

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y < 93 + 3 \cdot (3^{28} - 1)x \end{cases}$$

1) $f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{28}$ — показательная функция

• График — экспоненцика

• $D(f) = \mathbb{R}$; $E(f) = (4 \cdot 3^{28}; +\infty)$

$y = 4 \cdot 3^{28}$ — асимптота

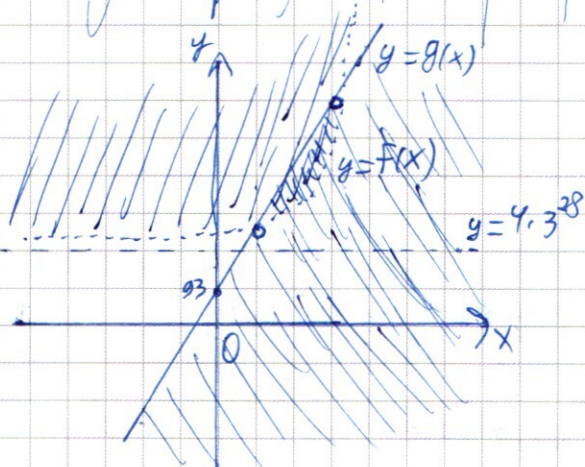
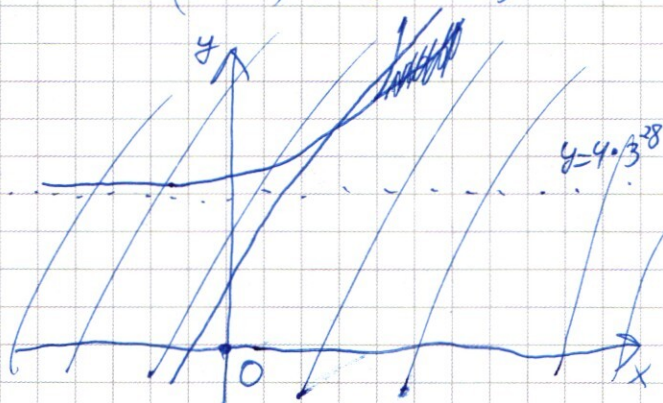
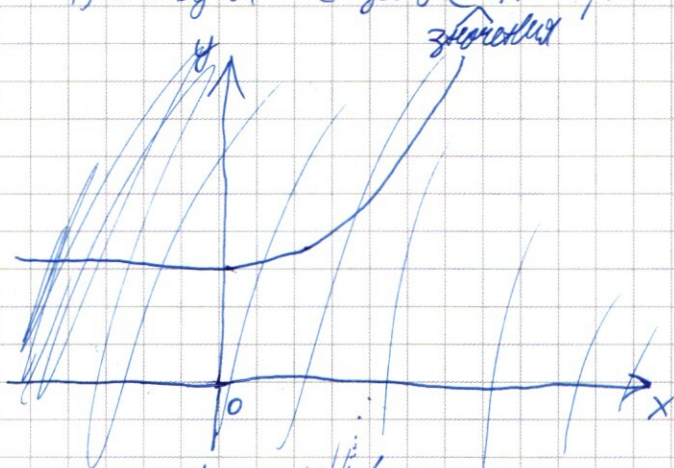
2) $g(x) = 93 + 3 \cdot (3^{28} - 1)x$

Линейная функция, график — прямая, угол наклона к оси Ox — острый.
($k > 0$; $3 \cdot (3^{28} - 1) > 0$)

Прямая проходит через точку $(0; 93)$

3) $y \in (3^x + 4 \cdot 3^{28}; 93 + 3 \cdot (3^{28} - 1)x]$

4) Найдите все целые x , когда $93 + 3 \cdot (3^{28} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$.



5) Возьмем точку $(0; 0)$

• $0 > f(0) = 3^0 + 4 \cdot 3^{28}$ (неверно)

• $0 \leq g(0) = 93 + 3 \cdot (3^{28} - 1) \cdot 0 = 93$ (верно)

• Если система имеет решение, то прямая $g(x)$ касается экспоненты $f(x)$ в точке с целыми координатами или

проходит через 2 точки экспоненты
и все ~~возможные~~ находимые между графиками $f(x)$ и $g(x)$, у которых
лежат в интервале между точками пересечения, абсциссы, подпадают.

Задача 4. 6) ~~Найти~~ найти точки пересечения:

$$f(x) = g(x); \quad 3^x + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3(3^{24} - 1)x$$

$$\text{Если } x=4, \text{ то } 3^4 + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3 \cdot (3^{24} - 1) \cdot 4$$

$$81 + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 4 \cdot 3^{28} - 12$$

$$4 \cdot 3^{28} - 4 \cdot 3^{28} = 93 - 12 - 81$$

функции $f(x)$ и $g(x)$

$0 = 0$ (верно)

т.е. графики пересекаются в точке с абсциссой 4.

$$\text{Если } x=31, \text{ то } 3^{31} + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3 \cdot (3^{24} - 1) \cdot 31$$

$$3^3 \cdot 3^{28} + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 31 \cdot 3^{28} - 93$$

$$27 \cdot 3^{28} + 4 \cdot 3^{28} = 31 \cdot 3^{28}$$

$$31 \cdot 3^{28} = 31 \cdot 3^{28} \text{ (верно)}$$

т.е. графики функций $g(x)$ и $f(x)$ пересекаются в точке с абсциссой 31.

• т.к. $g(x)$ — линейная функция, график — прямая

$f(x)$ — показательная функция, график — экспонента (функция —

выпуклая), то эти графики могут иметь не более 2 точек пересечения.

т.е. $x \in (4; 31)$, а $y \in (3^x + 4 \cdot 3^{28}; 93 + 3(3^{24} - 1)x]$. $\begin{cases} x \in (4; 31) \Rightarrow \\ x \in [5; 30] \end{cases}$

7) Пусть $K(x)$ — это кол-во допустимых значений y при каком-нибудь x .

$$K(x) = 93 + 3(3^{24} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{28} = 93 - 3^x + 3^{28} \cdot x - 3x - 4 \cdot 3^{28} = \\ = 93 - 3x - 3^x + (x-4) \cdot 3^{28}$$

8) найдем кол-во пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих неравенству.

$$K(5) + K(6) + \dots + K(29) + K(30) = 26 \cdot 93 - 3(5+6+\dots+30) - (3^5 + 3^6 + \dots + 3^{30}) + 3^{28}(1+2+\dots+26)$$

$$\bullet 5+6+\dots+30 = \frac{5+30}{2} \cdot 26 = 35 \cdot 13 = 455 \quad \left(\begin{array}{l} \text{сумма ариф. прогрессии, где} \\ a_1=5; d=1; n=26 \\ a_{26}=30 \end{array} \right)$$

$$\bullet 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{30} = \frac{3^5(3^{26} - 1)}{3 - 1} = \frac{3^5(3^{26} - 1)}{2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{сумма геом. прогрессии, где } b_1=3^5; \\ q=3; n=26 \end{array} \right)$$

$$\bullet 1+2+\dots+26 = \frac{1+26}{2} \cdot 26 = 27 \cdot 13 = 351 \quad \left(\begin{array}{l} \text{сумма ариф. прогрессии, где } c_1=1 \\ d=1; n=26; c_{26}=26 \end{array} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7 (Продолжение).

$$\begin{aligned} \text{Получим: } K(5) + K(6) + \dots + K(30) &= 186 \cdot 13 - 3 \cdot 13 \cdot 35 - \frac{3^{31} - 3^5}{2} + 3^{28} \cdot 13 \cdot 27 = \\ &= 39 \cdot (62 - 35) + \frac{243}{2} - \frac{3^{31} - 3^5}{2} + 3^{28} \cdot 13 \cdot 3 = 27 \cdot 39 + \frac{27 \cdot 9}{2} + 3^{31} \cdot \\ &\cdot \left(13 - \frac{1}{2}\right) = 12,5 \cdot 3^{31} + 81 \cdot (13 + 1,5) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 3^{31} + \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 81 \cdot \frac{3^4}{2} \cdot \frac{27}{2} + \\ &+ 2581 = 12,5 \cdot 3^{31} + 14,5 \cdot 81 = 12,5 \cdot 3^{31} + 1174,5 \end{aligned}$$

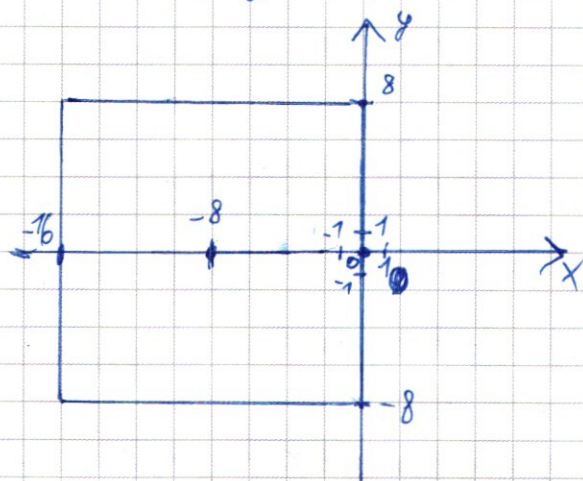
Ответ: $12,5 \cdot 3^{31} + 1174,5$

Задача 5.

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16. (2) \\ (x-8)^2 + (y-15)^2 = a. (1) \end{cases}$$

$$(2) \quad |x+y+8| + |x-y+8| = 16.$$

График ломаная линия,
а именно квадрат со сторонами
параллельными осям координат,
с центром в точке $(-8; 0)$ и
стороной квадрата равной 16.



$$1) (1) \quad (x-8)^2 + (y-15)^2 = a$$

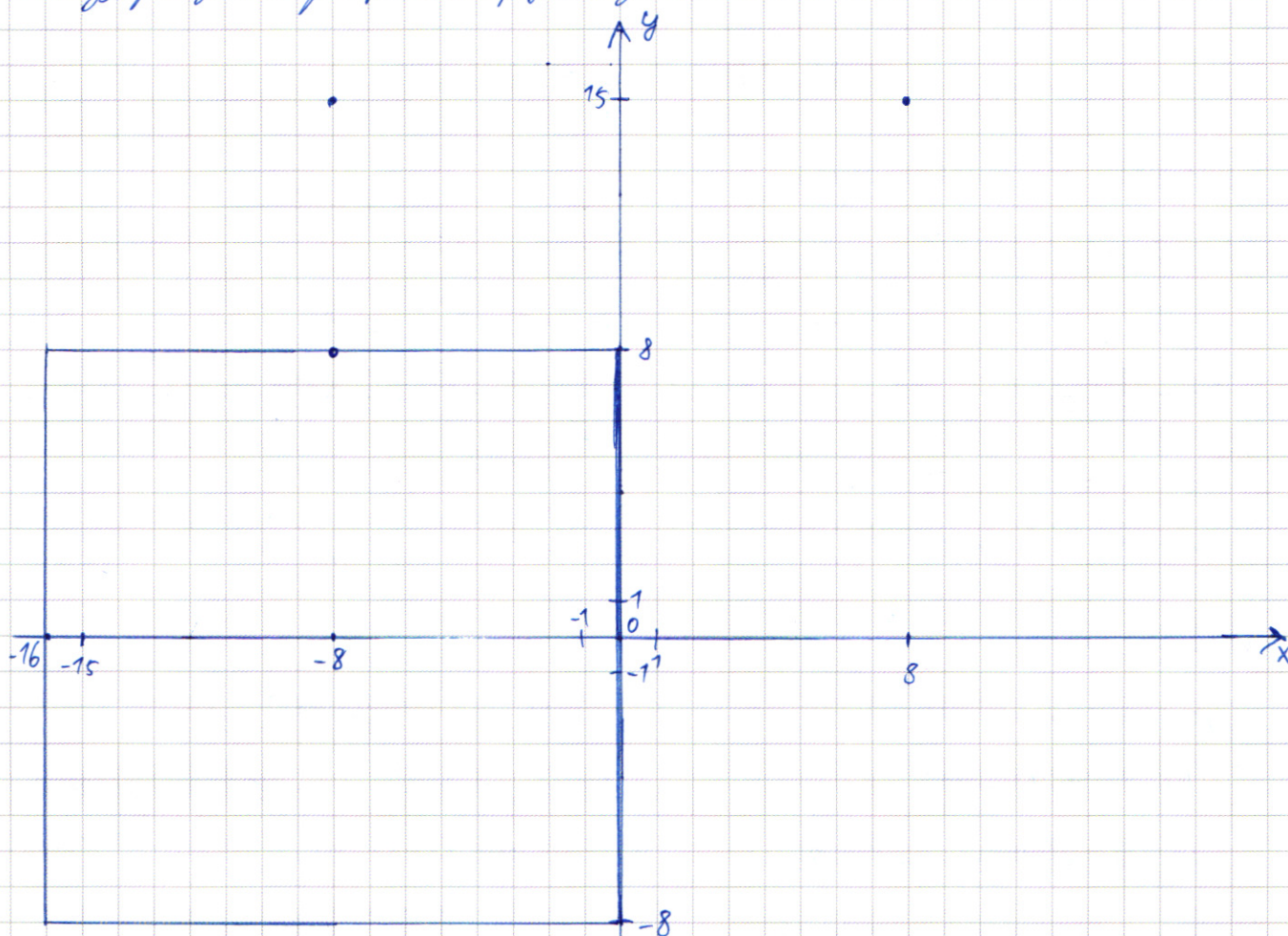
График получен при помощи уравнения
эллипса $(x-8)^2 + (y-15)^2 = a$ (3), когда
симметрично относительно оси Ox , где
вершина выше оси Ox сокращается и от-
ражается ниже оси Ox , и симметрично
относительно оси Oy , где часть пра-
вое оси Oy сокращается и отражается
влево оси Oy .

$$(3) \quad (x-8)^2 + (y-15)^2 = a$$

кр-ие окружности с центром в
точке $(8; 15)$ и радиусом a .
• если $a < 0$, то (3), а значит и (1) задано
нужное множество. У системы нет
решений.
• если $a = 0$, то (3) и (1) — это всего лишь
одна точка $(8; 15)$. Также. кол-во
решений системы — только одно.
• значит $a > 0$.

Задача 5 (Продолжение)

Изобразим графики функций (1) и (2).



• Проверка для $a=0$; если $a=0$, то $\frac{(x-8)^2}{20} + \frac{(y-15)^2}{20} = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x|=8 \\ |y|=15 \end{cases} \Rightarrow$
 есть четыре точки $(8; 15), (-8; 15), (8; -15), (-8; -15)$

Заметим что если есть решение при $y=y_0$, то всегда $y=-y_0$ также подойдет:

$$\begin{cases} |x-y_0+8|+|x+y_0+8|=16 \\ (|x_0|-8)^2+(1-y_0-15)^2=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x_0+y_0+8|+|x_0-y_0+8|=16 \\ (|x_0|-8)^2+(|y_0|-15)^2=a \end{cases}$$

П. е. графики функции (1) и (2) симметричны относительно оси Ox .

А также если есть решение $(x; y)$ автоматически есть решение $(x; -y)$. Следовательно, если $y \neq 0$, то $x=0$ $(0; y)$ и $(0; -y)$.

если $y=0$, то x принимает только 2 различных значения. $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5 (Параметрическая)

В критических случаях система будет иметь не два решения.

1) Пусть $y \neq 0; x = 0$, тогда
$$\begin{cases} |y+8| + |8-y| = 16 & (a) \\ 8^2 + (|y|-15)^2 = a & (b) \end{cases}$$

(a) $|y+8| + |8-y| = 16$

Если подумай $y=8; y=-8$ $\begin{matrix} - & + & + & - \\ -8 & & 8 & \end{matrix} \rightarrow y$

Если $y < -8$, то $-y-8+8-y=16 \Rightarrow y=-8$ (не подходит)

Если $y > 8$, то $y+8-8+y=16 \Rightarrow y=8$ (не подходит)

Если $y \in [-8; 8]$, то $y+8+8-y=16 \Rightarrow 0y=0 \Rightarrow y$ - любое число.

(учтем $y \in [-8; 8]$ найдем $y \in [-8; 8]$).

Итого: $y \in [-8; 8]$

(b) $64 + (|y|-15)^2 = a$

$(|y|-15)^2 = a - 64$

$\begin{cases} |y|-15 = \pm \sqrt{a-64} \\ a-64 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} |y| = \pm \sqrt{a-64} + 15 \\ a \in (-\infty; -8] \cup [8; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |y| = \pm \sqrt{a-64} + 15 \\ a \geq 8 \end{cases}$

П.к. $-8 \leq y \leq 8$, то $0 \leq |y| \leq 8 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{a-64} + 15 \leq 8$ или $0 \leq 15 - \sqrt{a-64} \leq 8$

П.к. $y \neq 0$

Реверсив. Значит
нет.

$-15 \leq -\sqrt{a-64} \leq -7$

$7 \leq \sqrt{a-64} \leq 15$

$49 \leq a-64 \leq 225$

$113 \leq a \leq 289$

$a \in [113; 289]$

2) Пусть $y=0$, тогда
$$\begin{cases} |x+8| + |x-8| = 16 & (1) \\ (x-8)^2 + 225 = a & (2) \end{cases}$$

(1) $|x+8| = 8$

$\begin{cases} x+8=8 \\ x+8=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-16 \end{cases}$

$|x-8| = 8$ (6)

$\begin{cases} (x-8)^2 + 225 = a & (2) \\ \begin{cases} x=0 \\ x=-16 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-8)^2 + 225 = a \end{cases}$

Получили два разных x . Если оба x являются решением ур-ня (2) при одном и том же a , то такой вариант подходит

Задача 5 (Логарифмическая)

или $x=0$, но $(0-8)^2 + 225 = a \Rightarrow a = 225 + 64 = 289$

или $x=-16$, но $(16-8)^2 + 225 = a \Rightarrow a = 225 + 64 = 289$ (верно) $\Rightarrow a=289$ возможно.

Получили из п.1 и п.2: $a \in [113; 289) \cup \{289\}$
 $a \in [113; 289]$

Ответ: $[113; 289]$.

Задача 3.

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \cdot \ln(xy^2)} & (1) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

(1) $\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \cdot \ln(xy^2)}$

~~Решим~~ $\begin{cases} -y > 0 \\ y \neq 0 \\ xy^2 > 0 \\ -\frac{x^7}{y} > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \text{ (и } xy^2 > 0) \\ \frac{x^7}{-y} > 0 \text{ } (-y > 0) \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \\ x^7 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$

заменим
несколько
необходимых
условий

Пусть $-y=t$, $t > 0$, тогда $\left(\frac{x^7}{t}\right)^{\ln t} = x^{2 \cdot \ln(xt^2)}$

$$\frac{x^{7 \ln t}}{t^{\ln t}} = x^{2 \cdot \ln(xt^2)} \quad | \cdot t^{\ln t} ; \begin{cases} t^{\ln t} \neq 0 \\ t^{\ln t} > 0 \end{cases}$$

$$x^{7 \ln t} = x^{2 \cdot \ln(x) + 2 \ln t^2} \cdot t^{\ln t}$$

$$x^{7 \ln t} = x^{2 \ln x + 4 \ln t} \cdot x^2 \cdot t^{\ln t}$$

$$x^{3 \ln t} = x^{2 \ln x} \cdot t^{\ln t}$$

$$\ln x^{3 \ln t} = \ln(x^{2 \ln x} \cdot t^{\ln t})$$

$$3 \ln t \cdot \ln x = 2 \ln x \cdot \ln x + \ln t \cdot \ln t$$

$$2 \ln^2 x - 2 \ln x \cdot \ln t - \ln x \cdot \ln t + \ln^2 t = 0$$

$$2 \ln x (\ln x - \ln t) - \ln t (\ln x - \ln t) = 0$$

$$(\ln x - \ln t)(2 \ln x - \ln t) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Получим:
$$\begin{cases} |u(x) - u(t)| = 0 \\ 2|u(x) - u(t)| = 0 \end{cases}$$

Задача 3
(продолжение)

$$\begin{cases} |u(x) - u(t)| = 0 \\ |u(x^2) - u(t)| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ x^2 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ y = -x^2 \end{cases}$$

~~или $y = -x$~~

$$\begin{cases} y = -x \\ y = -x^2 \end{cases}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

если $y = -x$, то $x^2 - 2x^2 - 3x^2 + 12x - 8x = 0$

$$-4x^2 + 4x = 0$$

$$4x(1-x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad 1-x = 0$$

(не подходит) $x = 1$.

Следовательно $y = -1$ (подходит)

если $y = -x^2$, то $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 12x = 0$

$$x(x^3 - 2x^2 - 7x + 12) = 0$$

$$x = 0$$

(не подходит)

$$\text{или } x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 4x + 12 = 0$$

$$x^2(x-3) + x(x-3) - 4(x-3) = 0$$

$$(x-3)(x^2 + x - 4) = 0$$

$$x = 3 \quad \text{или} \quad x^2 + x - 4 = 0$$

Следовательно

$$D = 1 + 16 = 17, \text{ что } > 0$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \quad (\text{не подходит})$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} > 0$$

Следовательно $y = -x^2 = -\frac{(\sqrt{17}-1)^2}{4} =$

$$= -\frac{(17 - 2\sqrt{17} + 1)}{4} = -\frac{9 - \sqrt{17}}{2} \quad (\text{подходит})$$

Примечание:

$$(-1; -1); (3; -9)$$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17} - 9}{2}\right)$$

Ответ: $(-1; -1); (3; -9)$

$$\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{\sqrt{17}-9}{2}\right)$$

Задача 1.

$$1) 64827 = 27 \cdot 2401 = 3^3 \cdot 7^2 = 3^3 \cdot 7^4$$

П.к. цифр 8, то 8-ми множителей будет "1"

Есть 2 варианта: I) три "3", четыре "7", и одна "1"

II) одна "3", четыре "7", одна "9" и ~~одна~~ "1".

$$I) \text{ всего } \frac{8!}{4!1!} \cdot \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{4!}{4!0!} = 8 \cdot 35 \cdot 1 = 4 \cdot 70$$

Вариантов ~~одна "1" из 8 мест~~ вариантов ~~три "3" на 4 места~~ вариантов ~~четыре "7" на 4 места~~

$$II) \text{ всего } \frac{8!}{7!1!} \cdot \frac{7!}{5!2!} \cdot \frac{5!}{4!1!} \cdot \frac{1!}{1!0!} =$$

вариантов ~~одна "9" из 8 мест~~ вариантов ~~две "7" на 7 мест~~ вариантов ~~одна "3" на 5 мест~~ вариантов ~~четыре "7" на 4 места~~

$$= \frac{8}{1} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \cdot \frac{5}{1 \cdot 1} \cdot \frac{1}{1 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 40 \cdot 21$$

Решим: $4 \cdot 70 + 40 \cdot 21 = 7 \cdot 40 + 40 \cdot 21 = 40 \cdot 28 = 1120$ вариантов

Ответ: 1120

Задача 2.

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\sin 7x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - (\sin 3x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x) + \cos 4x = 0$$

$$\sin 7x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos 7x - (\sin 3x \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos 3x) + \cos 4x = 0$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \cos(3x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{2} - 3x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \sin(3x - \frac{3\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{2} - 4x) = 0$$

$$2 \sin(\frac{7x + \frac{\pi}{4} + 3x - \frac{3\pi}{4}}{2}) \cos(\frac{7x + \frac{\pi}{4} - 3x + \frac{3\pi}{4}}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2} - 4x) = 0$$

$$2 \sin(5x - \frac{\pi}{4}) \cos(2x + \frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2} - 4x) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4.

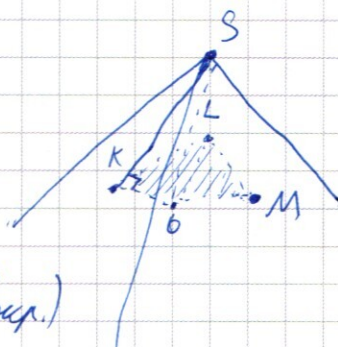
Найти: $\angle KSO = ?$

$S_{KLH} = ?$

Дано: $S_1 = 9$ (площадь сечения $\perp SO$
и кас. окр.)

$S_2 = 16$ (площадь другого сечения $\perp SO$
и кас. окр.)

Решение: 1) Пл. кас. сфера касается грани трехгранного угла в точке S , то $OK \perp L_1$, т.е. $\angle SKO = 90^\circ$
 $OK \perp KS$.



L_1 - грань с точкой K

L_2 - грань с точкой L

L_3 - грань с точкой M

2) $(A_1 B_1 C_1)$ - первая ^{сечение} ~~плоскость~~
 $(A_2 B_2 C_2)$ - второе сечение

Пл. кас. $(A_1 B_1 C_1) \perp SO$

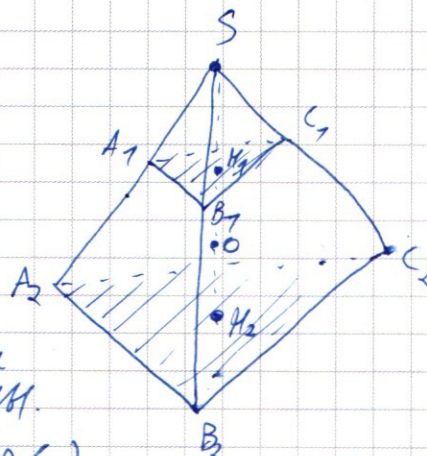
$(A_2 B_2 C_2) \perp SO$

$(A_1 B_1 C_1) \cap SO = H_1$

$(A_2 B_2 C_2) \cap SO = H_2$

$\Rightarrow H_1, H_2$ - диаметр
сферы.

$(A_1 B_1 C_1) \parallel (A_2 B_2 C_2)$.



3) Пусть R - радиус сферы; h - высота SH_2 .

• Пирамиды $SA_1 B_1 C_1$ и $SA_2 B_2 C_2$ вписаны в один и тот же
трехгранный угол $\Rightarrow \frac{SA_1}{SA_2} = \frac{SB_1}{SB_2} = \frac{SC_1}{SC_2} = K$, где K - коэф. подобия.

$$\frac{V_{SA_2 B_2 C_2}}{V_{SA_1 B_1 C_1}} = \frac{\frac{1}{3} H_2 \cdot S_{A_2 B_2 C_2}}{\frac{1}{3} H_1 \cdot S_{A_1 B_1 C_1}} = K^3 \Rightarrow \frac{16}{9} = K^3; K = \frac{4}{3}; K = \frac{4}{3}$$

• Из-за подобия, $\frac{SH_1}{SH_2} = K$; $\frac{h}{h+2R} = \frac{3}{4}$; $4h = 3h + 6R$
 $h = 6R$.

• $SO = SH_1 + OH = h + R = 7R$.

Задача 2. (Прогимназия)

$$\bullet \quad 2 \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \sin 7x + \sin(-3x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 4x + \frac{\pi}{2} - 3x}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 4x - \frac{\pi}{2} + 3x}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{7x - 3x}{2}\right) \cos\left(\frac{7x + 3x}{2}\right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

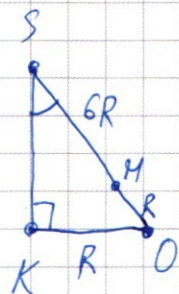
$$2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) \cos(-2x) + 2 \sin(2x) \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot (\cos 2x + \sin 2x) = -\sqrt{2} \cos 4x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) Рассмотрим $\triangle SKO$ - прямоугольный ($OK \perp KS$).



OK - радиус сферы, поэтому $OK = R$.

$$\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{7R} = \frac{1}{7}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$$

5) Заметим, что $\angle M_1KM_2 = 90^\circ$, т.к. M_1M_2 - диаметр сферы а точка K лежит на сфере.



Ответ: $\arcsin \frac{1}{7}$.

Задача 6.

ω_1 и ω_2 - окружности радиусами 1 и 2.

$\omega_1 \cap \omega_2 = A$; $\omega_1 \cap \omega_2 = B$.

$C \in \omega_1$; $D \in \omega_2$.

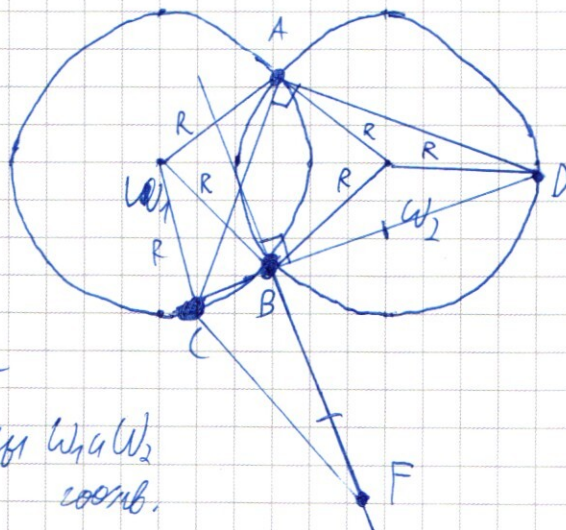
$BE \perp CD$; $\angle CAD = 90^\circ$

BM - перпендикуляр к CD

$F \in BM$; $BF = BD$.

O_1 и O_2 -

центры ω_1 и ω_2
соотв.



Задача 6 (кросс-метки)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $64827 = 3 \cdot 21609 = 9 \cdot 7203 = 27 \cdot 2401 = 3^3 \cdot 7^4$

$9 \cdot 3 \cdot 7^4$

$$\begin{array}{r} 2401 \\ \times 27 \\ \hline 16807 \\ 4802 \\ \hline 64827 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \overline{) 7} \\ 21 \overline{) 343} = \\ 30 \overline{) 49} = 49 \cdot 7 \\ 28 \overline{) 21} \\ 21 \overline{) 0} \end{array}$$

I) "1": 1
"3": 3
"7": 4

II) "1": 2
"3": 1
"7": 4
"9": 1

$(e^x)' = \ln e \cdot e^x = e^x$
 $3^x = 3^x \cdot \ln 3$

49×49

$2560 - 49 - 50 =$
 $= 2401 = 49^2$

$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 98 + 3^{28} - 3^x$
 $f'(x) = 3^x \ln 3; 3^{28} - 3$

$y > 4 \cdot 3^{28}, 4 \cdot 3^{28} > 0$

13777×5

~~177~~

$1 \cdot 33 \dots \times 5$

$1 \cdot 343 \dots \times 4$

$1 \cdot 3773 \times 3$

137773×2

137777331

17333777×4

1737377×3

1737737×2

1737773×1

17733377×3

17737337×2

17737733×1

17773337×2

17773733×1

17777333

$\sqrt{2} \cdot \cos 4x + \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \sin 4x = 0$

$\sin x + \sin x = 2 \sin x = 2 \cdot \frac{x+x}{2} \cdot \cos \frac{x-x}{2}$

$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$

$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

$y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x$

$f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

$g(x) = 93 + 3(3^{27} - 1)x$

$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin \frac{7x+3x}{2} \cos \frac{7x-3x}{2} =$
 $= 2 \sin 5x \cos 2x$

$\cos(\frac{\pi}{2} - 7x) + \cos(\frac{\pi}{2} + 3x)$

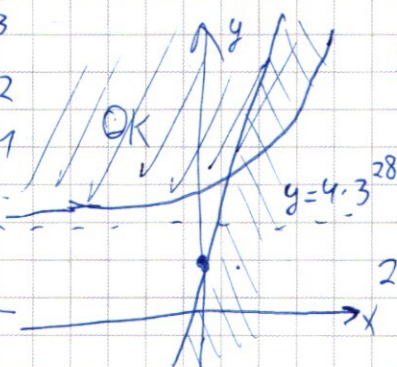
$\cos 7x + \cos 3x = \sin(\frac{\pi}{2} - 7x) + \sin(\frac{\pi}{2} - 3x) =$

$= 2 \sin \frac{\pi - 10x}{2} \cos \frac{-4x}{2} =$

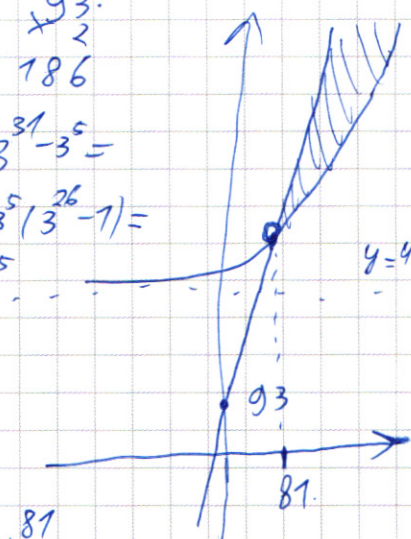
$= 2 \sin(\frac{\pi}{2} - 5x) \cos(-2x) =$

$= 2 \cos 5x \cdot \cos 2x$

$2 \sin 2x \cos 5x + 2 \cos 5x \cos 2x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$
 $2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$



$$\begin{array}{r} 93 \\ \times 2 \\ \hline 186 \\ 3^{31} - 3^5 = \\ = 3^5 (3^{26} - 1) = \\ = 3^5 \end{array}$$



$$81 \cdot 3 = 243$$

$$\begin{array}{r} 74 \\ \times 13 \\ \hline 81 \\ 24 \\ \hline 351 \end{array}$$

$$y \geq -8 - x$$

$$93 + 3(3^{27} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \quad | :3$$

$$31 + (3^{27} - 1)x > 3^{x-1} + 4 \cdot 3^{27}$$

$$3^{27}(x-4) - x > 3^{x-1} - 31$$

$$-4 > 27 - 31, \text{ m.e. } 24$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3^{28}x - 3x$$

$$x=4; \quad 3^4 + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 4 \cdot 3^{28} - 12$$

$$81 = 81 (\text{верно})$$

$$b_1 = 3^5$$

$$q = 3$$

$$n = 26$$

$$\frac{b_1}{1-q} = \frac{b_1(1+q^n)}{1-q^{n+1}}$$

$$\frac{3^x}{1-3} = \frac{b_1(3^n-1)}{3-1}$$

$$b_1 = 2; q = 2$$

$$2 + 4 + 8 + 16 = 10 + 20 = 30$$

$$\frac{2(2^4-1)}{2-1} = 30$$

$$\frac{15}{2-1} = 15$$

$$\frac{3^5 \cdot (3-1)}{3-1} = \frac{3^5 \cdot 26}{2} = 73 \cdot 3^5$$

$$1) \quad x=4 \quad x=31$$

$$2) \quad 3^x + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3^{28}x - 3x$$

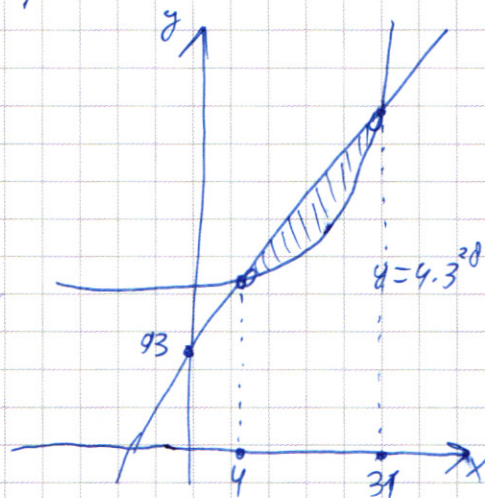
$$93 + 3^{28}(x-4) - 3x - 3^x = 0$$

$$93 = 3x + 3^x - 3^{28}(x-4)$$

$$x=28; \quad 3 \cdot 28 + 3^{28}$$

$$x=30; \quad 93 = 90 + 9 \cdot 3^{30} - 3 \cdot 26$$

$$x=31; \quad 93 = 93 + 27 \cdot 3^{31} - 27 \cdot 3^{28}$$



$$x \in [5; 30]$$

$$y > 3^5 + 4 \cdot 3^{28} = 3^5(1 + 4 \cdot 3^{23})$$

$$y \leq 93 + 5 \cdot 3^{28} - 15 \quad 81 \cdot 3 = 243$$

$$y \leq 5 \cdot 3^{28} + 78 = 5 \cdot 3^{28} + 3 \cdot 26$$

$$y \in [243 + 4 \cdot 3^{28}; 5 \cdot 3^{28} + 78]$$

$$\text{при } x=5; \quad 3^{28} - 243 + 78 = 3 - 165$$

$$\text{при } x=6; \quad 6 \cdot 3^{28} + 93 - 3 \cdot 16$$

$$x \cdot 3^{28} - 3x + 93 - 3^x - 4 \cdot 3^{28} = 3^{28}(x-4) - 3x - 3^x + 93$$

$$x=6; \quad 2 \cdot 3^{28} - 16 - 27 + 93$$

$$x=7; \quad 3 \cdot 3^{28}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} y &\geq -8 - x & y &\leq x + 8 \\ y &< -8 - x & y &> x + 8 \end{aligned}$$

$$x + y + 8 + x - y + 8 = 16.$$

$$2x = 0.$$

$$0 + 10 + 6$$

$$0 + 10 + 8$$

$$-x - y - 8 + x - y + 8 = 16$$

$$-2y = 16$$

$$x + y + 8 + y - x - 8 = 16$$

$$2y = 16.$$

$$y = 8$$

$$2x + 16 = 16$$

$$x = 0$$

$$y = x + 8$$

$$y = -x - 8.$$

$$(x; y) \Rightarrow (x; -y).$$

$$x \neq 0, y \neq 0, x = 0;$$

$$\begin{cases} |y+8| + |8-y| = 16. \\ 8^2 + (|y|-15)^2 = 0. \end{cases}$$

$$\cos 5x - x =$$

$$= \cos 5x \cdot \cos x + \sin 5x \sin x.$$

$$\cos 5x (2 \sin(x + \frac{\pi}{4}) + \cos x)$$

$$x^2$$

$$\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$2 \cos 5x \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = -\cos 4x.$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} + 2x) + \sin(3x) =$$

$$= 2 \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) \cos(\frac{\pi}{4} - 2x) + 2 \cos^2 x + 1$$

$$\sin 7x + \sin(\frac{\pi}{2} - 3x) = \frac{\pi}{4} - 5x$$

$$= 2 \sin(\frac{\pi}{4} + 2x) \cos(\frac{\pi}{4} - 2x)$$

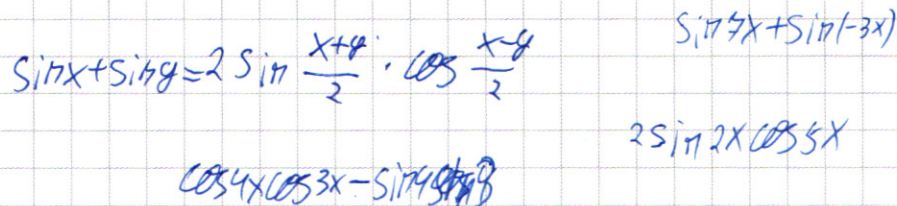
$$+ 2 \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) \cos(\frac{\pi}{4} - 2x)$$

$$\sqrt{2} \cdot 2 \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \cdot (\sin(\frac{\pi}{4} - 5x + \frac{\pi}{4}) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot 2 \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \cos 5x.$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0.$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) = -\cos 4x.$$



$$C_8^7 = 8$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!4!}$$

$$25 \sin \frac{\pi}{2}$$

$$C_4^3 = \frac{2!}{3!1!} =$$

$$\sin\left(\frac{x}{2} - 4x\right) + \sin\left(\frac{x}{2} - 3x\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2} - 5x\right)\cos 2x$$

$$\ln x^{3 \ln t} = \ln x^{2 \ln x} + \ln t^{\ln t}$$

$$3 \ln t \cdot \ln x = 2 \ln^2 x + \ln^2 t$$

$$\begin{array}{r} \underline{1234567} \quad 5 \\ 18 \times \underline{345670} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35 \end{array}$$

$$2 \ln^2 x - 3 \ln t \cdot \ln x + \ln^2 t \Big|_{t=0}$$

$$2 \ln x (\ln x - \ln t) - \ln t (\ln x - \ln t_0)$$

$$\ln x - \ln t = 0 \text{ oder } 2 \ln x - \ln t = 0$$

$$19x = 14t \quad x^2 = t$$

$$x=t, \quad x^2 = -y$$

$$x = -y$$

$$\cos 2x - \cos x = 123 - 123 \quad 5$$

$$\cos 2x - \cos x = 73 (4-7) \quad 4$$

$$= \cancel{\cos x} 2 \cos^2 x - \cancel{\cos x} - 1 = 13$$

$$= (\cos x - 1) \left(\cos x + \frac{1}{2} \right)^{75} \cdot \frac{1}{16}.$$

$$(\cos x - \cos 0)(\cos x + \cos \frac{\pi}{3})^2 \quad 34-4) \quad 4$$

4
3 345 3
2 3
2 7
1

456 2
1
567 7

$$\sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(4x + \frac{\pi}{4} - 3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$\cos 4x - \cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$$

cos
sin

$$\sin\left(\frac{x}{2} - 9x\right) = 2 \sin\left(5x - \frac{x}{4}\right) \cdot \sin(2x). \quad 8-8$$

$$\cos 4x = 2 \sin(5x - \frac{\pi}{4}) \sin(2x)$$

$$27 - 18 - 21 + 12 =$$

39