МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра6
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$64827 = 7^4 \cdot 3^3$

Т.о. возможные наборы цифр восьмизначного числа:

1) 7, 7, 7, 7, 3, 3, 3, 1

2) 7, 7, 7, 7, 9, 3, 1, 1

Других цифр, кроме 1, 3, 7 быть не может, так как тогда 64827 ⋮ бы на них (или равнялось бы 0), что не так

Остальные простые множители (кроме $3 \cdot 3 = 9$) объединять в одну цифру нельзя, так как $7 \cdot 3 > 10$, $7 \cdot 7 > 10$ и не могут данные произведения записываться одной цифрой.

Посчитаем для каждого из наборов ① и ② кол-во восьмизначных чисел.

①: $\underset{\text{выбор 1}}{8} \cdot \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 280$ чисел
(выбор 3 без учёта порядка)

②: $\underset{\text{выбор 3}}{8} \cdot \underset{\text{выбор 9}}{7} \cdot \dfrac{6 \cdot 5}{2} = 21 \cdot 40 = 840$ чисел
(выбор 1 без учёта порядка)

Всего $280 + 840 = 1120$ чисел

Ответ: 1120 чисел.

№2

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos 5x \cos 2x + 2\cos 5x \sin 2x + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) =$

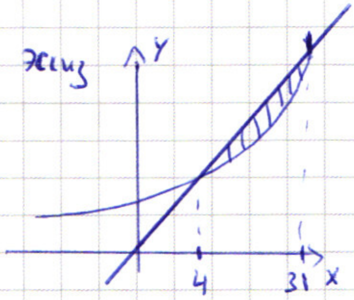
$= 0 \Leftrightarrow (\cos 2x + \sin 2x)\big(2\cos 5x + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)\big) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x + \sin 2x = 0 \\ \cos 5x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -\sin 2x \\ \pi - 5x = 2x + \frac{\pi}{4} - 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \pi + 5x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 3x = -3\pi/4 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\pi/4 + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Ответ: $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2};\ \frac{3\pi}{24} + \frac{2\pi k}{7};\ -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3} \right\}$.

№ 7



$$\begin{cases} y > 3^x + 4\cdot 3^{28} \\ y \le 93 + 3(3^{27}-1)x \end{cases}$$

① $y = 3^x + 4\cdot 3^{28}$

② $y = 93+3(3^{27}-1)x$

степень роста ① больше, чем ② $\Rightarrow$ начиная, с какого-то x_0

y из ① $>$ y из ②

Зная поведение ~~показательной~~ степенной и линейной функций, заметим, что кол-во корней в системе $\begin{cases} ① \\ ② \end{cases}$ 2 или 0.

В данном случае корней 2: это $\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 31 \end{array}\right. \wedge \left(y = 3^x + 4\cdot 3^{28}\right)$

Какое же кол-во ~~целых ти~~ точек с целыми координатами удовлетворяющих данной системе неравенств при данном $x_0 \in [5; 30]$

$x_0 = 5 \quad 3^{28} - (3^5 - 93 + 3\cdot 5)$

$x_0 = 6 \quad 2\cdot 3^{28} - (3^6 - 93 + 3\cdot 6)$

Вычитаем из значения y во ② значение y в ①.

...

$x_0 = 30 \quad 26\cdot 3^{28} - (3^{30} - 93 + 3\cdot 30)$

Теперь нам нужно это сложить эти значения

$$\underbrace{\frac{26\cdot 27}{2}}_{\text{арифметическая прогрессия}} 3^{28} - \left(\underbrace{3^5\,\frac{3^{26}-1}{3-1}}_{\text{геометрическая прогрессия}} - 93\cdot 26 + 3\cdot\left(\frac{30\cdot 31}{2} - 10\right)\right) =$$

$= \cancel{35V\cdot B}\ 13\cdot 3^{31} - 0{,}5\cdot 3^{31} + 0{,}5\cdot 3^5 + 2418 - 3\cdot 455 = 12{,}5\cdot 3^{31} +$
$+ 1174{,}5$

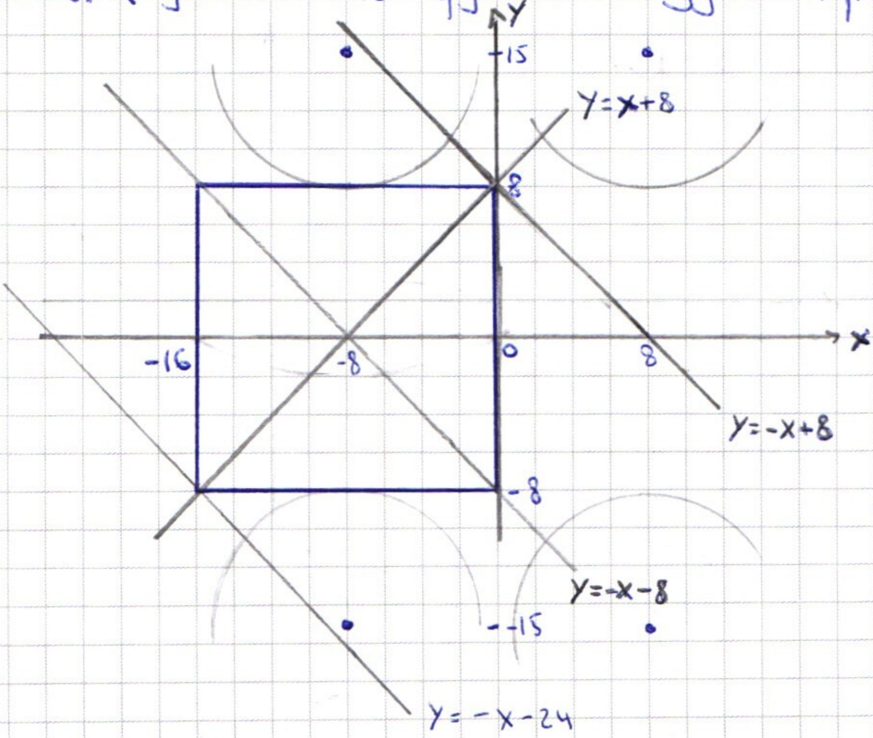
Ответ: $12{,}5\cdot 3^{31} + 1174{,}5$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & ① \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & ② \end{cases}$$

Рассмотрим выражение ① и изобразим на координатной плоскости xOy множество точек, удовлетворяющих данному выражению. (Сделаем это грустно и нудно нораскрывав модули)



Заметим, что выражение ② без модулей описывало бы окружность с центром в $(8,15)$ и радиусом $\sqrt{a}$.

С модулями ② в каждой из координатных четвертей изображается частью окружности с центром в $(\pm 8, \pm 15)$ в зависимости от четверти и радиусом $\sqrt{a}$.

Заметим, что построения симметричны относительно Ox поэтому если есть точка пересечения $Г_①$ и $Г_②$ в верхней полуплоскости, то есть и в нижней (симметричная)

Очевидно ~~решение~~ два корня при $\sqrt{a} = 7$, т.е. $a = 49$, при котором корни $(-8; 8)$ и $(-8; -8)$. При дальнейшем увеличении a кол-во решений будет 4 (до $\sqrt{a} = 17$).

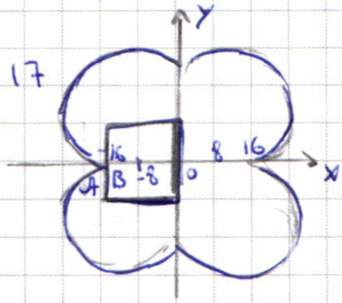
При $\sqrt{a}=17$ 1 решение

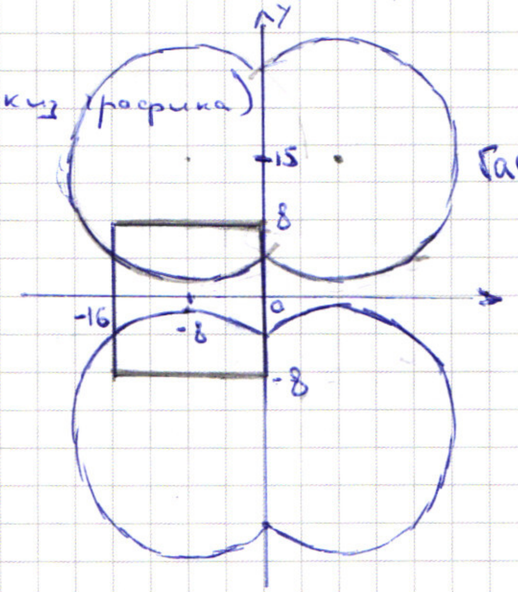
При $\sqrt{a}>17$ 0 решений

При $\sqrt{a}<7$ 0 решений

При $\sqrt{a}>8$ График такой (эскиз графика)

$\sqrt{a}=17$





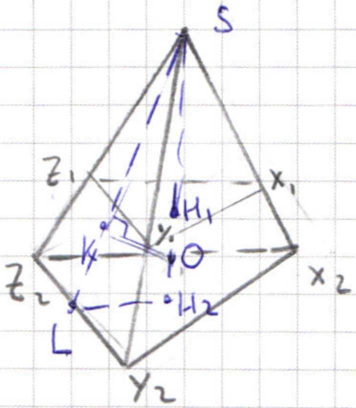
$\sqrt{a}\in(8;17)$

При $\sqrt{a}>17$ график такой же, как и при $\sqrt{a}=17$ но точка $A\in\Gamma_{②}\neq$

$\neq B\in\Gamma_{①}$ $\quad A_x < B_x$

Ответ: только при $a=49$.

№4



3 плоскости, про которые известны площади сечения или угла S - плоскости $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$ с площадями сечений 9 и 16 соответственно.

$$\begin{cases}(X_1Y_1Z_1)\parallel(X_2Y_2Z_2)\\ \dfrac{S_{X_1Y_1Z_1}}{S_{X_2Y_2Z_2}}=k^2\end{cases} \Rightarrow \triangle SX_1Y_1 \sim \triangle SX_2Y_2$$ с коэффициентом k.

$(X_1Y_1Z_1)\parallel(X_2Y_2Z_2) \Rightarrow H_1H_2=2R$

$$\frac{SX_1}{SX_2}=\frac{3}{4}=\frac{SY_1}{SY_2}=\frac{SZ_1}{SZ_2}=\frac{SH_1}{SH_2}=\frac{SH_1}{SH_1+2R}=\frac{SO-R}{SO+R} \quad (*)$$

$$\sin\angle KSO=\frac{R}{SO}=\frac{R}{7R}=\frac{1}{7} \Rightarrow \angle KSO=\arcsin\frac{1}{7}.$$

$$(*) \Leftrightarrow 3SO+3R=4SO-4R \Leftrightarrow 7R=SO$$

$$SK=\sqrt{SO^2-R^2}=4\sqrt{3}R$$

(П. Пифагора)

$$SL=\sqrt{SH_2^2+LH_2^2}\overset{(**)}{=}\sqrt{64+\tfrac{4}{3}}\,R=\frac{14}{\sqrt{3}}R \qquad L=(SK)\cap(Z_2Y_2)$$

Заметим, что $\triangle SKO\sim\triangle SLH_2$ (по 2м углам), причём

$$\frac{LH_2}{OK}=\frac{SH_2}{SK}=\frac{8R}{4\sqrt{3}R}=\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow LH_2=\frac{2}{\sqrt{3}}R \quad (**)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (Продолжение)

$$\frac{S_{KLM_{сег}}}{S_{X_2Y_2Z_2}} = \left(\frac{SK}{SL}\right)^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{14}\cdot\sqrt{3}\right)^2 = \frac{36}{49} \Rightarrow S_{KLM_{сег}} = 16\cdot\frac{36}{49} = \frac{576}{49}$$

сег.$(KLM) \sim X_2Y_2Z_2$ с коэфф. $\frac{SK}{SL}$

Ответ: $\arcsin\frac{1}{7}$; $S_{KLM_{сег}} = \frac{576}{49}$.

№3

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} & (1) \\ y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $x \in (0;+\infty)$
$y \in (-\infty;0)$

Потенцируем (1) : $(-y)^{\left(-\frac{x^7}{y}\right)} = \left((xy^2)^2\right)^x \Leftrightarrow$
+ св-ва log

(2) имеет решения только при $x \in (-\infty; 1/2] \cup [2;+\infty)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases}$ т.к. иначе левая и правая часть равенства не будут равны

Однако $(1;-1)$ не подходит к условию наличия корней во (2).

Ответ: $\varnothing$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

64827	3
21609	3
7203	3
2401	7
343	7
49	7
7	7

77773331

$8\cdot\frac{7\cdot6\cdot5}{6}=8\cdot7\cdot5=280$

77779311

$8\cdot7\cdot\frac{6\cdot5}{2}=40\cdot21=840$

1120

13×27: 91, 26, 351

$\cos7x+\cos3x+\sin7x-\sin3x+\sqrt2\cos4x=0 \Leftrightarrow$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos0+\cos\pi=$

$\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt3}{2}+\frac12=2\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}$

$\cos\frac{\pi}{2}+\cos\pi=2\sin\frac{3\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4}$

-1, $\frac{1}{\sqrt2}$, $-\frac{1}{\sqrt2}$

$3^{31}\cdot(14-1,5)+$

$+\frac{243}{2}+93\cdot27-1488+30=$

$\frac{243}{2}=121,5$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=$

$\sin\pi-\sin0=2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=$

$\sin\frac{\pi}{2}-\sin\pi=1=2\cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}$

31×48: 248, 124, 1488

93×27: 651, 186, 2511, -1488

$=3^{31}\cdot12,5+$
$+1174,5$

$\frac{\alpha+\beta}{2}=a$ $\quad$ $\frac{\alpha-\beta}{2}=b$ $\quad$ $\alpha=a+b$

$\beta=a-b$ $\quad$ $512+511=1023=1144,5$

$\cos(a+b)+\cos(a-b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b+$
$+\cos a\cos b+\sin a\sin b=2\cos a\cos b$

$\sin(a+b)-\sin(a-b)=\cos a\sin b+\cos b\sin a-$
$-\sin a\cos b+\cos a\sin b=2\cos a\sin b$

$\Leftrightarrow 2\cos5x\cos2x+2\cos5x\sin2x+\sqrt2\cos4x=0$

$(2\cos5x+\sqrt2(\cos2x-\sin2x))(\cos2x+\sin2x)=0$

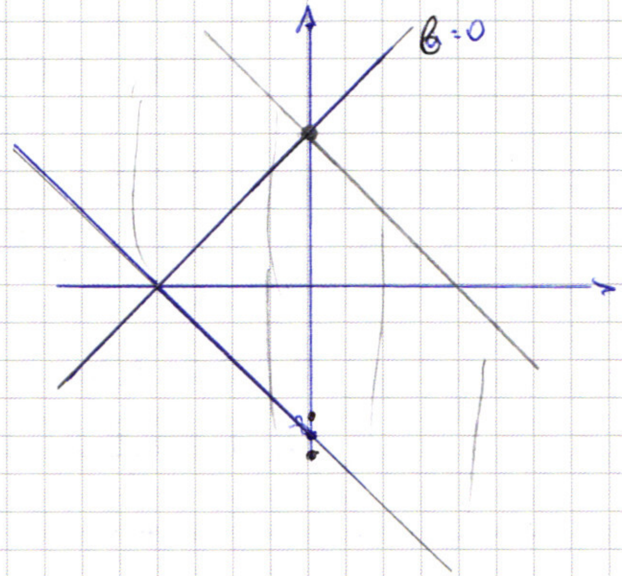
$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0 \end{cases}$$

$\cancel{(y+x)^2-4(x^2-3x+y)}$

243

$121{,}5+2418-1365$

1053



$$\frac{(+x^7)^{\ln(-y)}}{(-y)^{\log_{-y} e}}$$

$$\begin{cases} |x+y+8|+|x-y+8|=16 \\ (|x|-8)^2+(|y|-15)^2=a \end{cases}$$

$|x+y+8| = 16-|x-y+8|$

$x+y+8=\pm(16-|x-y+8|)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y+8\geq 0 & y\geq -x-8 \\ x+y+8=16-|x-y+8| & \Rightarrow |x-y+8|=8-x-y\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y+8<0 & y<-x-8 \\ |x-y+8|=24+x+y>0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$0 \Leftarrow y\leq x+8$

$y\leq 8-x$

$y>-x-24$

$y\leq x+8$

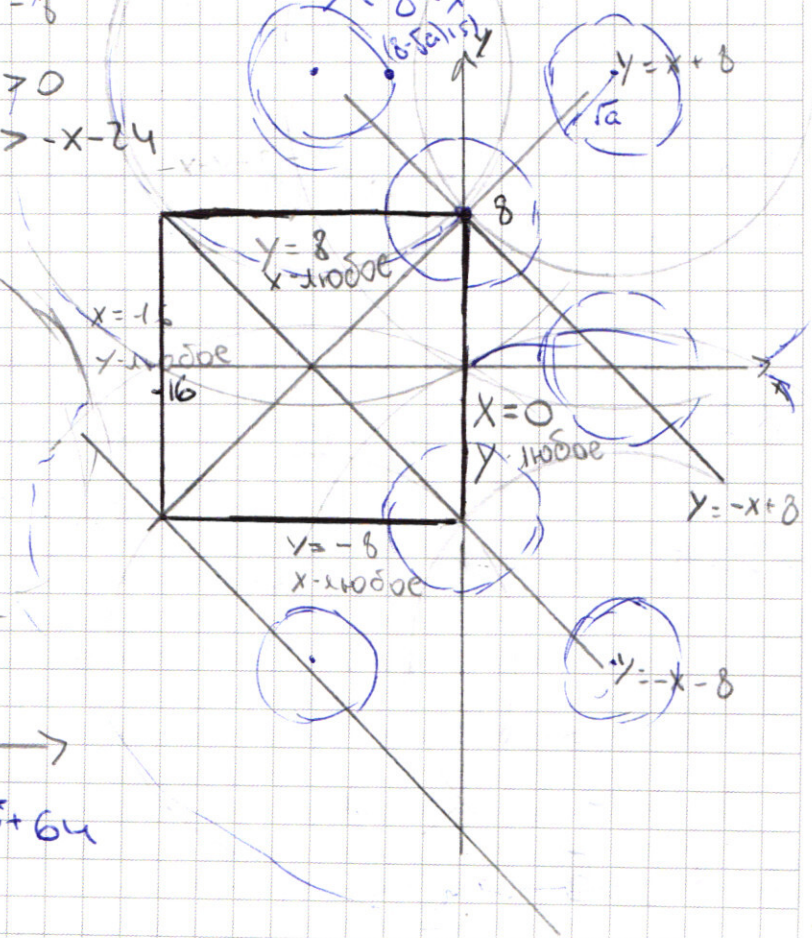
$-y+8=24+y$

$2y=-16$

$y=-8$

$-x+y-8=24+x+y$

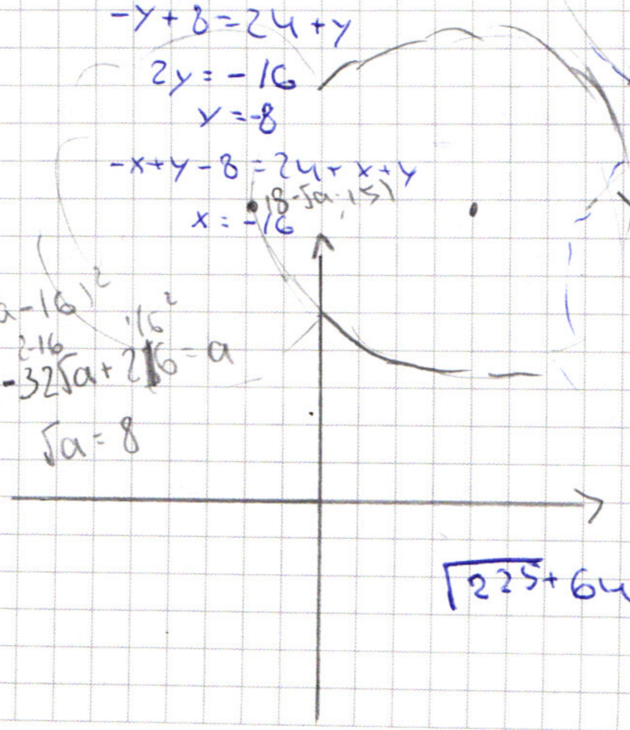
$x=-16$



$(\sqrt{a}-16)^2$

$a-32\sqrt{a}+256=a$

$\sqrt{a}=8$



$\sqrt{225+64}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)^2} \\ y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0 \end{cases}$$

$$\frac{x^{7\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$e^{\ln^2(-y)} = (e^{\frac{1}{2}\ln(-y)})^2 = (-y)^2$$

$$(-y)^{-\frac{x^7}{y}} = (xy^2)^{2x}$$

$y \qquad x^{2x}y^{4x}$

~~36+48~~ $\quad 36+72-36\cdot 3$

$y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0$

$(y+2)^2 - 3(x-$ $\qquad x=-2$

$y^2+4y+4 \qquad y^2-12-24$

$y^2-2y+3-12+4y=0$

$y^2+2y-9=0$

$y^2+8y-12+24=0$

$y^2+8y+12=0$

$y=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{}$

y^2+12y- ~~48+48~~

$-3x^2+12x+3y \qquad y^2+12y-12=0$

$y=-6\pm\sqrt{36+12}$

$y^2+12y-108+72+24=0$

$3x^2-(12+2y)x-y^2-4y=0$

$y^2+12y+36+3y^2+12y\geq 0$

$4y^2+24y+36\geq 0$

$y^2+6y+9\geq 0$

$y^2+y(2x+4)-3x^2+12x=0$

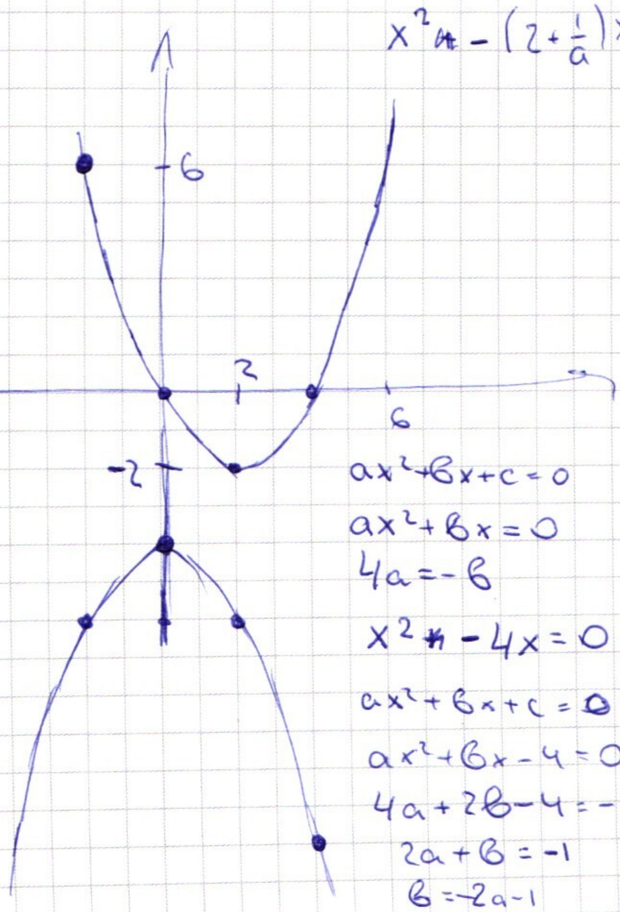
$(x+2)^2+3x^2-12x\geq 0$

$4x^2-10x+4\geq 0$

$y^2+2xy+y=0 \qquad 2x^2-5x+2\geq 0$

$x \quad \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4} = 2 \quad \frac{1}{2}$

$x^2a-(2+\frac{1}{a})x-4=0$



$ax^2+bx+c=0$

$ax^2+bx=0$

$4a=-b$

$x^2-4x=0$

$ax^2+bx+c=0$

$ax^2+bx-4=0$

$4a+2b-4=-6$

$2a+b=-1$

$b=-2a-1$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

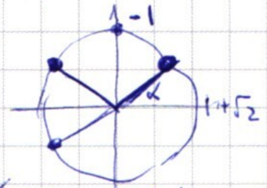
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = -\sin 2x \\ \sqrt{2}\cos 5x + \cos 2x - \sin 2x = 0 \end{array}\right.$$

$\cancel{\sqrt{2}\cos 5x = 1 - \frac{1}{2}\sin 4x}$

$\cancel{\cos(5x + \frac{\pi}{4})} =$



$$\cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$\cancel{\cos 2x \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin 2x \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$$\cos 5x = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$\cancel{5x = \pi - (2x + \frac{\pi}{4})}$

$\cancel{5x = \pi + (2x + \frac{\pi}{4})}$

$$\left[\begin{array}{l} \pi - 5x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ \pi + 5x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{array}\right.$$

$7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

$3x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3} \end{array}}$$

$\left\{\begin{array}{l} 2x = \frac{3\pi}{4} + \pi k \\ 2x \end{array}\right.$ $\quad x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$

$93 \times 26 = 558 + 186 = 2418$

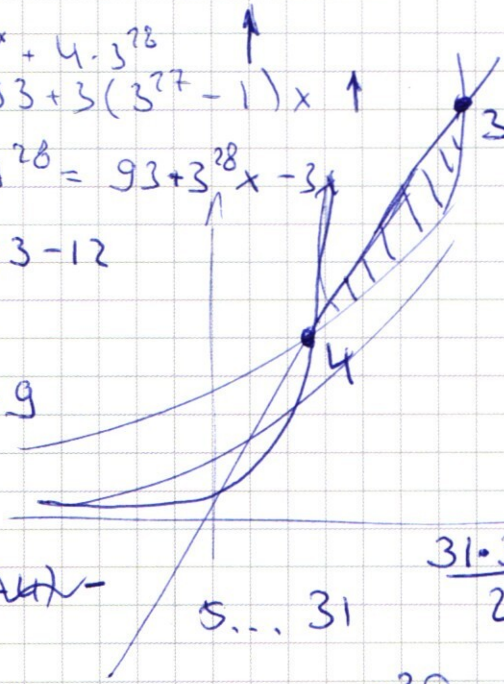
$$\left\{\begin{array}{l} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \le 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{array}\right.$$

$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3^{28}x - 3x$

$3^4 = 93 - 12$

$27 + 4 \cdot 3^8$

$93 + 3^{28} \cdot 3 - 9$



$15 \times 31 = 15 + 45 = 465$

$243 + 4 \cdot 3^{28}$

$78 + 5 \cdot 3^{28}$ $\quad 3^5 - 93 + 3 \cdot 5$

$x = 5$ $\quad 3^{28} - 165$

$x = 6$ $\quad 6 \cdot 3^{28} + 75 - 729 - 4 \cdot 3^{28} = 2 \cdot 3^{28} - 654$

$\cancel{x \cdot 3^{x-1}(x+4)} -$

$5 \ldots 31$ $\quad \frac{31 \cdot 32}{2} - 10$

$3^6 - 93 + 3 \cdot 6$

$x = 31$

$3^{28} + 4 \cdot 3^{26}$

$3^{30} + 4 \cdot 3^{28} = 3^{28}($

$27 \cdot 3^{28} - (3^{31} - 93 + 3 \cdot 31)$

$93 + 28 \cdot 3^{26} - 3 \cdot 26$

$3^{31} + 4 \cdot 3^{28} = 31 \cdot 3^{28}$

$1 \ldots 27$

$93 + 3(3^{27} - 1)\,31 = 0$

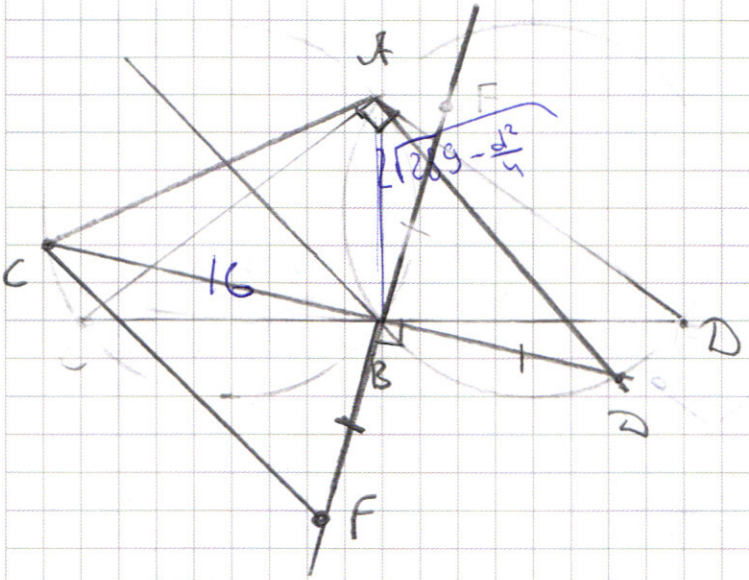
$3^5 \cdot 3\left(3^5 \frac{3^{27} - 1}{2}\right)$

$$\frac{28 \cdot 27}{2} 3^{28} - \sum_{5}^{31} 3^k + 93 \cdot 27 - 3 \cdot 31 \cdot 16 + 30$$

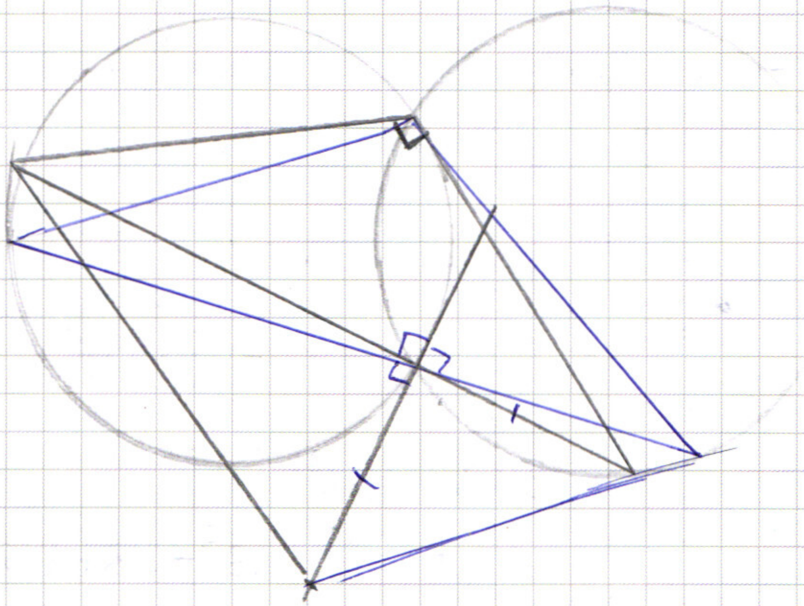
$$14 \cdot 27 \cdot 3^{28} - 3^5 \cdot \frac{3^{27} - 1}{2} + 93 \cdot 27 - 3 \cdot 31 \cdot 16 + 30$$

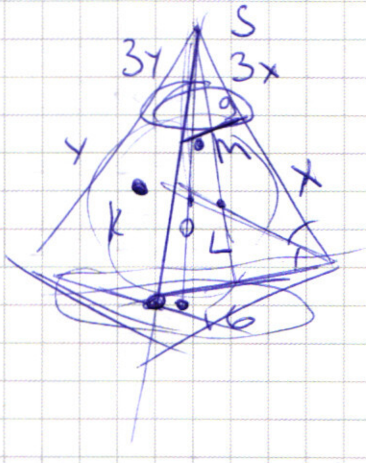
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 16 \\ \hline 216 \\ 36 \\ \hline 576 \end{array}$$





$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 3 \\ \hline 192 \end{array}$$

198