МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФІ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $64827 = 3^3 \cdot 7^4$.

Есть 2 способа. ① – $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1$

② – $9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$.

При 1 способе мы можем составить числа

$$\frac{8!}{3! \cdot 4!}$$

При 2 способе мы можем составить числа

$$\frac{8!}{4! \cdot 2!}$$

$$\frac{8!}{3! 4!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cancel{1}} + \frac{8 \cdot 7 \cdot \overset{3}{\cancel{6}} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot 1} =$$

$8 \cdot 7 \cdot 5 (1+3) = 280 \cdot 4 = 1120$

Ответ: 1120 способами.

2. $\cos 7x + \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$\cos 7x + \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} (\cos(4x + \frac{\pi}{2})) = 0$

$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cdot (2 \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$

$\cancel{2\sqrt{2}} \cancel{2} \cancel{\sqrt{2}} \cos 5x (\sin(2x + \frac{\pi}{4})) + \cancel{2\sqrt{2}} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$

$\sin(2x + \frac{\pi}{4})(\cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$

$\sin(2x + \frac{\pi}{4})(2 \cdot \cos \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{3x \mp \frac{\pi}{4}}{2}) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \cancel{\sin} \cos(\frac{3}{2}x \mp \frac{\pi}{8}) = 0 \\ \cos(\frac{7}{2}x + \frac{\pi}{8}) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{5}{12}\pi + \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi l}{3} \end{array}\right., \text{ где } n, k, l \in \mathbb{Z}$$

3. $$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} & (1) \\ y^2+2xy-3x^2+12x-14y=0 & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0 \\ y<0 \end{cases}$$

(1) $$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$\Downarrow$$

$$x^{7\ln(-y)-2\ln(x(-y^2))} = (-y)^{\ln(-y)}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln x\,(7\ln(-y)-2\ln(x)-4\ln(-y)) = \ln(-y)\ln(-y)$$

$$\Downarrow$$

$$2\ln^2 x - 3\ln(x)\cdot\ln(-y) + \ln^2(-y) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\ln x - \ln(-y) = 0 \\ \ln x - \ln(-y) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -y \\ x^2 = -y \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -x \\ y = -x^2 \end{array}\right.$$

(2) $$y^2+2xy-3x^2+\underbrace{12x+4y}_{4(3x+y)}=0$$

$$\Downarrow$$

$$(3x+y)^2-4x(3x+y)+4(3x+y)=0$$

$$\Downarrow$$

$$(3x+y)(y-x+4)=0$$

$y=-x$.

$$\Downarrow$$

$$(3x-x)(\cancel{y}+\cancel{y}-2x+4)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \quad \text{- п.к.} \\ x=2 \end{array}\right.$$

$y=-x^2$

$$(3x-x^2)(-x^2-x+4)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \quad \text{- п.к.} \\ x=3 \\ x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$

$x^2+x-4=0$

$D=1+16=17$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

$\frac{-1-\sqrt{17}}{2}<0$

$$-\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 = -\left(\frac{\cancel{1+2\sqrt{17}}\,1-2\sqrt{17}+17}{4}\right) \Rightarrow -\left(\frac{18}{4}-\frac{2\sqrt{17}}{4}\right) =$$

$$\frac{\sqrt{17}-9}{2}$$

Ответ: $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=-9 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{17}-9}{2} \end{cases}$

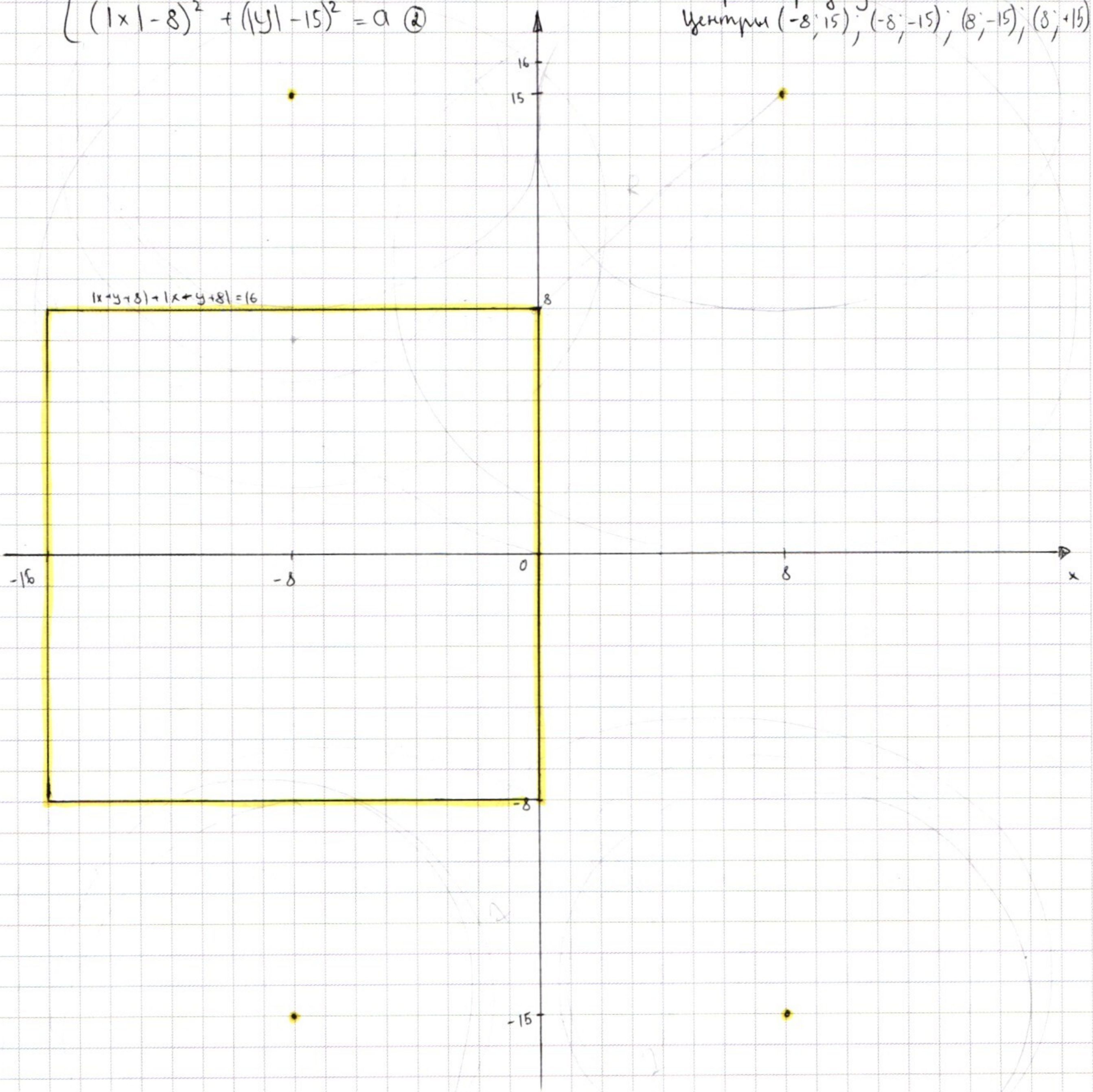
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

— график.

5. $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \quad ② \end{cases}$

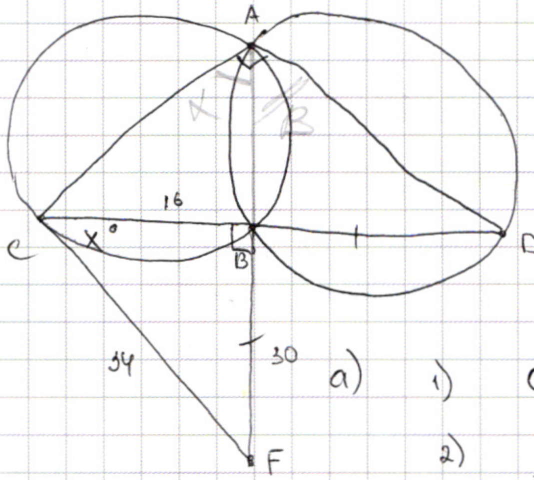
② – ~~Для~~ График представляет 4окр. с радиусом $\sqrt{a}$
Центры $(-8;15)$; $(-8;-15)$; $(8;-15)$; $(8;+15)$



При $a<49$ – нет решения
При $a=49$ – 2 решении
При $49<a \leq 98$ – 4 решения
При $a>98$ – 8 реш.

Ответ: При $a = 49$ - 2 решение.

6.



Дано:

$\angle CAD = 90°$

$r = 17$

$BF = BD$

б) $BC = 16$

Найти:

а) CF

б) S_{ACF}

Решение.

а) 1) $CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2$

2) $\frac{CB}{\sin\alpha} = 2 \cdot 17 \Rightarrow CB = 34\sin\alpha$

$\frac{BD}{\sin\beta} = 2 \cdot 17 \Rightarrow BD = 34\sin\beta \Rightarrow$

$34\sin(90-\alpha) = 34\cos\alpha$.

$\Downarrow$

$\cancel{CF^2 = 34^2\sin^2\alpha +}$ $CF = \sqrt{34^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} =$

$CF = 34$.

б) 1) Равные окр. высек. равные дуги $\Rightarrow$ ($\angle ACB = \angle ADB$), но $\angle ACB + \angle CDA = 90 \Rightarrow \angle ACB = \angle CDA = 45°$

2) $BF^2 = CF^2 - CB^2 = 34^2 - 16^2 = \underbrace{(34-16)}_{18}\underbrace{(34+16)}_{50} = 900 \Rightarrow BF = 30$

3) $AC = CD \cdot \sin 45 = (CB + BD) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\overset{23}{\cancel{(30+16)}}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 23\sqrt{2}$

4) $S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin(45° + x) = \frac{1}{\cancel{2}} 23\sqrt{2} \cdot \overset{17}{\cancel{34}} \cdot (\sin 45 \cdot \cos x + \sin x \cos 45) =$

$391\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{16}{34} + \frac{30}{34}\right)\right) = \frac{391 \cdot \cancel{\sqrt{2}} \cdot \cancel{\sqrt{2}} \cdot 46}{\cancel{2} \quad 34} = 592$.

Ответ: а) $34 = CF$

б) $S_{ACF} = 592$.

7. $\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \le 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$

$93 + 3(3^{27} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

$3^x + 4 \cdot 3^{28} - 93 - 3(3^{27} - 1)x < 0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $x = 4$.

$$3^4 + 4\cdot 3^{28} - 93 - \cancel{3^{28}}\cdot 4 + 12 = 81 + 12 - 93 = 0.$$

$$x \in (4; 93)$$

Кол. y при зад x.

$$93 + 3^{28} - 3x - 3^x - 4\cdot 3^{28}$$

Всего пар x, y

$$\sum_{x=4}^{93} (93 + 3^{28} - 3x - 3^x - 4\cdot 3^{28}) = (93 - 4\cdot 3^{28})(93-4) +$$

$$\sum_{x=4}^{93} (3^{28} - 3x) + \sum_{x=4}^{93} 3^x = (93 - 4\cdot 3^{28})\cdot 89 + \frac{(3^{28}-3)(93-4)(93-4+3)}{2} -$$

$$- 3^4 \cdot \frac{3^{28} - 3}{3-1} = 93\cdot 89 - 4\cdot 3^{28}\cdot 89 + (3^{26} - 3)\cdot 91\cdot 46 - \frac{81\cdot(3^{28}-3)}{2} =$$

$$93\cdot 89 + 91\cdot 3\cdot 46 - 81\cdot 3 : 2 + 3^{28}\left(91\cdot 46 - 4\cdot 89 - \frac{81}{2}\right) =$$

$$20713{,}5 + 3^{28}\cdot 3789{,}5$$

Ответ: $20713{,}5 + 3^{28}\cdot 3789{,}5$.

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

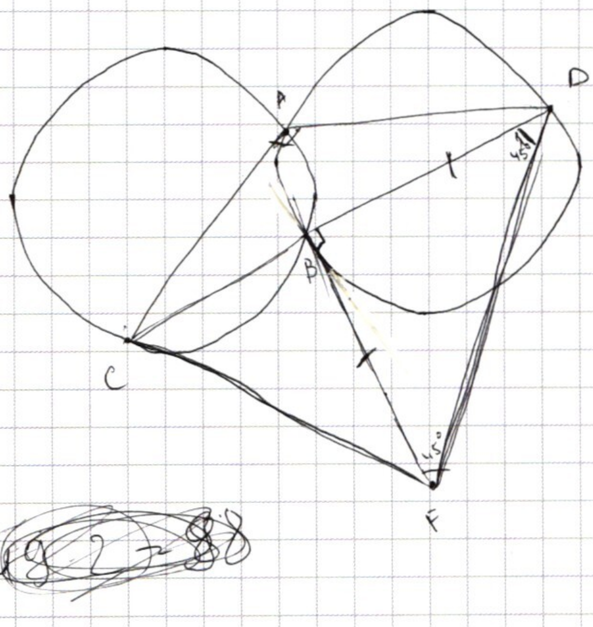
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 9 \end{cases}$$

$|a| + |b|$



$CF^2 = BF^2$

$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

$y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)$

$\times \frac{17}{31}$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 23 \\ \hline 51 \\ 34\ \ \\ \hline 391 \end{array}$$

~~$\sqrt{8} \cdot 2 = 88$~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1) $64827 = 3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7$

$21609 \mid 3$

$7203 \mid 7$

$2401 \mid 7$

$343 \mid 7$

$49 \mid 7$

$$\frac{8!}{3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot2}$$

$\cos 4x = \cos(7x-1)$

$$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot2} = 280$$

2) $\cos 7x + \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\sin(7x+\frac{\pi}{4}) + \sin(3x-\frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos\frac{7x+3x}{2}\cos\frac{4x}{2} + 2\sin\frac{4x}{2}\cos\frac{10x}{2} + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x\cos 2x + 2\sin 2x\cos 5x + \sqrt{2}\cdot(2\cos^2 2x - 1) = 0$

$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\cancel{\sqrt{2}}\cdot 2\cos 5x\sqrt{2}\cos(2x+\frac{\pi}{4}) + \cancel{\sqrt{2}}\cos 4x = 0$

3) $-y>0 \Rightarrow y<0$

$xy^2>0 \Rightarrow x\geq 0$

$$\begin{cases}\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \quad (2)\\ y^2+2xy-3x^2+\underbrace{12x+4y}_{4(3x+y)}=0 \quad (1)\end{cases}$$

$\Rightarrow (3x+y)^2 - 4x(3x+y) + 4(3x+y) = 0$

$(3x+y)(3x+y-4x+4)=0$

$(3x+y)(y-x+4)=0$

$(3x+y)^2 = 9x^2+6xy+y^2$

$y^2+2xy-3x^2$

$\Rightarrow 4xy - 12x^2$

$x = -\frac{y}{3}$

$y=$

$$\begin{cases} y=-3x & y=3x \\ y=x-4. & y=x-4\end{cases}$$

$y=x-4$

$\cancel{\left(-\frac{x^7}{x-4}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln}}$

$y^{\ln(-y)}$

$y=-3x$

$\cancel{\left(-\frac{x^7}{-3x}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}}$

$\cancel{\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}}$

$\frac{(-x^7)^{\ln(-y)}}{y^{\ln(-y)}} = x^{2\ln(xy^2)} \Rightarrow (-x^7)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}\cdot y^{\ln(-y)}$

$(-x^7)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}\cdot(-3x)^{\ln(3x)}$

$3x^{7\ln(-x^4)} = 9x^3{}^{2\ln x} \quad 3x$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} & (1) \\ (3x+y)(y-x+4)=0 & (2) \end{cases}$$

$y \le 0$
$x > 0$

(1) $x^{7\ln(-y) - 2\ln(x(-y)^2)} = (-y)^{\ln(-y)}$

$\ln x\,(7\ln(-y) - 2\ln(x) - 4\ln(-y)) = \ln(-y)\ln(-y)$

$2\ln^2 x - 3\ln(x)\cdot\ln(-y) + \ln^2(-y) = 0$

$$\left[\begin{aligned} &2\ln x - \ln(-y) = 0 \\ &\ln x - \ln(-y) = 0 \end{aligned}\right.$$

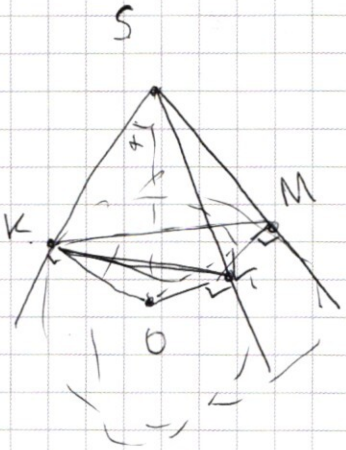
$$\left[\begin{aligned} &x = 2 \\ &y = 2 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &x = -y \\ &x^2 = -y \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &y = -x \\ &y = -x^2. \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &3 \\ &-\cancel{8} \end{aligned}\right.$$

$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$

$y = -\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\overset{\cos}{}(7x - 3x) = 0$$

$$\sqrt{2}\cos 7x \cos 3x + \sqrt{2}\sin 7x \sin 3x = 0$$

$$(\sin 7x - \sin 3x)^2 = \sin 7x^2 - 2\sin 7x \sin 3x + \sin^2 3x = $$

$$(\cos 7x + \cos 3x)^2 = \cos 7x^2 + 2\cos 7x \cos 3x + \cos^2 3x = 0$$

$$(\sin 7x - \sin 3x)^2 + (\cos 7x + \cos 3x)^2 = 1 + 1 + 2(\cos x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x) = 0$$

$$(\sin 7x - \sin 3x)^2 + (\cos 7x + \cos 3x)^2 - 2 = 2\cos 7x \cos 3x - 2\sin 7 \sin 3x = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cdot\cos(7x - 3x) = 0$$

$$(\cos 7x + \cos 3x) + (\sin 7x - \sin 3x) + \sqrt{2}(\cos 7 \cos 3 + \sin 7x \sin 3x) = 0$$

$$\cos^2 7x + \cos^2 3x + 2\cos 3x \cos 7x - \sin^2 7x - \sin^2 3x + 2\cos \sin 7x \sin 3x =$$

$$\cos 14x + \cos 6x + 2(\cos 3x \cos 7x + \sin 7x \sin 3x)$$

$$(\cos 7x + \cos 3x)^2 - (\sin 7x - \sin 3x)^2 =$$

$$(\cos 7x + \cos 3x - \sin 7x + \sin 3x)(\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x) =$$

$$3^x + 4\cdot 3^{28} > 93 + 3(3^{27} - 1)x.$$

$$\sqrt{2}\cos 4x = +\sqrt{2}\left(\sin 4x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}\sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt{2}\cos 5x\left(\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cdot\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right.$$

$$\cos 5x\left(\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\left(\cos 5x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right)\right) = 0$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\sin\frac{5x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{5x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \quad \cos = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n.$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{4\pi}{8} + \pi n + \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{3}{8}\frac{\pi\cdot 2}{3} + \frac{\pi n\cdot 2}{3}$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \pi n$$

$$x = \frac{\pi n - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi n}{8} \qquad x = \frac{5\pi\cdot 2}{8\cdot 3} + \frac{\pi n\, 2}{3}$$

$$\frac{7}{2}x = \frac{4\pi}{8} - \frac{\pi}{8}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)