

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$64827 : 39.$$

$$\begin{array}{r} 64827 : 9 \\ - 63 \\ \hline 18 \\ - 18 \\ \hline 027 \\ - 27 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7203 : 3 \\ - 6 \\ \hline 12 \\ - 12 \\ \hline 003 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 : 7 \\ - 21 \\ \hline 30 \\ - 28 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 : 7 \\ - 26 \\ \hline 63 \end{array}$$

$$64827 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \quad \text{или} \quad 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

$$A_1 = 3! = \text{число перестановок } 3^4 = \text{число перестановок } 7^4$$

1) на первом месте 3 : $\frac{1}{4}$.

$$A_1 = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2$$

Число перестановок $n!$

a b c

b c a

a c b

c b a

c a b

a b c d -

24 варианта

- 6 вариантов

a b -

2 варианта

по

№2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$7x = 3x + 4x$$

$$e^{i(4x+3x)} = (\cos 4x + i \sin 4x)(\cos 3x + i \sin 3x) =$$

$$= \cos 4x \cos 3x - \sin 3x \sin 4x + i(\sin 3x \cos 4x + \sin 4x \cos 3x)$$

$$\underbrace{\cos 4x \cos 3x - \sin 3x \sin 4x}_{\cos 7x} + \underbrace{\cos 3x + \sin 3x \cos 4x + \sin 4x \cos 3x - \sin 3x}_{\sqrt{2} \cos 4x} + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 3x (\cos 4x + 1 + \sin 4x) - \sin 3x (\sin 4x + 1 - \cos 4x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x (\cos 3x + \sin 2x + \sqrt{2}) + \sin 4x (\cos 3x - \sin 3x) = \sin 3x - \cos 3x$$

~~4x~~

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha ; e^{i\frac{\alpha}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta$$

$$e^{-i\frac{\beta}{2}} = \cos \frac{\beta}{2} - i \sin \frac{\beta}{2}$$

$$2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} =$$

$$= 2 \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) (\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}) =$$

$$= 2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \right. \\ \left. + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \right) = \\ = \underline{\sin \alpha - \sin \beta}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin(-\beta) = 2 \sin \frac{\alpha+(-\beta)}{2} \cos \frac{\alpha-(-\beta)}{2}$$

$$\sin 7x - \sin 3x = 2 \sin 2x \cos 5x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = \sin(\frac{\pi}{2} - 7x) + \sin(\frac{\pi}{2} - 3x)$$

$$\sin 2 - \sin \cos(90^\circ - 1) - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\alpha = 90^\circ - 2 = 3x ; 2 = 90^\circ - 3x$$

$$\cos 3x - \sin 3x = 2 \sin \frac{90^\circ - 3x - 3x}{2} \cos 45^\circ = \underline{\sqrt{2} \sin(45^\circ - 3x)}$$

$$\sin \alpha + \cos(90^\circ + \beta) = \sin \alpha - \sin \beta$$

$$90^\circ + \beta = 7x$$

$$\sin 7x + \cos 7x = 2 \sin \frac{7x - 7x + 90^\circ}{2} \cos \frac{7x + 7x - 90^\circ}{2} =$$

$$= \sqrt{2} \cos(7x - 45^\circ)$$

$$\sin(45^\circ - 3x) + \cos(7x - 45^\circ) + \cos 4x = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$BC^2 + BF^2 = 4R^2 \Rightarrow CF = 2R = 34 \quad \underline{MG}$$

$$BF = \sqrt{(34)^2 - 16^2} = \sqrt{50 \cdot 18} = 5 \cdot \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 9} = 30$$

$$\sin(\angle BCF) = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$$

~~$$AC = \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cos \varphi} = \sqrt{\frac{(BC+BF)^2}{2}}$$~~

$$AC = \frac{(BC+BF)}{\sqrt{2}} = \frac{16+30}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot 23$$

$$\begin{array}{r} + 23 \\ 23 \\ \hline 46 \\ + 96 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \sin(\frac{\pi}{2} + \angle BCF) =$$

~~$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 23 \cdot 34 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{15^2}{17^2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{15}{17} \right) =$$~~
~~$$= \frac{23 \cdot 17}{17} (\sqrt{32 \cdot 2} - 15) = 23$$~~

$$\boxed{S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 23 \cdot 34 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{15^2}{17^2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{15}{17} \right) =}$$

$$= 23 \cdot (\sqrt{64} + 15) = 23^2 = \boxed{529}$$

Ответ: ~~CF~~ CF = 34; S_{ACF} = 529.

$$\sin \alpha + \cos(\beta) = \sin \alpha - \sin \beta \quad \underline{\text{N2}}$$

$$95^\circ + \beta = 7x - 45^\circ$$

$$\sin 45^\circ - \cos 4x = 2 \sin \frac{45^\circ - 3x - (7x - 45^\circ - 95^\circ)}{2} \cos \frac{45^\circ - 3x + 7x - 45^\circ - 95^\circ}{2}$$

$$-\cos 4x = 2 \sin \frac{180^\circ - 10x}{2} \cos \frac{4x - 95^\circ}{2}$$

$$-\cos 4x = 2 \sin(90^\circ - 5x) \cos(4x - 95^\circ)$$

$$-\cos 4x = 2 \cos 5x \cos(4x - 95^\circ)$$

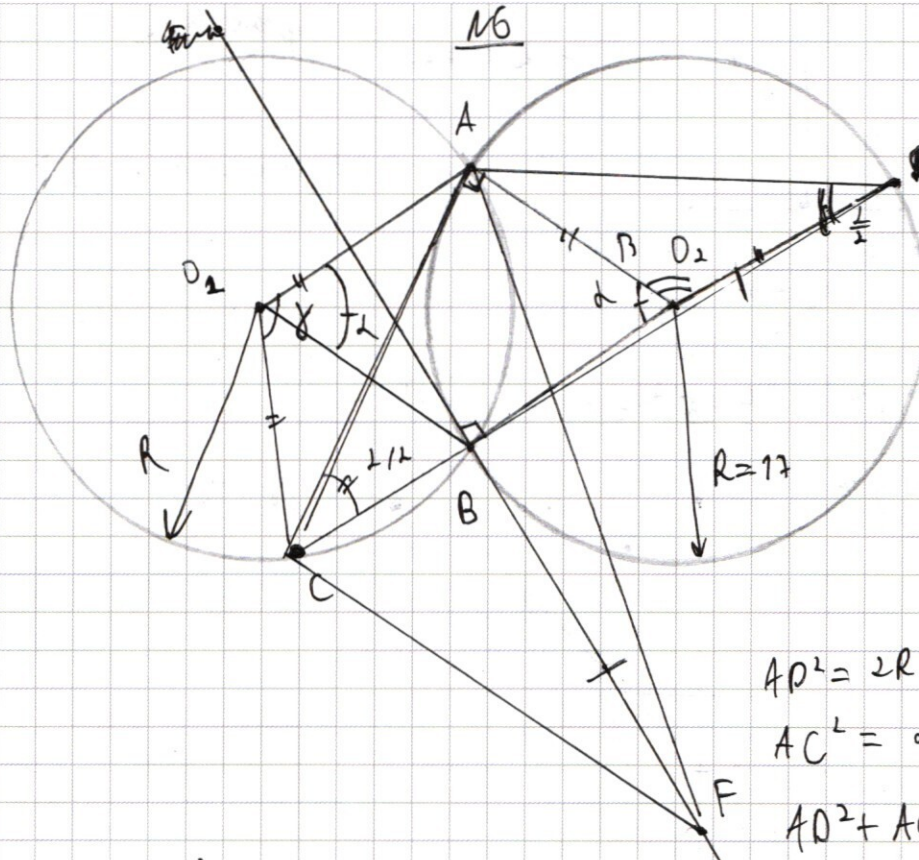
$$2(\cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x) \left(\frac{\cos 4x}{\sqrt{2}} - \frac{\sin 4x}{\sqrt{2}} \right) + \cos 4x = 0.$$

$$\sqrt{2} \left(\cos^2 4x \cos x - \sin^2 4x \cos 4x \cos x - \sin 4x \cos 4x \sin x + \right. \\ \left. + \sin^2 4x \sin x \right) + \cos 4x = 0$$

$$4x = 2\pi k;$$

$$-1 = 2 \cos(2\pi k + \frac{\pi}{2})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



CF-?

$$CF = \sqrt{BC^2 + BD^2},$$

т.к. $DB = BF$

O_1, O_2 — центры
окружностей.

$$\angle A O_2 B = \angle A O_1 B = \alpha$$

$$\angle E O_1 A = \gamma$$

$$\angle A O_2 D = \beta.$$

$$AD^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \beta$$

$$AC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \gamma$$

— по косинусам

$$AD^2 + AC^2 = (BC + BF)^2$$

$$(BC + BF)^2 = 4R^2 - 2R^2 (\cos \beta + \cos \gamma)$$

$$BC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos (\gamma - \alpha)$$

$$BF^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos (\alpha + \beta)$$

$$\angle ACB = \angle ADB = \frac{\alpha}{2} \text{ (опущены на AB)}, \quad \frac{\alpha}{2} = 45^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

ΔADC — равнобедренный $\Rightarrow AC = AD \Rightarrow \gamma = \beta.$

$$(BC + BF) = 4R^2 - 4R^2 \cos \beta$$

$$BC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos (\beta - \alpha)$$

$$BF^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos (\alpha + \beta)$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{180^\circ - \beta}{2} + \frac{90^\circ - (360^\circ - \alpha - \beta)}{2} = -\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

$$(BC + BF)^2 = 4R^2 - 4R^2 \cos \beta$$

$$BC^2 = 2R^2 - 2R^2 \sin \beta$$

$$BF^2 = 2R^2 + 2R^2 \sin \beta.$$

15

$$\begin{cases} (x+y+3) + (x-y+3) = 16 \\ (x-3)^2 + (y-15)^2 = a \end{cases}$$

$$a \geq 0.$$

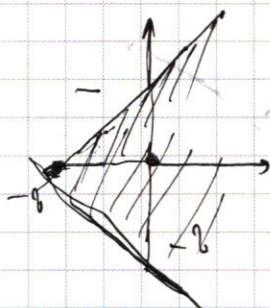
$$1) \begin{cases} x+y+3 > 0 \\ x-y+3 > 0 \end{cases}$$

$$x > -3 \dots y > -3-x.$$

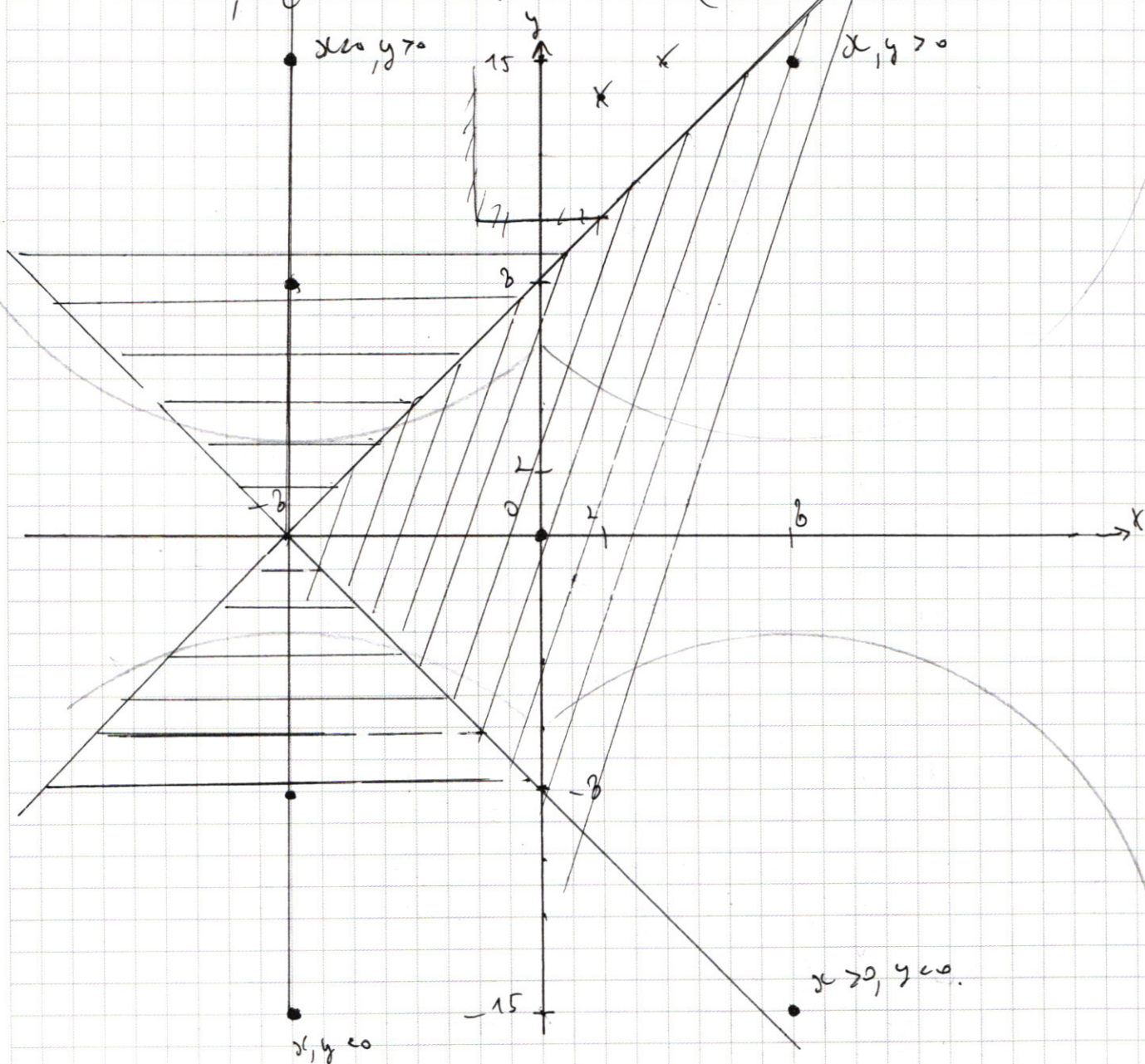
$$y < x+3$$

расчет

$x=3$ — вертикальная граница



$$x, y \geq 0; \quad (x-3)^2 + (y-15)^2 = a = (\sqrt{a})^2$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2)
$$\begin{cases} x+y+b < 0 \\ x-y+b < 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} 2x &< -16 \\ x &< -8 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{Здесь решений нет, т.к.} \\ &\text{одно неравенство примет у более высокие значения,} \\ &\text{а другое ниже. Т.е. пересечения нет.} \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} x+y+b &> 0 & 2y > 0; y > 0. \\ x-y+b &< 0 & y > -x-b. \\ y-x-b &> 0 & y > x+b. \end{aligned}$$

$$2(x+y+b) - (x-y+b) = 16$$

$$y = 8. \quad \text{— горизонтальная прямая}$$

4)
$$\begin{aligned} x+y+b &< 0 & 2y < 0; y < 0. \\ x-y+b &> 0 & y < -b-x. \\ y-x-b &< 0 & y < x+b. \end{aligned}$$

$$-x-y-b + x-y+b = 16$$

$$y = -8. \quad \text{— горизонтальная прямая.}$$

Если $|a| < 8$, то вертикальная прямая не имеет точек пересечения с правой окружностью. Но если $|a| > 15-8=7$, то мы сразу имеем 4 точки пересечения (две окружности пересекают прямую $y=\pm 8$ в 2-х точках).

Остаётся единственный вариант — касание левой

окружности прямой $y=\pm 8$. Это возможно при $a=7$.
При $|a| > 8$ верт. прямая сразу пересекает две окружности в двух точках (4 точки) при $|a| < 7$ нет. Ответ: $a=49$

№7.

$$2^x > 0 \Rightarrow y > 0.$$

$$93 + x \cdot 3^{28} - 3x > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3^{28} (x-4) > 3^x + 3x$$

$$93 + 3(3^{27} - 1)x > 3^x \Rightarrow x \geq 0$$

при $x=28$ - выполняется.

$$\downarrow x=29; \quad 93 + 3^{28} \cdot 29 - 3 \cdot 29 > 3 \cdot 3^{28} - \text{выполн.}$$

$$x = 3^x - 28 \quad \} 9, 27, 83.$$

$$\downarrow x=30; \quad 93 + 3^{28} \cdot 30 - 90 > 9 \cdot 3^{28}$$

$$\downarrow x=31; \quad 93 + 3^{28} \cdot 31 - 93 > 27 \cdot 3^{28}$$

$$\downarrow x=32; \quad 93 + 3^{28} \cdot 32 - 96 > 81 \cdot 3^{28}$$

т.е. 3^x растет быстрее, но при $x \geq 32$ неравенство уже выполняется.

$$93 + 3(3^{27} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

при $x < 0, x=0, 1, 2$

$$x=0; \quad 93 > 1 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$x=1; \quad 87 + 3^{28} > 4 \cdot 3^{28}$$

$$x=2; \quad 78 + 2 \cdot 3^{28} > 4 \cdot 3^{28}$$

$$x=3; \quad 57 + 3 \cdot 3^{28} > 4 \cdot 3^{28}$$

$$x=4; \quad -2 + 4 \cdot 3^{28} > 4 \cdot 3^{28}$$

$$x=5; \quad - \text{выполняется}$$

не выполняется

$$x \geq 5.$$

$$\downarrow x=28; \quad 93 + 28 \cdot 3^{28} - 3 \cdot 28 > 5 \cdot 3^{28} - \text{выполн.}$$

$$\downarrow x=30; \quad 93 + 30 \cdot 3^{28} - 90 > 14 \cdot 3^{28} - \text{выполняется}$$

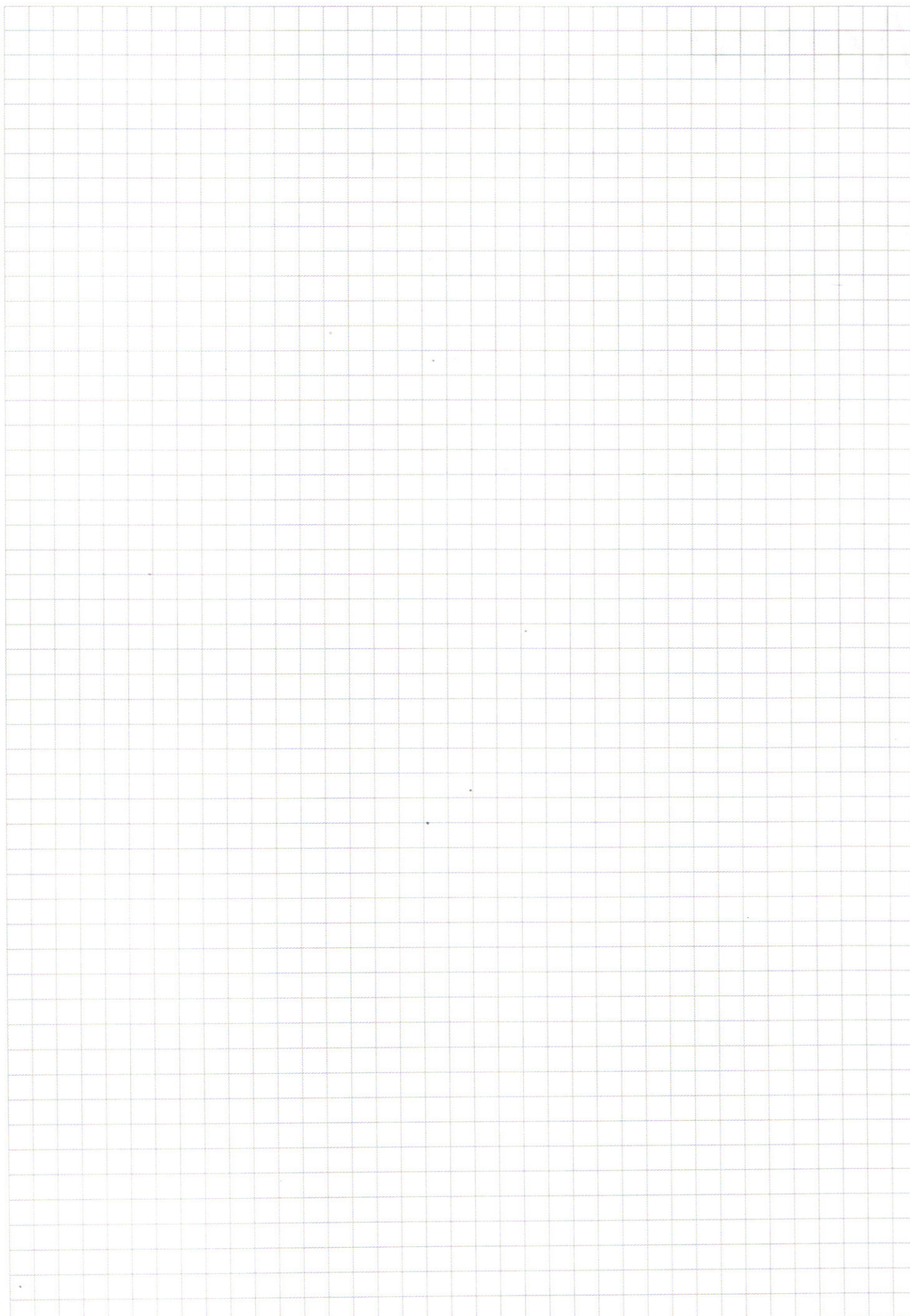
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\downarrow x=31; 93 + 31 \cdot 8^{28} - 93 > 31 \cdot 3^{28}$ — выполняется.

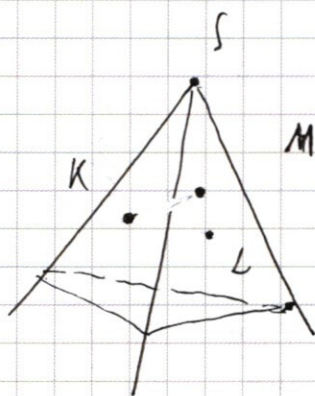
$x \in \mathbb{N}; \boxed{x = 5, 6, 7, \dots, 39, 30.}$

3^x растёт гораздо быстрее, чем $3^{28}x \Rightarrow$
далее, при $x > 31$ неравенство не выполняется.

Ответ: кол-во пар — $\boxed{26}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$SK = SL = SM$ — как
отрезки касательных.

$$\angle KSO = \angle LSO = \angle MSO$$

из равенства Δ -ов KSO, LSO и
 MSO по двум катетам
сторон. $\Rightarrow$ точки K, L, M

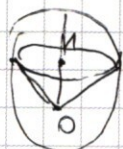
лежат в одной плоскости, $\perp SO$.

$$SK = SL = SM = \frac{g}{3} = \frac{PS^2}{PR^2} ; \quad \frac{16}{3} = \frac{PG^2}{PR^2}$$

$$\frac{PS^2}{9} = \frac{PG^2}{16} ; \quad \frac{PS}{3} = \frac{PG}{4} ; \quad PS = \frac{3}{4} PG$$

$$PG = 2R + PS ; \quad PG = 2R + \frac{3}{4} PG$$

$$\frac{1}{4} PG = 2R ; \quad PG = 8R ; \quad PS = 6R.$$



$$OK^2 = ON^2 + R^2$$

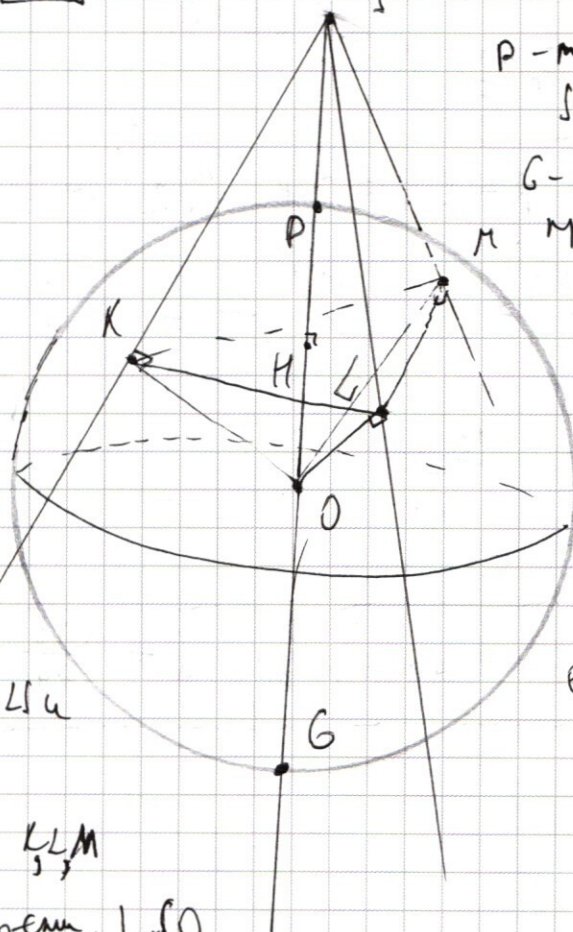
$$KS^2 + R^2 = OS^2 = (7R)^2$$

$$KS^2 = 48R^2 \Rightarrow KS = \sqrt{3} \cdot 4R$$

$$KN^2 = R^2 - ON^2 = R^2 - (PS + R - ON)^2 + KS^2$$

$$47R^2 = (7R)^2 + ON^2 - 14RON - ON^2$$

№ 4



P — т. пересечения
SO и сферы

G — т. пересечения
продолжения SO и
сферы.

SN — высота
KLM

т.к. $\angle KSO =$

$\angle LSO = \angle MSO$, то

K — центр

описанной вокруг
KLM окружности

R — радиус сферы

$$14 R \sin \alpha = 2 R$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{7} R$$

[179]

$$R \sin \alpha = \sqrt{R^2 - O H^2} = R \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = R \cdot \frac{\sqrt{3 \cdot 4}}{7}$$

$$\sin \angle KSO = \frac{R \sin \alpha}{KS} = \frac{R \sqrt{3 \cdot 4}}{7 \cdot \sqrt{3 \cdot 4} R} = \frac{1}{7}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$$

$$PH = PS + R - OH = 7R - \frac{1}{7}R = \frac{48}{7}R$$

$$\int = \frac{g R H^2}{P S^2} = \frac{9 \cdot (48)^2}{72 \cdot 6^2} = \frac{9 \cdot 22 \cdot 6^2}{72 \cdot 6^2} = \frac{9 \cdot 64}{49} = \boxed{\frac{576}{49}}$$

$$\int = \frac{16 \cdot 48^2}{72 \cdot 8^2} = \frac{16 \cdot 6^2}{7^2}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 36 \\ \hline 96 \\ + 480 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 9 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\text{Answer: } \angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}; \quad \int = \frac{576}{49}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} & \underline{N3} \quad y < 0, x > 0. \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

$$(y+x)^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(y+x)^2 - (4x^2 + 8x + 1 - 1 - 8x) + 12x + 4y = 0$$

$$(y+x)^2 - (2x+1)^2 + 20x + 4y + 1 = 0.$$

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln x} \cdot x^{2\ln y^2} = x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln y}$$

$$\frac{\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)}}{(x^4)^{\ln y}} = x^{2\ln x}$$

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln x}$$

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} \cdot x^{2\ln(-y)} = x^{2\ln x}$$

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = \frac{x^{2\ln x}}{x^{2\ln(-y)}} = (x^2)^{\ln x - \ln(-y)}$$

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = (x^2)^{\ln\left(\frac{-x^2}{y}\right)} = (x^2)^{\ln\left(\frac{y}{-x^2}\right)}$$

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right) = (x^2)^{\ln\frac{-y}{x} - \frac{1}{\ln(-y)}} = (x^2)^{\ln\frac{-y}{x} \cdot \ln\frac{-1}{y}}$$

$$\boxed{-\frac{x^2}{y}} = x^{-2\ln\frac{1}{x}} = x^{2\ln x}$$

$$-\frac{1}{y} = x^{2\ln x - 2}; y = -x^{1-2\ln x}$$

$$y = -x^{\ln e - \ln x^2} = -x^{\ln \frac{e}{x^2}}$$

$$\frac{x^2}{x^{4\ln x}} + \frac{2x \cdot (-x)}{x^{2\ln x}} - 3x^2 + 12x - \frac{4x}{x^{2\ln x}} = 0$$

$$x^2 \left(\frac{1}{x^{4\ln x}} - \frac{2}{x^{2\ln x}} - 3 \right) + 4x \left(3 - \frac{1}{x^{2\ln x}} \right) = 0$$

$$1 + \frac{2x}{y} - 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 12 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}$$

$$y = \frac{-x}{x^{2\ln x}}$$

$$\ln x = \frac{\log_x x^x}{\log_x e} = \frac{1}{\log_x e}$$

$$y = -\frac{x}{x^{\frac{1}{\log_x e}}} = -x^{1 - \frac{2}{\log_x e}} = -x^{\frac{\log_x e - 2}{\log_x e}}$$

$$\frac{x^2}{x^{4\ln x}} - \frac{2x^2}{x^{2\ln x}} - 3x^2 + 12x - \frac{4x}{x^{2\ln x}} = 0$$

$$3(x-4) = x \left(\frac{x}{x^{4\ln x}} - \frac{2x}{x^{2\ln x}} - \frac{4}{x^{2\ln x}} \right)$$

$$3(x-4)x^{4\ln x} = x^2 - 2x^2 x^{2\ln x} - 4x x^{2\ln x}$$

$$3 \cdot x^{1+4\ln x} - 12x^{4\ln x} = x^2 - 2x^{2+2\ln x} - 4x^{1+2\ln x}$$