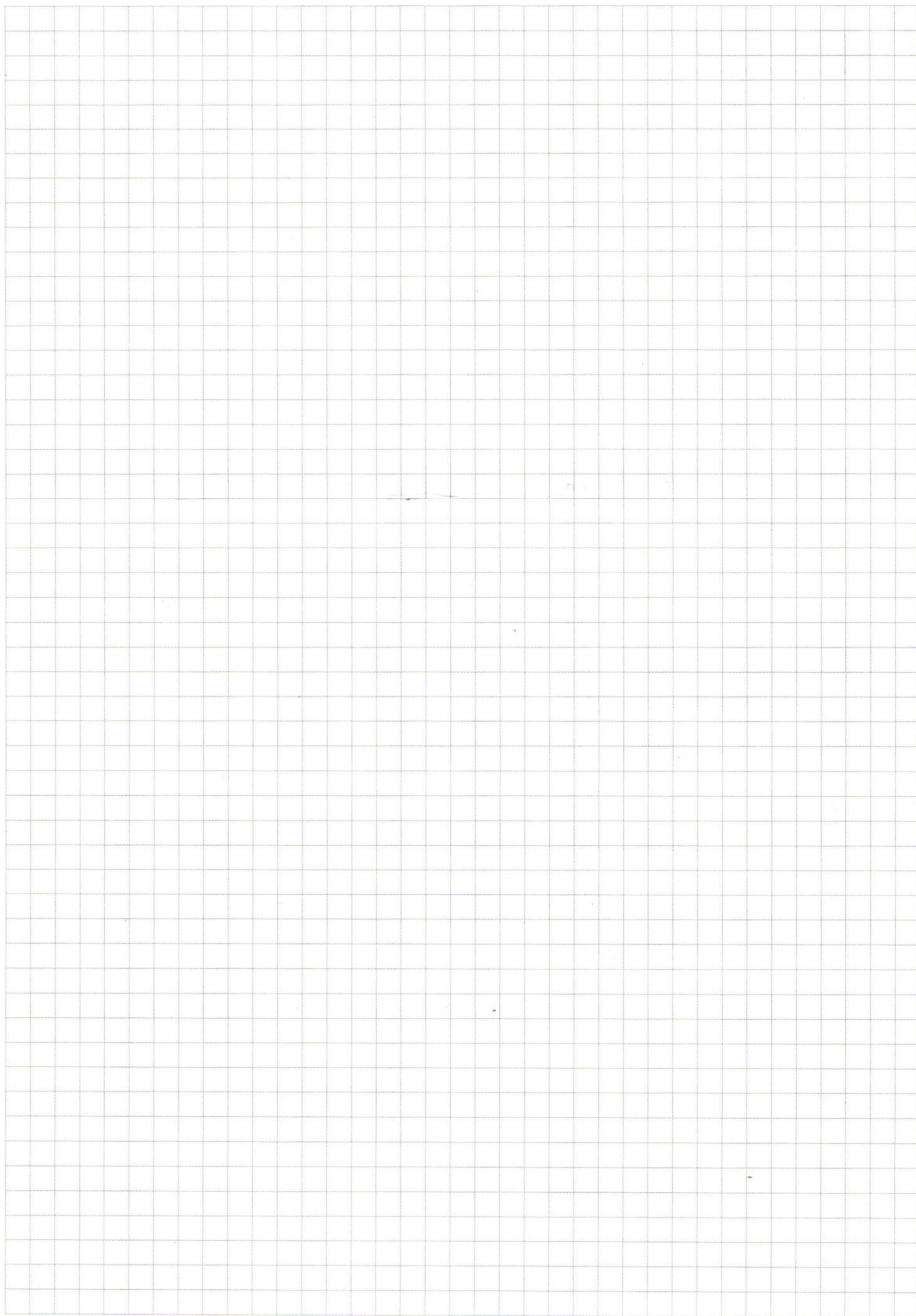
$$(\sin 4x + 1) \cos 3x - \sin 3x (\sin 4x + 1) + \cos 4x (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) \geq 0$$

$$(\sin 4x + 1)(\cos 3x - \sin 3x)$$

$$(\sin 4x + \cos 4x + 1) \cos 3x - \sin 3x (\sin 4x + \cos 4x + 1) + 4 \cos 4x (2 \sin 3x + \sqrt{2}) \geq 0$$

$$\cos 3x (\cos 4x + 1) - \sin 3x (\sin 4x + 1)$$

$$\cos 7x + \cos 2x \cos 4x + \sin 7x - \sin 7x \cos 4x + \sin 4x - \cos 7x + \sqrt{2} \cos 4x \geq 0$$



☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 72
(Нумеровать только чистовики)