

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2. \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$1) \cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$2) \sin 7x - \sin 3x = 2 \sin 2x \cos 5x$$

$$3) 2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x = 2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = \sqrt{2} \cos(45 - 2x)$$

$$\sqrt{2} \cos(45 - 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} \cdot 2 \cos\left(\frac{45 + 2x}{2}\right) \cos\left(\frac{45 - 6x}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{45 + 2x}{2}\right) \cos\left(\frac{45 - 6x}{2}\right) = 0$$

$$1) \cos \frac{45 + 2x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{45 + 2x}{2} = \pi k + \frac{\pi}{2} =$$

$$\Rightarrow x = \pi k + \frac{\pi}{2} - 22,5$$

$$2) \cos \frac{45 - 6x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{45 - 6x}{2} = \pi k + \frac{\pi}{2}$$

$$22,5 - 3x = \pi k + \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{22,5 - \pi k - \frac{\pi}{2}}{3}$$

$$\text{Ответ: } x = \pi k + \frac{\pi}{2} - 22,5; \frac{22,5 - \pi k - \frac{\pi}{2}}{3}$$

1. $64827 = 7^4 \cdot 3^3$ цифры могут принимать значения: 9, 7, 3, 1, причем цифра 9 может использоваться 1 или 0 раз

Хотя цифра 9 используется 1 раз, тогда она может в восьмью местах, если в числе есть 9, то единицу должно быть 2 а тройку 1, последняя тройка может стоять в остальных 7-ми местах

2. Решение: ~~а единица~~ ~~один раз~~ ~~стоит~~
 1-случай когда встречается 9
 ее можно поставить 8-ми способами
 если в числе встречается 9 то в нем
 одна тройка и две единицы
 тройку можно поставить 7-ми способами
 а две единицы $\frac{6 \cdot 5}{2}$ а, в остальных
 будут единицы тогда количество чисел
 когда встречается 9-ка: $8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 840$
 2-случай когда нет 9, единица встречается
 1 раз ее можно поставить 8-ми способа-
 ми а, троек можно $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Тогда
 количество чисел равно $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 280$
 тогда общая количество чисел $840 + 280 = 1120$
 Ответ: 1120

7. Решение:
$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases} \Rightarrow$$

$$93 + 3(3^{27} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3^{28}x - 3x > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \Rightarrow 93 + 3^{28}(x - 4) > 3^x + 3x$$

~~или $4 > x$~~ ~~$93 > 3^4 + 3 \cdot 4$~~ ~~$3^x + 3x$~~

$x = 4$ не подходит $93 \leq 3^4 + 3 \cdot 4$

$x < 4$ то $3^x + 3x > 93 + 3^{28}(x - 4)$

потому что $3^x + 3x > 93 + 3^{28}(x - 4) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3^{x-1} + x > 31 + 3^{27}x - 3 \cdot 4 \quad 3^{x-1} + 3^{27} - 4 - 31 > x(3^{27} - 1)$$

$$3^{28} - > x(3^{27} - 1)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 64 \ 82 \ 71 \ 9 \\ 63 \\ \hline 18 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7203 \\ 6 \\ \hline 27 \ 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 2401 \ 17 \\ 21 \ 1343 \\ 30 \\ 28 \\ 21 \end{array}$$

$$27 \cdot 7^4 = 3^3 \cdot 7^4$$

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 7^4 \\ 3 \cdot 7^4 \\ 3 \cdot 7^4 \\ 1.1 \end{array}$$

$$\left(\frac{-x^7}{y} \right)^{\ln(y)}$$

$$\ln(y) = a \Rightarrow -y$$

$$\left(\frac{-x^7}{y} \right)^a = x$$

$$\frac{2^x}{29x}$$

$$x \in \mathbb{R} \cdot \mathbb{N}$$

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y = 93$$

$$93 \in 3^x \Rightarrow 3^x > 5^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$3^1 + 3^{27} x = x > 3^{x-1} + 4 \cdot 3^{27}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} > 93 + 3^{28} x - 3x$$

$$3^{28}(4-x) + 3^x + 3x > 93$$

$$\sin x = \frac{(6) \cdot v}{v} \Rightarrow v = x \cdot \varepsilon$$

$$(y+x)^2 = x^2 + 2x + 4y$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$-2 \sin 5x \sin 2x + 2 \sin \frac{7x-3x}{2} \cos \frac{7x+3x}{2} + \sqrt{2} \cos 4x =$$

$$= -2 \sin 5x \sin 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} (-2 \sin^2 2x)$$

$$\left(\frac{-x^7}{y} \right)^{\ln(y)} = \frac{\ln 5x + \cos 5x}{x^2 \ln(xy^2)} = x^{2a}$$

$$\varepsilon = \gamma$$

$$\varepsilon = 16 \gamma$$

$$6 = 9 \gamma \quad \gamma = (6) \cdot \gamma$$

$$(y+x+2)^2 = 4x^2 + 4x = (2x-2)^2$$

$$y \cdot 2 + 2 = 2x - 2 \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$y + 4 = x$$

$$\left(\frac{(y+4)^2}{y} \right) \ln(y) = (y+4)^2 \ln((y+4)y^2)$$

$$\left(-\frac{1}{y} \right) \ln(y) = (y+4)^2 \ln((y+4)y^2) - 2 \ln(y) \quad 35 \cdot 8 = 280$$

$$\ln(x) - y = e^a$$

$$\sin(45-2x) + \sin(2x) = 2 \sin 45 \cos(45-2x)$$

$$2 \ln(y) = 2a \quad \ln(y^2)$$

$$y^2 = e^{2a}$$

$$2 \ln(x) - y = e^b$$

$$\ln \left(\frac{(y+4)^2}{-y^3} \right) = k$$

$$\frac{1}{-y^6} = (y+4)^k$$

$$\frac{(y+4)^2}{-y^3} = e^k$$

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$x=1 \quad |y+9| + |1-y| = 16$$

$$y \in [9, 16] \quad y = 17$$

$$x \geq y \geq 0$$

$$0 \geq x \geq y$$

$$93 + 3^{28} - 3x \geq 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3^{28}(x-4) \geq 3^x + 3x$$

$$x \geq 4$$

$$3x \geq x \geq 5$$

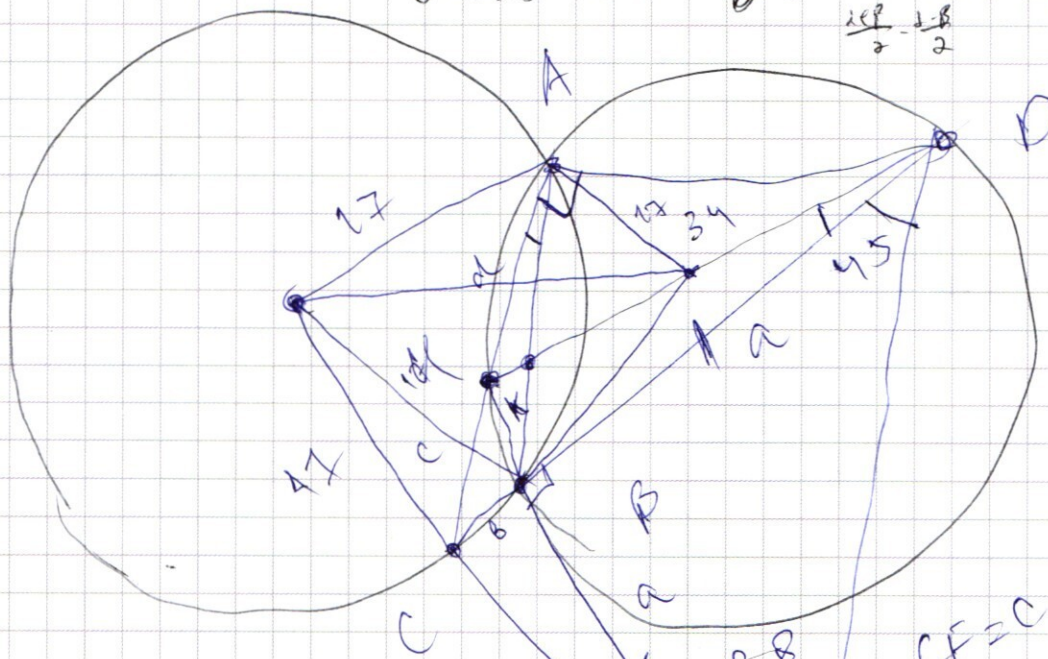
$$x \geq 29 \quad 30$$

$$x \geq 31$$

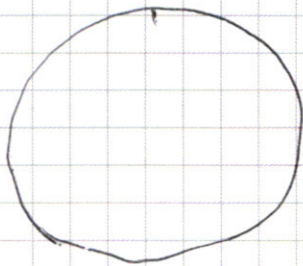
$$3^x + 3^{28} \geq 93 + 3^{28}(x-4)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}
 y + 4 &= x - 2 \quad \text{или} \quad x = y + 4 \quad \text{или} \quad e^{a-z} = y \\
 \frac{(y+4)^{2 \ln(y)}}{(-y)^{\ln(y)}} &= \\
 &= (y+4)^{2 \ln(y+4)} = (y+4)^{2 \ln(y+4)} + (y+4)^{2 \ln y^2} \\
 (y+4)^{2 \ln(y+4)} - \ln((y+4)^2 y^2) &= (-y)^{\ln(y)} \\
 (y+4)^{\ln\left(\frac{y^3}{(y+4)^2}\right)} &= (-y)^{\ln(-y)} \\
 (y+4)^a &= \frac{1}{e^a} = (y+4)^2 \frac{a^2 + b^2}{3a^2 - k^2 + c^2 - k^2} \\
 \frac{(y+4)^a}{e^a} &= e^{\frac{a}{2}} \\
 \cos \alpha \cos \beta &= \sin \\
 2 \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \\
 \frac{\alpha + \beta}{2} &= \frac{\alpha - \beta}{2}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= 93 + 3^{28} x - 3x - 3x - 3x - 3^{28} = 3^{28} \\
 &\neq 93 \cdot 26 + 3^{28} (5x - 30) = 3^{28}
 \end{aligned}$$



$$\cos 90 = 0$$

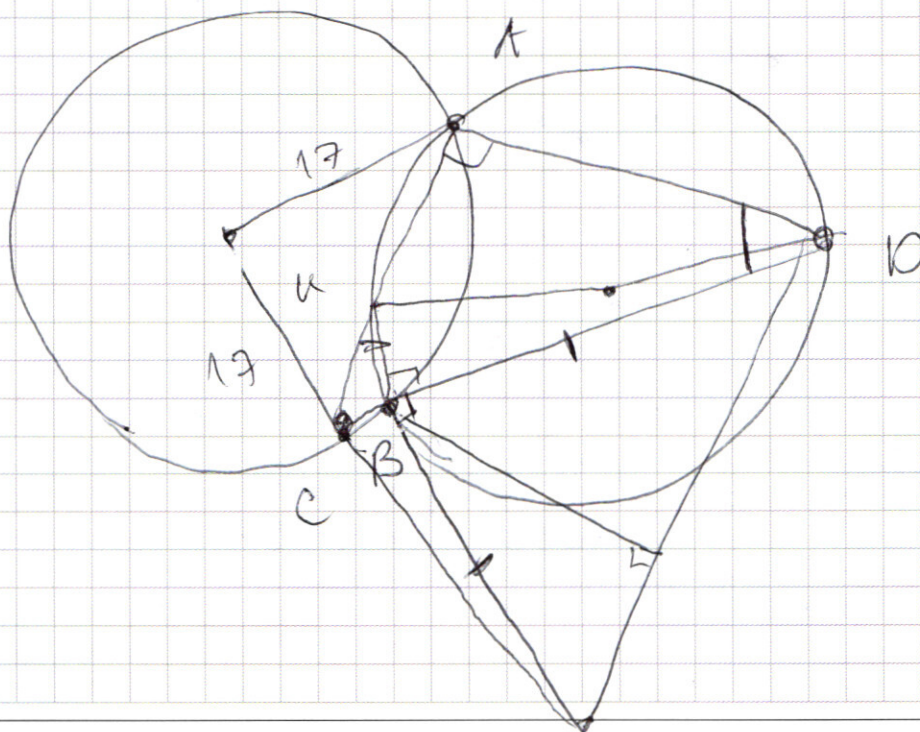
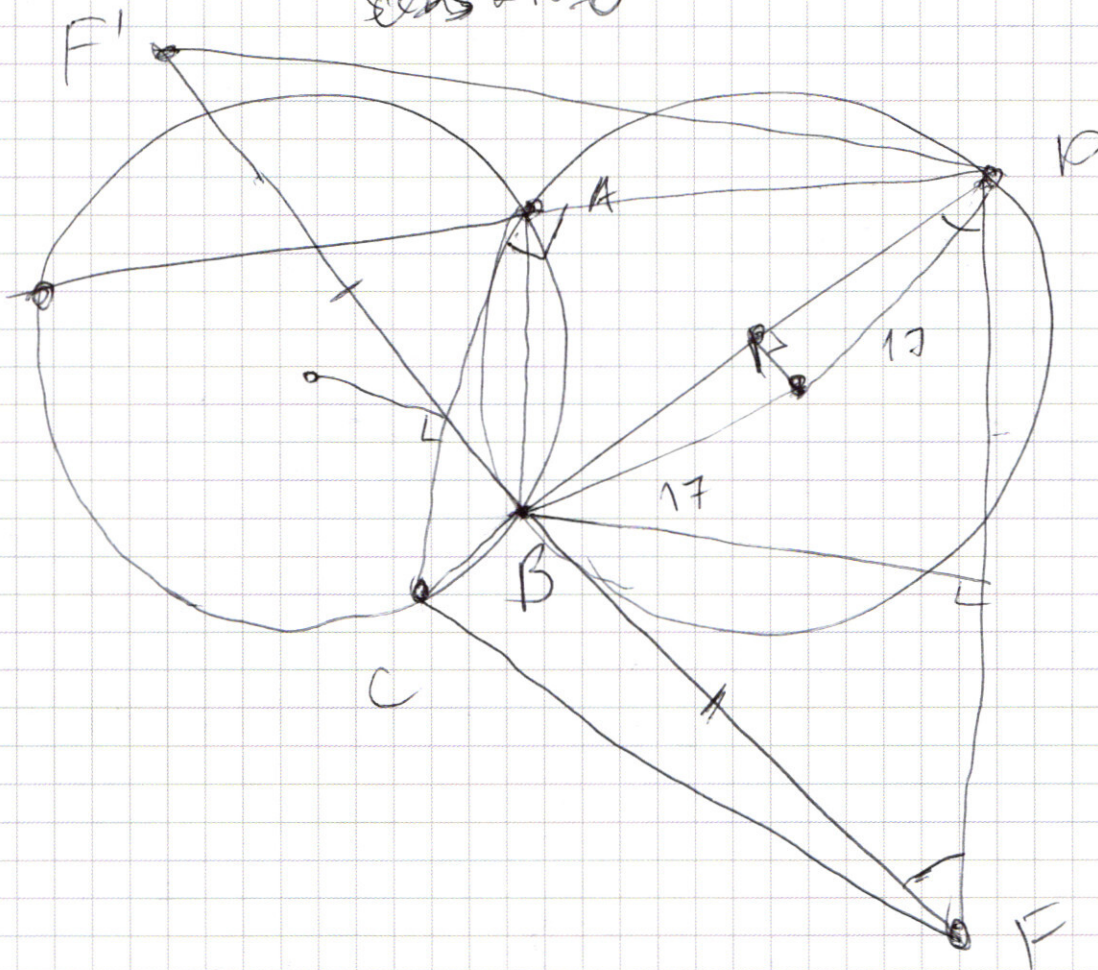
$$\cos 0 = 1$$

$$\cos 90 = 0$$

$$\cos 180 = -1$$

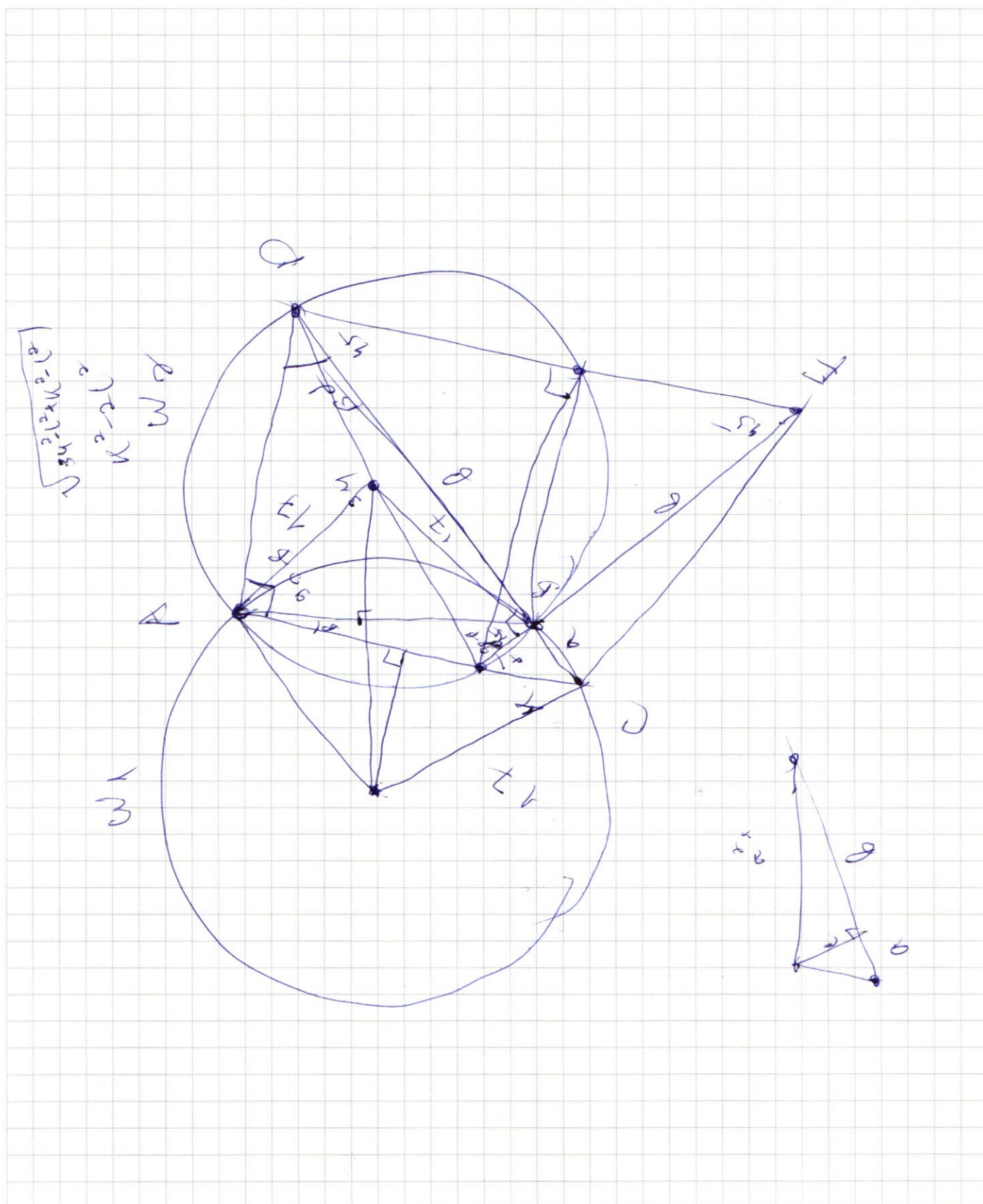
$$\cos 270 = 0$$

$$2\sqrt{11} + \frac{\sqrt{11}}{2}$$



+58

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. Решение: $BF = BD$ и $CF = CD = 34$ и $\angle CBF = 90^\circ$

Тогда $CB = BK = 16$ $Bb = BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = 30$

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CK}{CD} \Rightarrow CK \cdot CA = CB \cdot CD \quad \text{Так как они подобны}$$

$$CA = \frac{CB \cdot CD}{CK}$$

$$CK^2 = CB^2 + BK^2 = 16^2 + 30^2 \Rightarrow CK = 16\sqrt{2}$$

$$CA = \frac{16 \cdot 34}{16\sqrt{2}} = 23\sqrt{2}$$

$$\angle BCF = \beta \quad \sin \beta = \frac{30}{34} \quad \cos \beta = \frac{16}{34}$$

~~то~~ $\angle ACF = 45^\circ + \beta$ так как $\angle BCK = 45^\circ$ $CB = BK$

$$\sin(45^\circ + \beta) = \sin 45^\circ \cos \beta + \sin \beta \cos 45^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{16}{34} + \frac{30}{34} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{46\sqrt{2}}{68} = \frac{23\sqrt{2}}{34}$$

$$S_{ACF} = \frac{\sin ACF \cdot AC \cdot CF}{2} = \frac{\frac{23\sqrt{2}}{34} \cdot 23\sqrt{2} \cdot 34}{2} =$$

$$= 23^2$$

Ответ: $CF = 34$ $S_{ACF} = 23^2$

3. Решение: 12) ~~$y + x + 2 = 2x - 2 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow y + 4 = x$~~

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y + x + 2)^2 = (2x - 2)^2$$

$$1) y + x + 2 = 2x - 2 \quad y = x - 4$$

$$2) y + x + 2 = -2x + 2 \quad y = -3x$$

$$1) y = x - 4$$

$$\left(\frac{-x^7}{x-4}\right)^{\ln(-x-4)} = x^{2\ln(x(x-1)^2)}$$

$$= 1 \cdot x^{\ln\left(\frac{(x-4)^3}{x^2}\right)} = (x-4)^{\ln(-x-4)}$$

$$2) y = -3x$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(x \cdot 9x^2)} \Rightarrow \frac{x^{\ln(3^6 \cdot x^6)}}{3^{\ln(3x)}} = x^{\ln(81 \cdot x^6)}$$

$$x^{\ln(9)} = 3^{\ln(3x)}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

7. Решение: ~~3³¹ > 3²⁸~~ докажем что

~~$$3^x + 3^x \geq 3^{28} \Rightarrow 3^x \geq 3^{28}$$~~

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} \geq 93 \cdot 3^{27} \Rightarrow 3^x \geq 93 \cdot 3^{27} - 4 \cdot 3^{28} \text{ при } x \geq 31$$

$$3^x + 3^x \geq 93 \cdot 3^{27} + 3^{28}(x-4) \text{ пусть } x = 31 + a$$

$$3^{31+a} + 3(31+a) \geq 93 \cdot 3^{27} + 3^{28}(27+a)$$

$$3(31+a) \geq 93 \text{ и } 3^{31+a} \geq 3^{28}(27+a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^{3+a} \geq 3^3 + a \quad 27(3^a - 1) \geq a$$

Так как $27(3^a - 1)$ - степенная она растет быстрее тогда $30 \geq x \geq 5$

и x может принимать любую из этих

$$\sum_{x=5}^{30} (3^x + 4 \cdot 3^{28} + 1) + \dots + (3^x + 4 \cdot 3^{28} + (93 + 3^{28}x - 3x) - (3^x + 4 \cdot 3^{28})) =$$

$$= \sum_{x=5}^{30} (3^x + 4 \cdot 3^{28}) + \dots - (93 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28}) +$$

$$+ 1 + \dots + (93 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28}) =$$

$$= \sum_{x=5}^{30} (3^x + 4 \cdot 3^{28}) (93 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28}) + \frac{(93 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28})}{2} \cdot$$

$$\frac{(93 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28} + 1)}{2} = \sum_{x=5}^{30} \frac{(93 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28}) (3^x + 4 \cdot 3^{28} +$$

$$+ 94 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28})}{2}$$

Ответ: $\sum_{x=5}^{30} \frac{(93 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28}) (3^x + 4 \cdot 3^{28} + 94 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28})}{2}$

$$\Rightarrow (y + x + 2)^2 = (2x - 2)^2$$

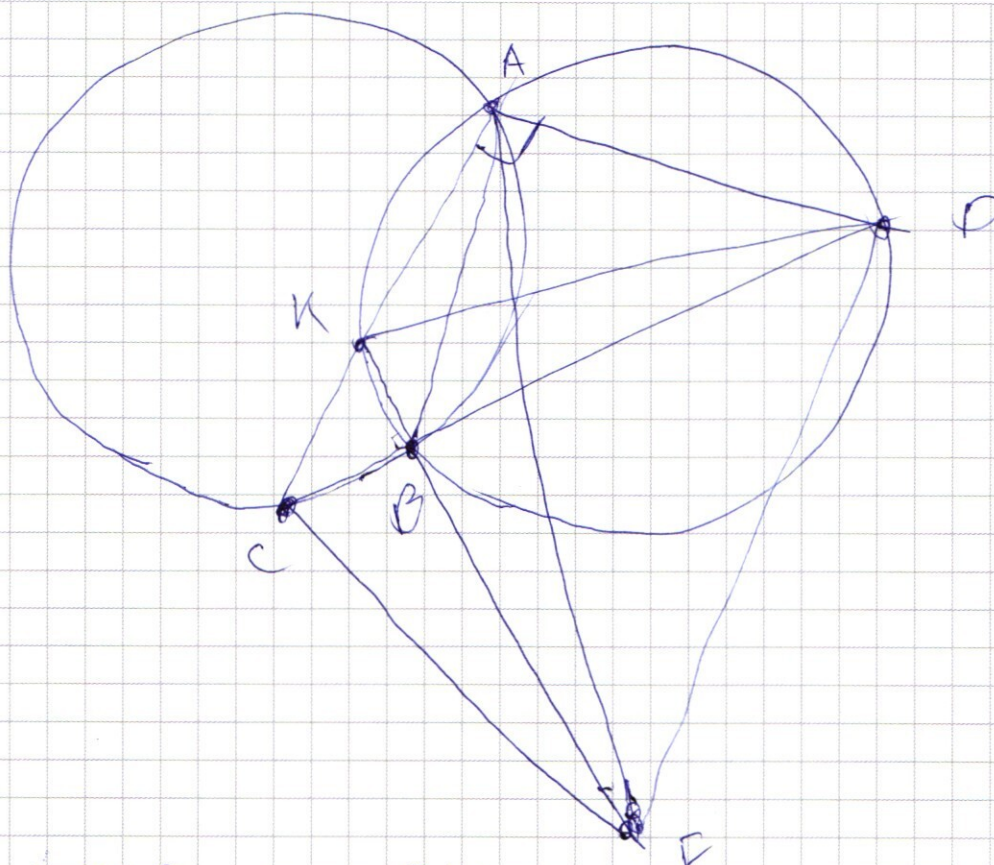
1) $y + x + 2 = -2x + 2 \Rightarrow y = -3x$

$$\left(\frac{-x}{-3x} \right)^{\ln(3x)} = x^{2 \ln(3x)} \Rightarrow \left(\frac{x}{3} \right)^{\ln(3x)} = x^{\ln(81x^6)}$$

$$\frac{x^{\ln(3^0 x^0)}}{x^{\ln(81x^6)}} = x^{\ln(9)} = 3^{\ln(3x)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.



Решение: $\angle CAB = \alpha \Rightarrow \angle BAD = 90^\circ - \alpha$

$$\frac{CB}{\sin \alpha} = 2 \cdot R = 2 \cdot 17 = 34 \quad CB = 34 \sin \alpha \text{ по теореме син.}$$

$$\frac{BD}{\cos \alpha} = 34 \Rightarrow BD = 34 \cos \alpha$$

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2 = 34^2 \sin^2 \alpha + 34^2 \cos^2 \alpha =$$

$$= 34^2 \Rightarrow CF = 34, \text{ пусть } AC \text{ пересекает вторую}$$

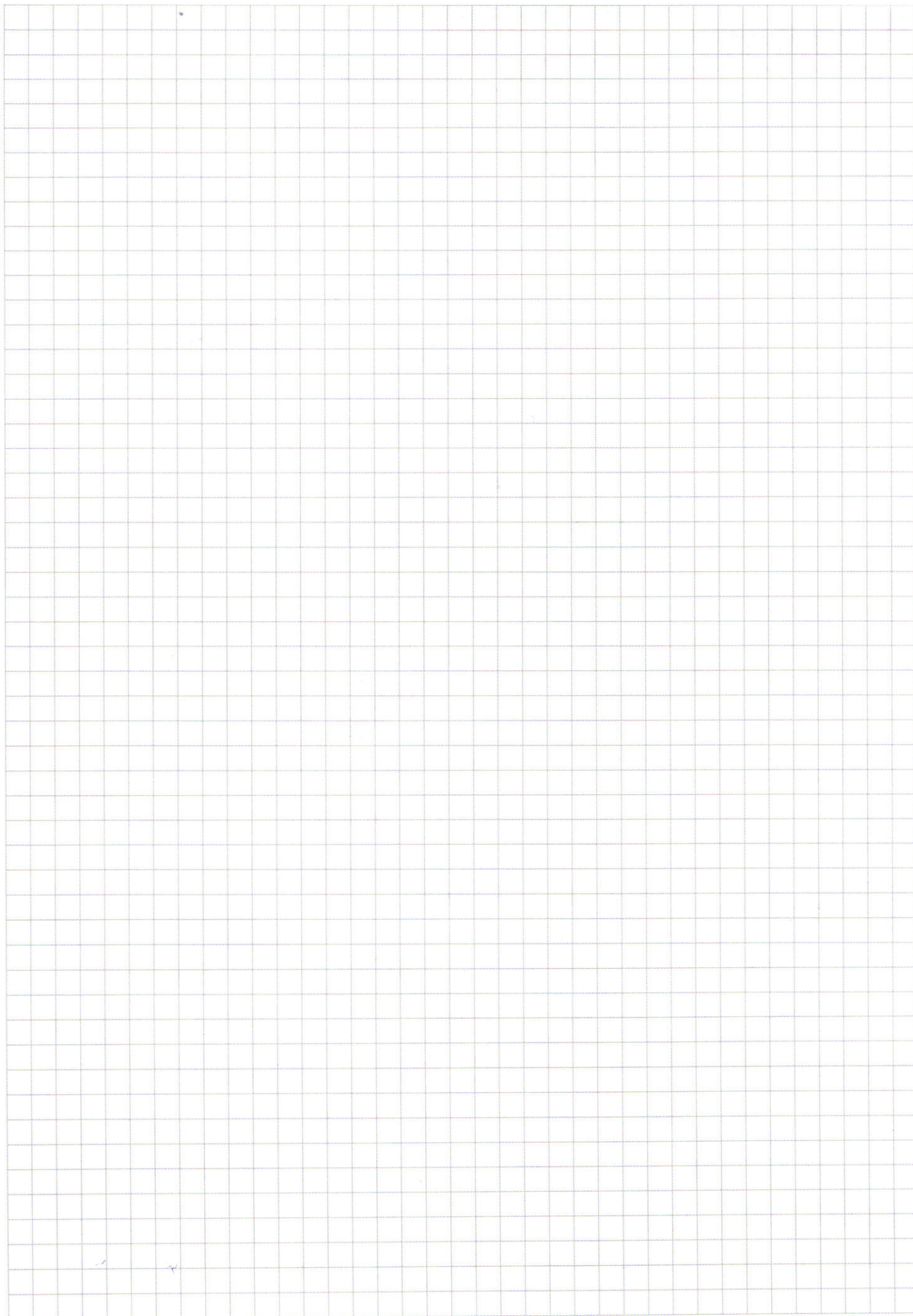
окружность в точке K тогда ~~KB = AC~~ ~~KB = AC~~

так как $\triangle CBK \sim \triangle CAD \Rightarrow \angle CBK = 90^\circ$

значит K, B, F лежат на одной прямой

~~так как~~ и KD - диаметр так как $\angle KAD = 90^\circ$

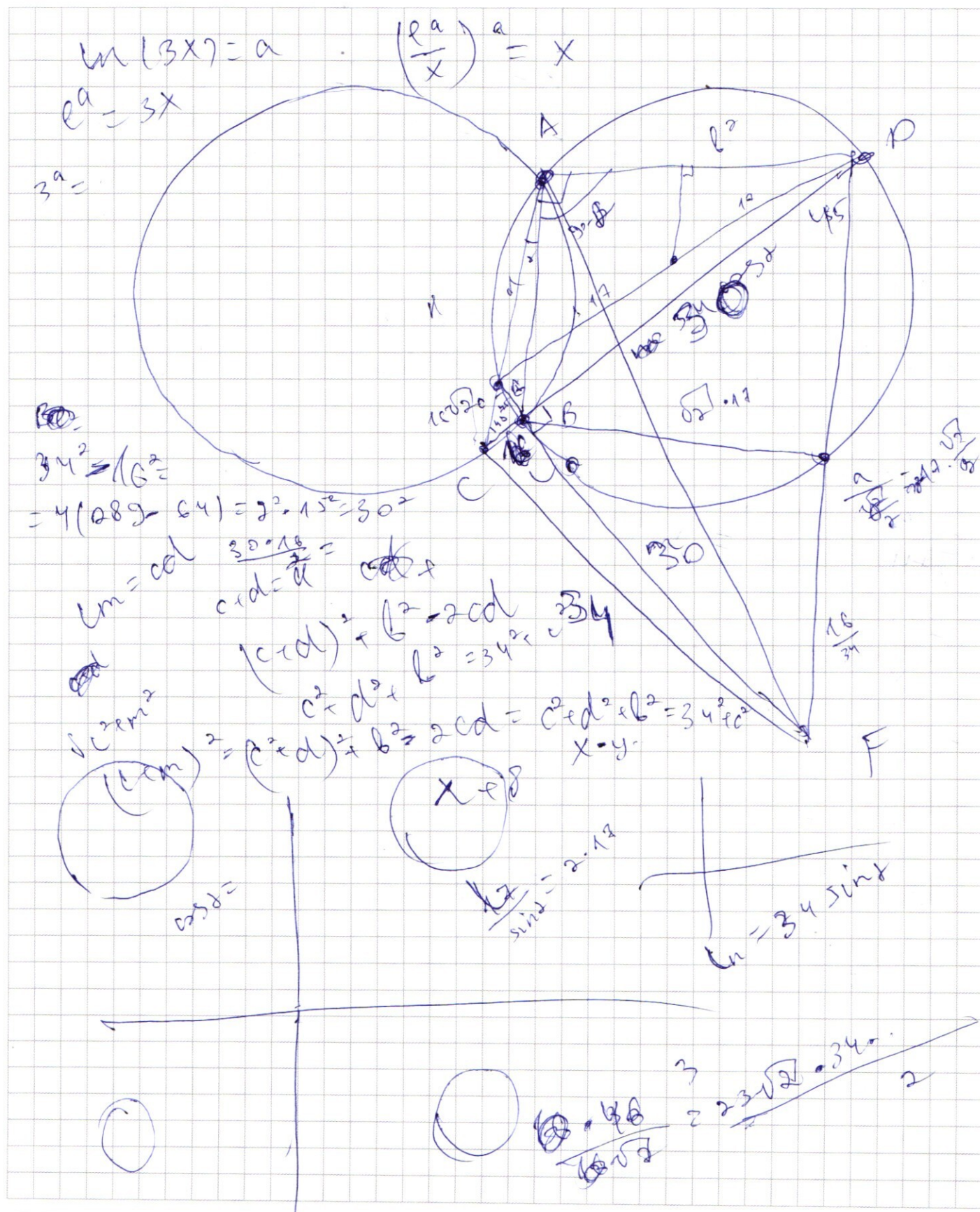
$$KD = 2 \cdot 17 = 34 \Rightarrow \triangle CBF = \triangle KBD \text{ так как}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{aligned}
 & 3^x + 4 \cdot 3^{28} + 1 + \dots \\
 & 3^5 + 4 \cdot 3^{28} + 1, 3^5 + 4 \cdot 3^{28} + 2, \dots, 9 \cdot 3 + 3 \\
 & 3^x + 4 \cdot 3^{28} + 1 \quad \dots \quad 3^x + 4 \cdot 3^{28} + 3 \\
 & (3^x + 4 \cdot 3^{28}) (9 \cdot 3 + 3^{28} x - 3x - 3 - 4 \cdot 3^{28}) + \\
 & + (9 \cdot 3 + 3^{28} x - 3x - 3 - 4 \cdot 3^{28}) (9 \cdot 3 + 3^{28} x - 3x - 3 - 4 \cdot 3^{28})
 \end{aligned}$$

3

3. Решение: $y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (y + x + 2)^2 = (2x - 2)^2 \Rightarrow y + x + 2 = 2x - 2$

2) $y + x + 2 = -2x + 2$

1) $y = x + 4$

$$\left(\frac{-x+7}{x+4}\right) \ln(-x-4) = x^2 \ln(x(x+4)^2)$$

$$\frac{-x \ln(x+4)^7}{x \ln(x^2(x+4)^4)} = (x+4) \ln(-x-4)$$

$$-1 \cdot x \ln\left(\frac{-(x+4)^3}{x^2}\right) = (x+4) \ln(-x-4)$$

2) $xy = -3x$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right) \ln(3x) = x^2 \ln(x \cdot 9x^2) \Rightarrow \frac{x \ln(3^6 \cdot x^6)}{3 \ln(3x)} = x \ln(81 \cdot x^6)$$

$$x \ln(9) = 3 \ln(3x)$$