

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①
$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$
 Чтобы решения были, нужно чтобы $3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3(3^{27} - 1)x$

~~Впз. e^x и 3^{28} — производные и правая часть.~~

Графики этих функций могут иметь не более двух пересечений, т.к. Правш: $\ln 3 \cdot e^x$ и $3^{28} - 3$; влери - $3 \cdot e^x$ и $0 \Rightarrow$ Пересечений не более двух.

При $x = 26$: ~~$3^{26} + 4 \cdot 3^{28} > 93 + 3 \cdot 26 - 78$~~

При $x = 4$: $y > 3^4 + 4 \cdot 3^{28}$
 $y \leq 93 + 4 \cdot 3^{28} - 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3^{28} + 81$ | единственное y при $x = 4$.

при $x = 31$: $y > 31 \cdot 3^{28}$
 $y \leq 93 + 10 \cdot 3^{29} - 93 = 31 \cdot 3^{28}$ | снова пересечение

Значит, все решения имеют для x между 4 и 31

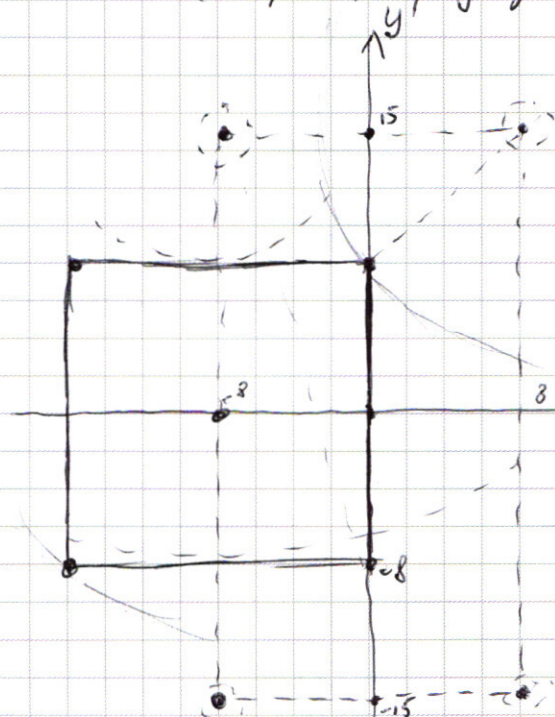
Таких пар будет: $\sum_{x=4}^{31} (3^{28} \cdot (4 - x) + 81 - 3x - 3^{x+4})$

$3^{28} \cdot 27 \cdot 14 + 81 \cdot 28 - 3 \cdot 27 \cdot 14 - 3^{32}$

$(3^{28} - 1)27 \cdot 14 + 81 \cdot 28 - \dots$

⑤ $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (x-8)^2 + (y-15)^2 = a \end{cases}$ Ровно два решения.

Первое уравнение задает квадрат ^(его границей) с центром в точке $(-8; 0)$ и стороной 16. Второе - четверть окружности с центрами в точках $(\pm 8; \pm 15)$ и радиусами $\sqrt{a}$. Нарисуем график:



Заметим, что картинка будет симметрична относительно оси x , то есть можно рассматривать только две вершины окр-ты и квадрат и искать, где будет ровно одно решение. Для этого

одна окружность должна ^{или} касаться стороны квадрата, или проходить через его вершину. (а другая - симметричная). Касаться может только левая из них,

а проходит через вершину - только правая. Левая касается при $a = 7^2 = 49$, пересекает при $a \in (49; 23^2 + 8^2]$, правая касается при $a = 7^2 + 8^2 = 113$ и $a = 23^2 + 24^2 = 1105$, пересекает при $a \in (113; 1105)$.

Заметим, что $23^2 + 8^2 < 1105$, т.е. 113 - подходит, а 1105 - не подходит, а $113 \in (49; 23^2 + 8^2) \Rightarrow$

113 - не подходит, левая окружность пересекает квадрат.

Ответ: 49, 1105

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{2} \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\sin 7x - \sin 3x = 2 \sin 2x \cos 5x$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = -\sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\cos 2x - \sin 2x)$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = -\sin 2x \\ \sqrt{2} \cos 5x = \sin 2x - \cos 2x \end{array} \right] \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}k, \quad x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}k$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = -\sin 2x \\ \sqrt{2} \cos 5x = \sin 2x - \cos 2x \end{array} \right]$$

$$2 \cos^2 5x = 1 - \sin 4x$$

$$1 - 2 \cos^2 5x = \sin 4x$$

$$-\cos 10x = \sin 4x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 10x\right) = \sin(-4x)$$

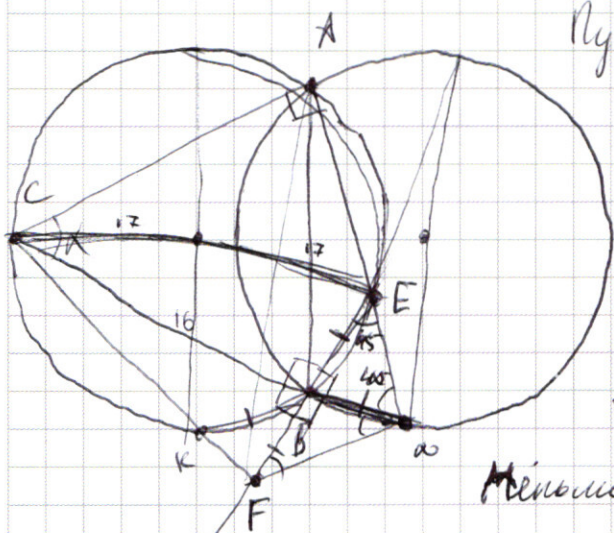
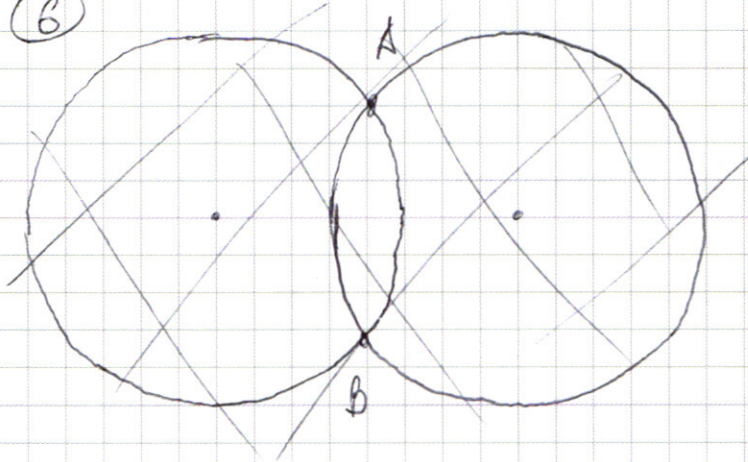
$$\cos 10x = \sin(-4x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right) = \sin(-4x)$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - 10x = -4x + 2\pi k \\ \frac{\pi}{2} - 10x = \pi + 4x + 2\pi k \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 14x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3} \\ x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} \end{array} \right]$$

$$\text{Отв. } \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

6



Пусть E - точка пересечения AB и
окружности, на которой лежит C.

Тогда CE - диаметр, т.к. $\angle CAE = 90^\circ$
по ул.

Если продолжим FB за точку B,

то она пройдет через E т.к. $\angle CBF$

такие прямые, а через одну точку только
один диаметр.

Меньшие дуги AB окружности равны из
симметрии относительно радиусов. Значит,

$\angle ACB = \angle AOB = \alpha$. Тогда $\angle AEB = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \angle DEB = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow OB = BE = BF$ ~~$OB = x$~~ ~~$BE = \sqrt{2}x$~~

Тогда $\triangle CBE = \triangle CBF$ по двум катетам $\Rightarrow CE = 34$.

а) Ответ: 34

б) $BC = 16$. Найти: S_{ACF}

~~E - точка пересечения CF и окруж-ти. $CB = BE$ т.к. $\angle CAB = \angle CEB \Rightarrow$ хорды,
отсюда вытекает, что меньшие дуги AB равны.~~

$FO \parallel AC \Rightarrow \angle ACF = \angle ACO$.

$EB = \sqrt{34^2 - 16^2} = 2\sqrt{17^2 - 8^2} = 2\sqrt{289 - 64} = 2\sqrt{225} = 30$.

Тогда $CO = 16 + 30 = 46$. $AC = AO = 23\sqrt{2}$. $S_{ACO} = \frac{1}{2} AC^2 = 23^2 = 529$

Ответ: 529.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $64827 = 7^4 \cdot 3^3$

Как произведение цифр это можно разложить двумя способами: $7^4 \cdot 3^3 \cdot 1$ или $7^4 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 1^2$

В первом случае таких чисел $8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 8 \cdot 7 \cdot 5$ (вводим 8-ю цифру, 3 цифры из оставшихся)

Во втором — $8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$ (аналогично, сначала ставим 3 и 9 на одно из восьми и тогда семь мест, дальше — единицы, оставшиеся — семерки).

$$8 \cdot 7 \cdot 5 + 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 20 = 1120$$

Ответ: 1120 чисел.

③ $\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(x \cdot y^2)} \\ y^2 + 2xy + 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$ | Заметим, что $y < 0$ (т.к. $\ln(-y)$),
и $x > 0$, т.к. $\ln(x \cdot y^2)$

перепишем второе уравнение и поделим на дискриминант относительно y .

$$y^2 + y(2x+4) + 3x^2 + 12x = 0$$

$$\frac{D}{4} = x^2 + 21x + 4 + 3x^2 - 12x = 4(x^2 - 2x + 1) = 4(x-1)^2$$

Чтобы все было корректно, пусть $y = -x-2 \pm 2\sqrt{x-1}$

$$y = -x-2 \pm 2\sqrt{x-1}$$

Заметим, что нам подходят только меньший корень, потому что $y < 0$.

1) $x \geq 1$. $y = -x-2+2\sqrt{x-1} = x-3$ или $y = -3x$

$$\frac{x^7 \ln(-y)}{(-y)^{\ln(-y)}} = x^{2 \ln x + 4 \ln(-y)}$$

$$x^{3 \ln(-y) - 2 \ln x} = (-y)^{\ln(-y)}$$

④

The diagram shows a triangle with vertices labeled X , Y , and Z . A point O is located inside the triangle. A line segment connects X and Y , passing through O . Another line segment connects Y and Z , also passing through O . A third line segment connects X and Z , passing through O . The diagram illustrates the intersection of three lines within a triangle.

Пусть радиус сферы равен r , тогда

пересечение сечений и SQ — точки
 X_1, Y_1 — ~~на сечениях~~ u, v SK ,
 $XO = OY = r$ т.к. сечения
касаются сферы.
 $\angle SKX_1 = \angle SKY_1 = 90^\circ$
 $Y, X \in$

Очевидно, что все четыре ^{свойства} трехгранного

угла параллельных плоскостей

получаются подобие треугольники. Три, образованные сечениями через X и Y подобны с коэффициентом $\frac{X_1}{Y_1}$ ($1, k, X_1, Y_1$ — соответственные элементы). $\Delta S_{XX_1} \sim \Delta S_{YY_1}$.

с коэффициентом $\frac{S_X}{S_X + 2V}$. Тогда для α подобия треугольников
протрезанная и в квадрате коэффициента подобия $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{Sx}{Sx+2r} = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{Sx = 6r} \quad OS = 7r, \angle OSK = \arcsin\left(\frac{OK}{OS}\right) =$$

$$= \left| \arcsin \frac{1}{x} \right|$$

~~а) Сечение~~ Сечение через K, L и M . Плоскость KLM параллельна плоскости сечений через X и Y , т.к. $SK = SM = SL$ (отрезки касательных, а

$SX_1 = SX_2 = SX_3$ из равенства тригонометриков (если X_2 и X_3 - аналогичные точки для SM и SL)) тогда из Конфуция изречения и SO (точка H).

Ис сечения ксм $\Rightarrow S_{\text{сеч. ксм}} = S_{\text{сеч. х}} \cdot \left(\frac{SH}{S_x}\right)^2$. $SH = SO \cdot \cos^2 \angle OSK =$

$$= 7r \cdot \frac{48}{49} = \frac{48}{7}r$$

$$S = g \cdot \left(\frac{48}{7.6} \right)^2 = g \cdot \frac{8^2}{7^2} = \frac{576}{49}$$

Orber: $\arcsin\left(\frac{1}{7}\right), \frac{576}{49}$

В решении пункта 8) я использовал lemma о том, что ~~не~~ сечение упр

~~пересекаются~~ параллельна другой сейчас тогда и тогда, когда

Отрезки, которые она высекает на дугах, относятся между собой одинаково.

Она достигается через систему структурных отношений средн

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑤ $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ 2(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$ ровно два решения.

Заметим, что первое уравнение описывает сумму расстояний от точки $x+8$ до точек $-y$ и y . Значит, $|y| \leq 8$

Нарисуем график. В обоих уравнениях $f(y) = f(-y) \Rightarrow$ можно рисовать только часть, где $y \geq 0$ и считать случаи с ровно одним решением.

график второго уравнения - две симметричные окружности радиуса $\sqrt{a}$.

Первое уравнение:

когда $y=8$, $x \in [0, 16]$ - отрезок решений.

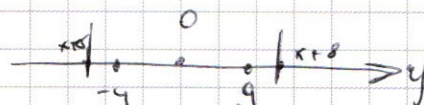
~~когда $y=8$~~ Заметим, что при $|a| > 7$

какая-нибудь из четырех окружностей

гарантированно будет пересекать этот

~~отрезок~~

когда $y < 8$:



если $x > y$, $|x+8| = x+8$, $|x-y+8| = x-y+8$

если

$$16 = 2y + 2x + 16 - 2y \Rightarrow y = -2x \Rightarrow x = 0$$

если $x < y$: $16 = 2y + 2(-y - x - 8) \Rightarrow 16 = -2x - 16 \Rightarrow x = -16$

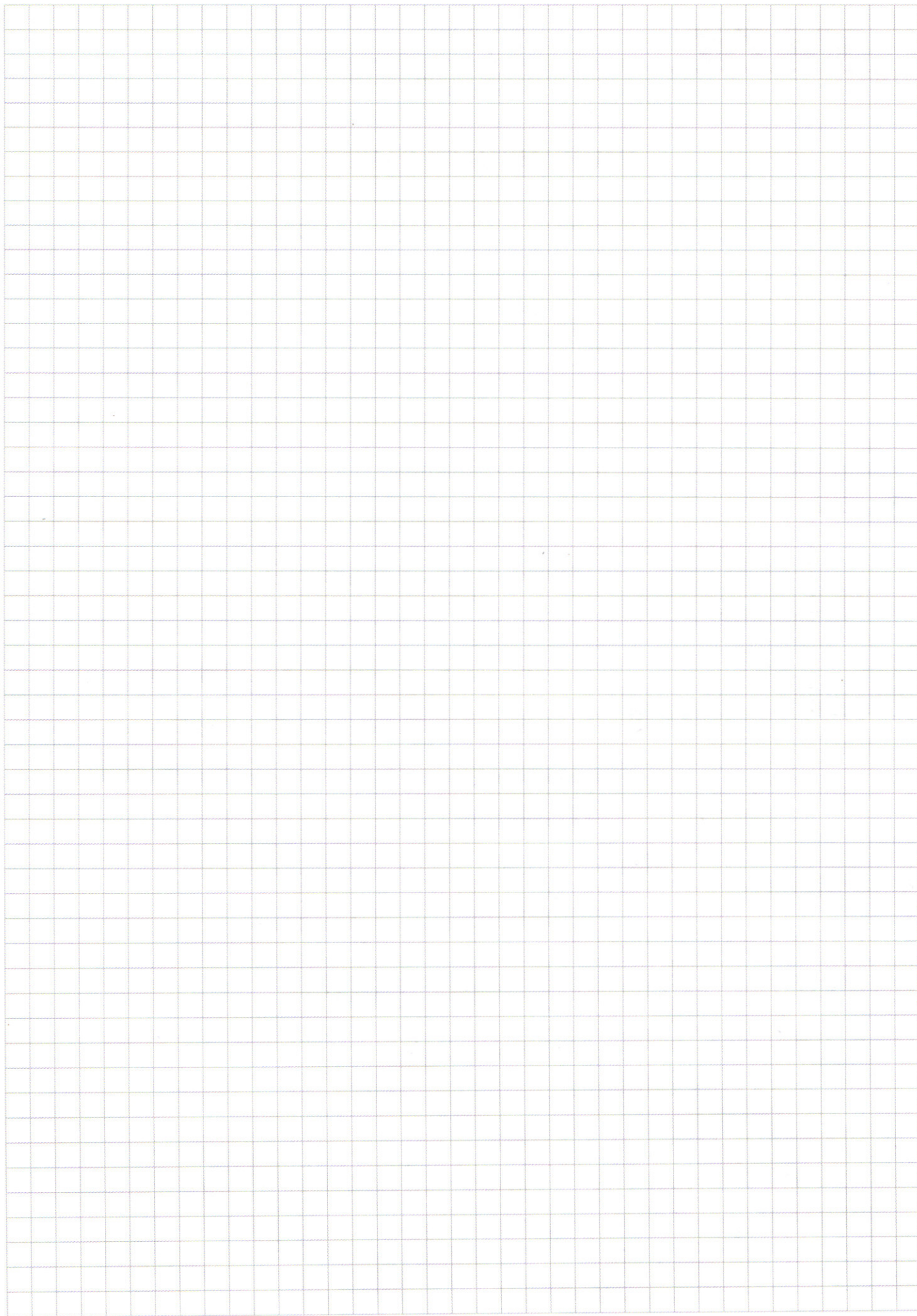
если $-y < x < y$, расстояние равно $2y$, $y=8$ - что было.

Из картинок видно, что решения существуют (на $y > 0$) только

когда верхняя окружность ^{внешняя} касается полуокружности ($a=49$), или ^{при $a \leq 49$} ~~иначе~~

нижняя окружность проходит через левую вершину $(-16, -8)$ вершины ($a=24^2+23^2=1105$). В остальных из противоположных ситуаций квадрат будет пересекать либо одну окр-гу, либо другую, либо обе (прямая линия).

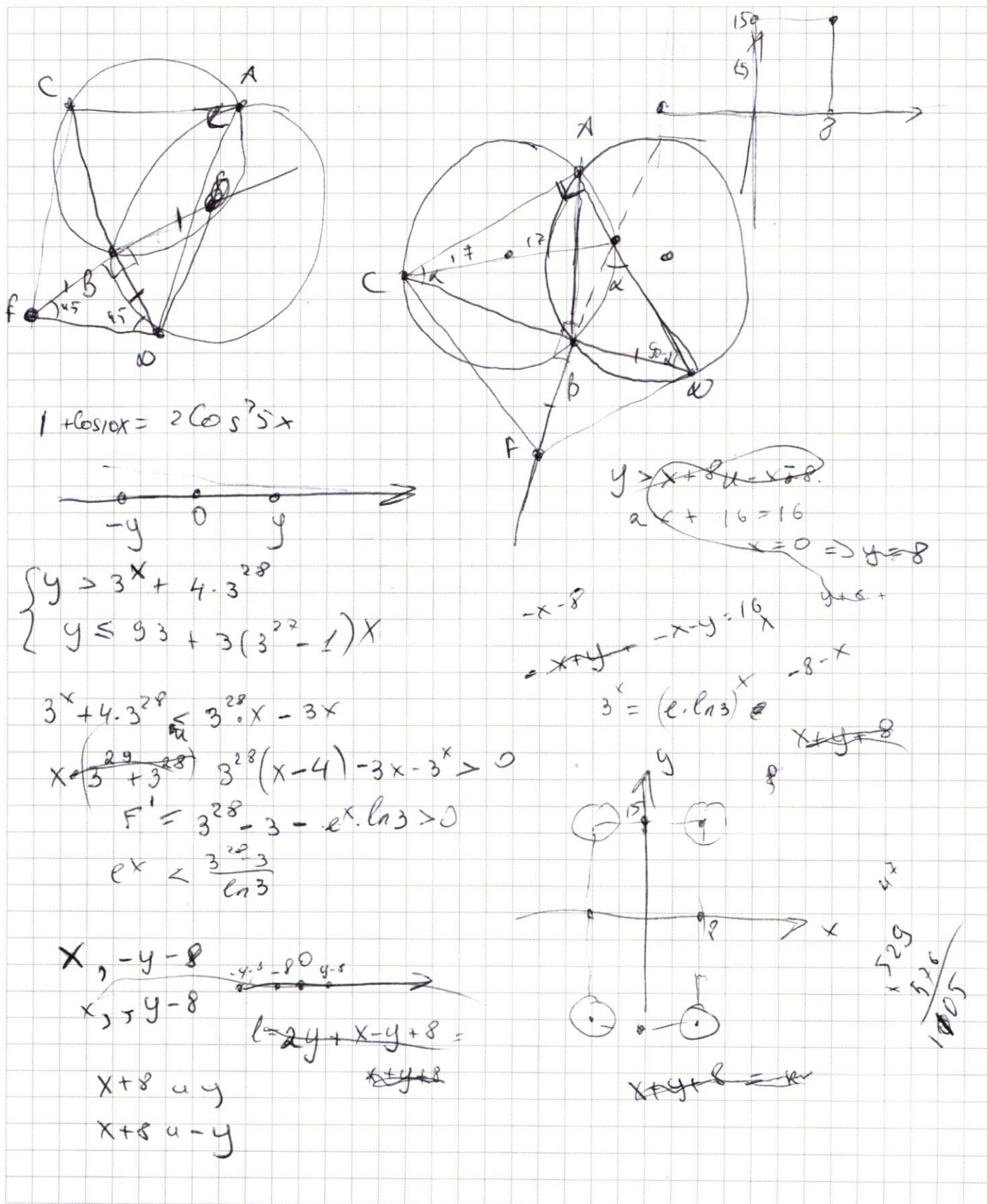
ответ: 49, 1105



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

~~$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$~~

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cdot \cos 2x$$

$$\sin 7x - \sin 3x = 2 \sin 2x \cos 5x$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = -\sqrt{2} \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\text{или } \cos 2x = -\sin 2x$$

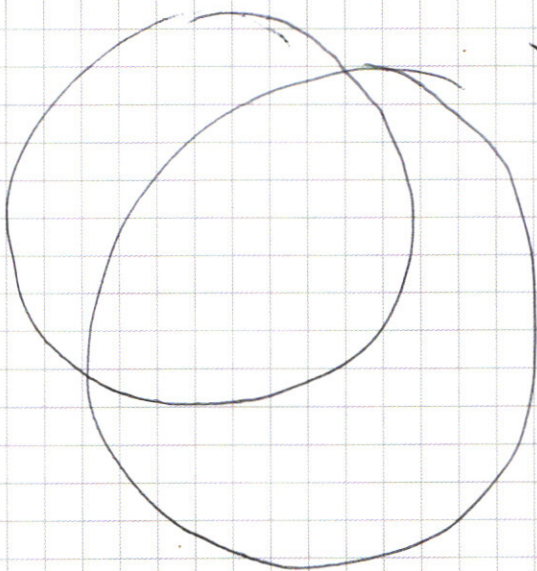
$$\text{или } \sqrt{2} \cos 5x = \sin 2x - \cos 2x$$

$$\cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x + \cos 3x + \sin 4x \cos 3x + \sin 3x \cos 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin 3x (\cos 4x - \sin 4x - 1) + \cos 3x (\cos 4x + \sin 4x + 1) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$|x+y| + |x-y| = 16$$

сдвигающего вектора



когда $y=8, x \in [-16, 0]$
 когда $y > 8$ - корень
 когда $y < 8$ - корень

$16 = x + y$ или $16 = 2y + 1 + x - y$
 $y = -x + 16$ или $16 = 2y + 1 + (y - x)$
 $y = x + 16$, когда $y > x$

$$\begin{array}{r} 23 \\ + 23 \\ \hline 46 \\ 46 \\ \hline 92 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 9} \\ \underline{-63} \\ 18 \\ \underline{-18} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7208 \overline{) 3} \\ \underline{-72} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2401 \overline{) 7} \\ \underline{-24} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{Таким: } 8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{8} = 8 \cdot 7 \cdot 5$$

$$7^4 \cdot 3 \cdot 9 \Rightarrow 7^4 \cdot 3^3 \cdot 1$$

$$\text{или } 7^4 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\text{Таким } 8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$$

$$\text{было } 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4$$

$$56 \cdot 20$$

$$\underline{1120}$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{x^2}{y}\right) \ln(-y) = x^2 \ln(xy^2) \\ y < 0, x > 0 \end{array} \right.$$

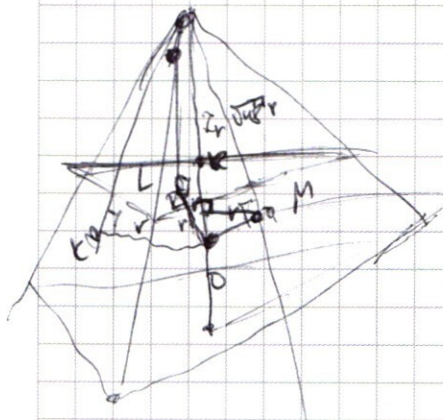
$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 + y(2x+4) - 3x^2 + 12x = 0 \quad -3x^2 + (12+2y)x + y^2 + 4y$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x = 4x^2 - 8x + 4 = (2(x-1))^2 \Rightarrow x = 1$$

$$\frac{dx}{dy} = y^2 + 12y + 36 + 3y^2 + 12y = 4y^2 + 24y + 36 = 4(y^2 + 6y + 9)$$

$$\left(-\frac{1}{y}\right) \ln(-y) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \ln(-y) = 0 \\ -\frac{1}{y} = 1 \text{ (т.к. } y < 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow (1, -1)$$



$$k = \frac{3}{4} \Rightarrow SO = \frac{3}{4} \cdot 2r = \frac{3}{2}r$$

$$\frac{S_x}{S_y} = \frac{3}{4}$$

$$4S_x = 3(S_x + 2r)$$

$$S_x = 6r$$

$$SO = 8r$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{8^2}{2^2} \cdot 9 = S = \frac{64 \cdot 9}{49} = \frac{576}{49}$$

$$S_{KLM} =$$

$$\cos^2 = \frac{48}{49}$$

$$S_x = 7r \cdot \frac{48}{49} = \frac{48}{7}r$$

