

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Разложим число 64824 на простые множители: $64824 = 4^4 \cdot 3^3$. Т.к. это число является произведением цифр, то очевидно, что четыре из них это семерки. Больше семерок среди цифр могут быть только 1, 3 и 9. Т.к. степень вхождения тройки в число 64824 равна трём, то возможны следующие комбинации цифр и только они:

1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7 и 1, 1, 3, 7, 7, 7, 7, 9. В первом случае мы можем расставить 4 семерки в восьмизначном числе C_8^4 способами, и для каждой такой расстановки мы можем поставить единицу на четыре разные позиции, остальные позиции занимают тройки, т.е. всего $C_4^3 \cdot 4$ таких чисел. Во втором случае после расстановки семерок мы можем поставить тройку на четыре разные позиции, после этого останутся три разные позиции для девятки, остальные позиции — для единицы, т.е. всего $C_8^4 \cdot 4 \cdot 3$ таких чисел. Суммируем: $C_8^4 \cdot 4 + C_8^4 \cdot 4 \cdot 3 = C_8^4 \cdot 4^2 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot 4^2 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 4^2 = 70 \cdot 16 = 1120$
 Ответ: 1120

№3

Из присутствия выражений $\ln(-y)$ и $\ln(xy^2)$ делаем вывод, что $-y > 0$, $y < 0$ и $xy^2 > 0$, $x > 0$.

Тогда $-\frac{x^4}{y} > 0$ ($y < 0$) ~~и $x > 0$~~ , т. е. все ~~хорошо~~ пары $(x; y)$, где $x > 0$ и $y < 0$ удовлетворяют области определения. Прологарифмируем по натуральному логарифму первое выражение в системе: $\ln(-\frac{x^4}{y})^{\ln(-y)} = \ln x^{2 \ln(xy^2)}$, тогда

$$\begin{aligned} \ln(-y) \cdot \ln(-\frac{x^4}{y}) &= \ln(xy^2) \cdot \ln(x^2), \ln(-y)(\ln(x^4) - \\ &- \ln(-y)) = (\ln(x) + \ln(y^2)) \cdot 2 \ln(x), \ln(-y)(4 \ln x - \\ &- \ln(-y)) = (\ln(x) + 2 \ln(-y)) \cdot 2 \ln(x). \text{ Сделаем за-} \\ &\text{мену } \ln(-y) = a, \ln x = b. a(4b - a) = (b + 2a) \cdot 2b, \\ &4ab - a^2 = 2b^2 + 4ab, a^2 - 3ab + 2b^2 = 0, (a-b)^2 + b^2 - ab = 0, \\ &(a-b)(a-2b) = 0. \text{ Т. е. } a = b \text{ или } a = 2b, \text{ учиты-} \\ &\text{ваем замены: } \ln(-y) = \ln(x) \text{ или } \ln(-y) = 2 \ln(x) = \\ &= \ln(x^2). -y = x \text{ или } -y = x^2. \text{ В первом случае:} \\ &y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = (-x)^2 + 2x \cdot (-x) - 3x^2 + 12x + 4 \cdot (-x) = \\ &= -2x^2 - 2x^2 + 8x = -4x^2 + 8x = 4x(2-x) = 0. x > 0, \Rightarrow \\ &x = 2, y = -2. \end{aligned}$$

Второй случай: $y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = (-x^2)^2 + 2x \cdot (-x^2) - 3x^2 + 12x + 4 \cdot (-x^2) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 12x = 0$, $x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$ (т. к. $x \neq 0$). Нетрудно заметить, что корнем данного уравнения является 3, поэтому его можно разложить на скобки:

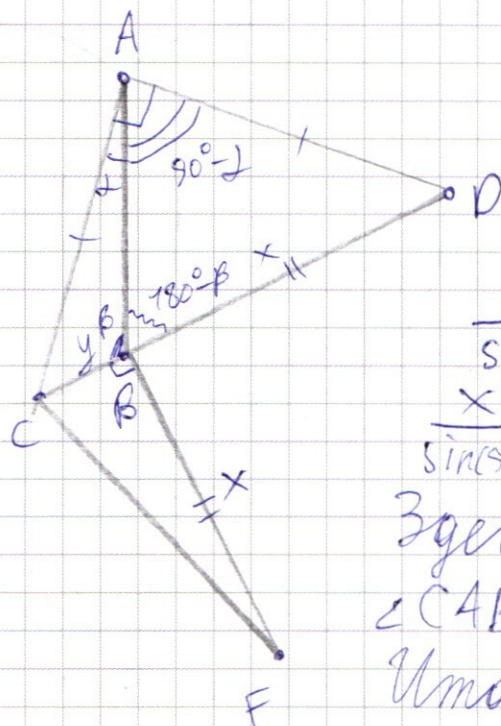
$(x-3)(x^2+x-4) = 0$. При $x=3, y=-9$. Если же $x^2+x-4=0$, то $D=1+16=17$, $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Отрицательный корень не подходит, поэтому подходит только

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}. \text{ Тогда } y = -x^2 = -\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2 = -\frac{18-2\sqrt{17}}{4} = -\frac{9-\sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{17}-9}{2}.$$

Ответ: $(x; y) = (2; -2); (3; -9); \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{\sqrt{17}-9}{2}\right).$

№6



а) Пусть $BD = x$,
 $BC = y$. Обозначим
по т. синусов
для $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$:
 $\frac{y}{\sin 2} = 2R = 2 \cdot 17 = 34$ и

$$\frac{x}{\sin(90^\circ - 2)} = \frac{x}{\cos 2} = 2R = 34,$$

Здесь мы обозначили
 $\angle CAB = 2$, тогда $\angle BAD = 90^\circ - 2$.

Итак, получили:

$$\frac{x}{\cos 2} = \frac{y}{\sin 2} = 34. \text{ Тогда } x^2 + y^2 = 34^2 (\cos^2 2 + \sin^2 2) = 34^2. \text{ По условию } BF = BD = x, \Rightarrow \text{из } \triangle CBF \text{ } CF^2 = x^2 + y^2 = 34^2, CF = 34.$$

Ответ: 34.

б) Пусть $BC = 16$. Из $\triangle CBF$ по т. Пифагора
находим $x = BF = BD = 30$. По т. синусов для $\triangle ABC$
 $(\sqrt{34^2 - 16^2})$

$\triangle ABD: \frac{AC}{\sin \beta} = 2R = \frac{AD}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{AD}{\sin \beta} \Rightarrow AC = AD$ и
 $\triangle ACD$ - прямоугольный равнобедренный. Тогда
 $CD = x + y = 46$ и $AC = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{46}{\sqrt{2}}$. Из $\triangle BCF$ $\sin \angle BCF =$
 $= \frac{BF}{CF} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$. $\cos \angle BCF = \sqrt{1 - \sin^2 \angle BCF}$ ($\angle BCF$ острый,
 поэтому $\cos \angle BCF > 0$) $= \sqrt{1 - \frac{15^2}{17^2}} = \sqrt{\frac{64}{17^2}} = \frac{8}{17}$. $\sin \angle ACF =$
 $= \sin(\angle ACD + \angle BCF) = [\angle ACD = 45^\circ] = \sin(45^\circ + \angle BCF) =$
 $= \sin 45^\circ \cdot \cos \angle BCF + \cos 45^\circ \cdot \sin \angle BCF = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{8}{17} + \frac{15}{17} \right) =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{23}{17} = \frac{23\sqrt{2}}{34}$. $S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF =$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{46}{\sqrt{2}} \cdot 34 \cdot \frac{23\sqrt{2}}{34} = 23^2 = 529$
 Ответ: 529.

№2

Вспомогательная тригонометрическая формула:

$$\begin{aligned}
 \cos 2x + \cos \beta &= 2 \cos \frac{2x+\beta}{2} \cdot \cos \frac{2x-\beta}{2}, \quad \sin 2x - \sin \beta = 2 \sin \frac{2x-\beta}{2} \times \\
 &\times \cos \frac{2x+\beta}{2}. \quad \cos 5x + \cos 3x + \sin 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = \\
 &= 2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = \\
 &= 2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = \\
 &= 2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) \times \\
 &\times (\cos 2x + \sin 2x) = (\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \\
 &+ \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0.
 \end{aligned}$$

Т.е. $\cos 2x + \sin 2x = 0$ или $2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$, $\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x = 0$.

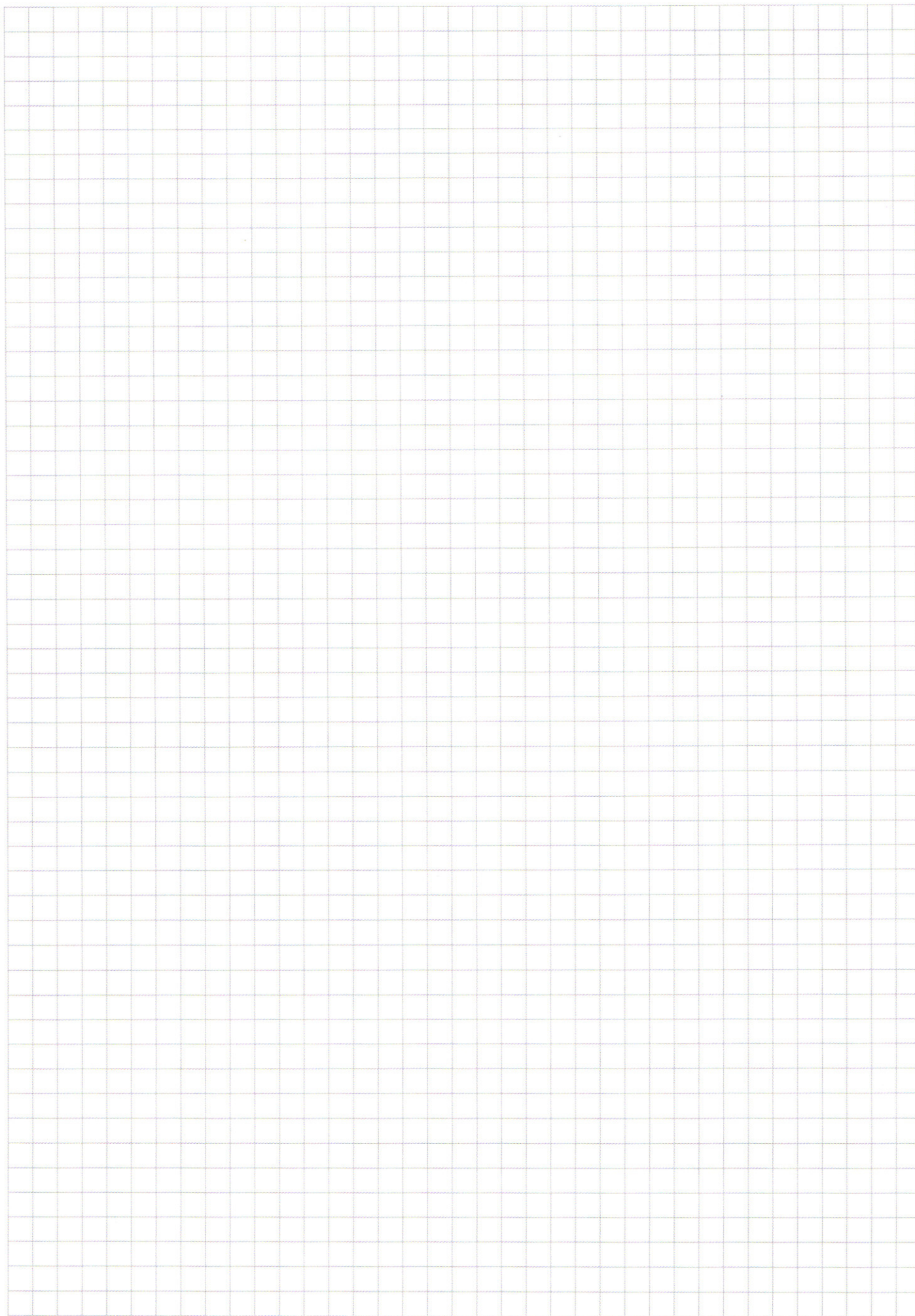
Если $\cos 2x + \sin 2x = 0$, то $\sin 2x = -\cos 2x$,

т.е. $2x = -1$ ($\cos 2x \neq 0$). $2x = -\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,

$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ - одна серия решений. Второе

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

выражение можно преобразовать так: $\cos 5x =$
 $= \cos(3x + 2x) = \cos 3x \cdot \cos 2x - \sin 3x \cdot \sin 2x$;
 $\cos 2x(\sqrt{2} \cos 3x + 1) = \sin 2x(\sqrt{2} \sin 3x + 1)$.

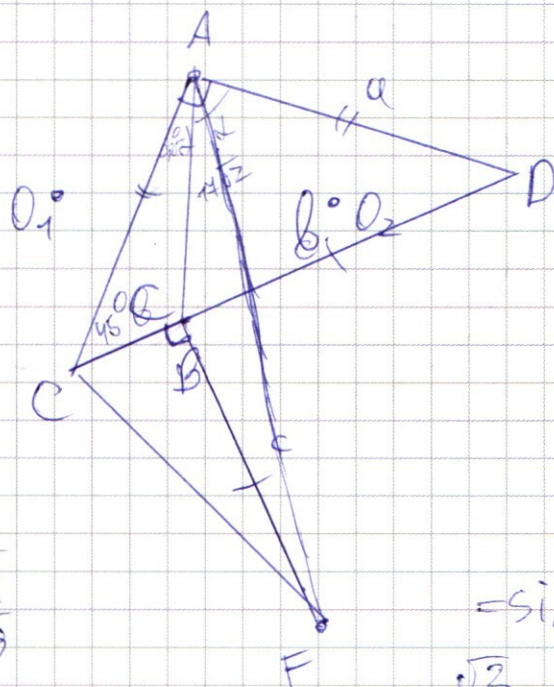


☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 460 \\ \hline 529 \end{array}$$



~~BA=16~~
 $c=16$ $b=30$
 $CF=34$
 $\sin \angle BCF = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$

$$b+c=46$$

$$AC = \frac{46}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \angle ACF =$$

$$= \sin(45^\circ + \angle BCF) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 2\angle BCF + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 2\angle BCF$$

$$\cos 2\angle BCF = \sqrt{1 - \sin^2 2\angle BCF} =$$

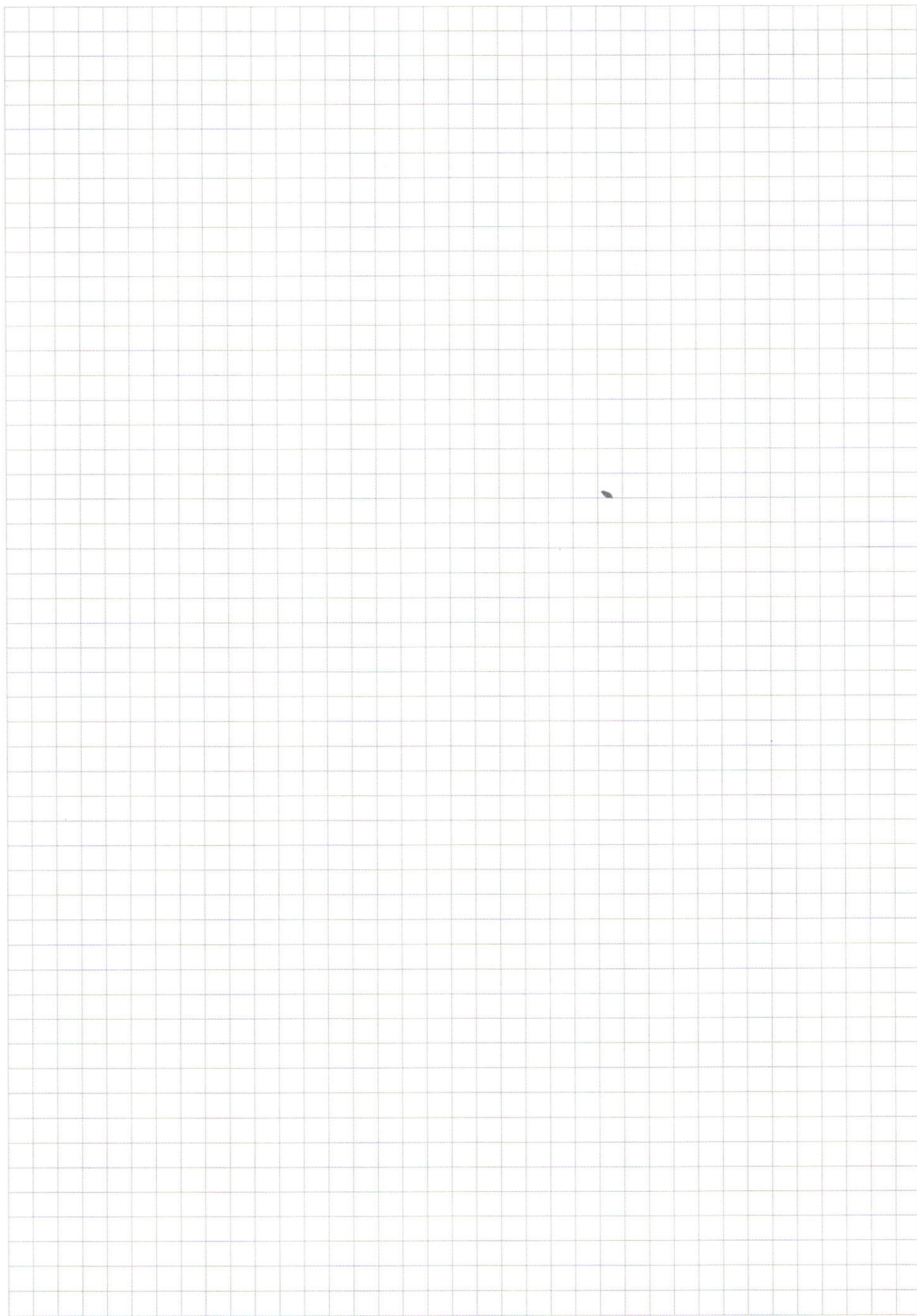
$$= \sqrt{\frac{69}{289}} = \frac{8}{17}$$

$$S_{\triangle ACF}$$

$$\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x$$

$$-2\cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = \sqrt{2} \cos 5x - 1$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\cos 5x = \cos(4x+x) = \cos 4x \cdot \cos x - \sin 4x \cdot \sin x =$$

$$= (\cos^2 2x - \sin^2 2x) \cdot \cos x - 2 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \sin x =$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{2} + \cos \pi - \sin \pi$$

$$5x = \frac{\pi}{4} \quad x = \frac{\pi}{20} \quad \frac{\pi}{10}$$

$$= \cos(5x) = \cos(2x+3x) = \cos 2x \cdot \cos 3x - \sin 2x \cdot \sin 3x$$

$$\cos 2x (\sqrt{2} \cos 3x + 1) = \sin 2x (\sqrt{2} \sin 3x + 1)$$

$$\left(-\frac{x^4}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y < 0 \quad xy^2 > 0 \quad x > 0$$

7.4

$$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$$

$$y^2 + y \cdot (2x+4) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$\frac{\log_2 4}{\log_2 16} = \log_{16} 4$$

$$\frac{D}{4} = (x+2)^2 + 12x^2 - 48x = 13x^2 - 44x + 4$$

$$e^{\left(-\frac{x^4}{y}\right)^{\ln(-y)}} = e^{x^{2 \ln(xy^2)}}$$

$$(y+x)^2 - (2x-3)^2 + 4y+9 = 0$$

$$y^2 + 2xy + x^2 - 4x^2 + 12x - 9 + 4y + 9 = 0$$

$$\ln\left(-\frac{x^4}{y}\right)^{\ln(-y)} = \ln x^{2 \ln(xy^2)}$$

$$(y+2)^2 - (2x-3)^2$$

$$\ln(-y) \cdot \ln\left(-\frac{x^4}{y}\right) =$$

$$y^2 + 4y + 4 - 4x^2 + 12x - 9 + x^2 + 5 - 12xy$$

$$= \ln \ln(xy^2) \cdot \ln(x^2) \quad \frac{\ln b}{\ln c} = \log_c b$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ком-во-? Л1

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_g}$$

$$\prod_{i=1}^3 a_i = 69827 = 7^4 \cdot 3^3$$

[illegible]

7, 7, 7, 7, 3, 3, 3, 1

II 7 7 7 7 9 3 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1

$$I \binom{4}{8} \cdot 4 \quad 7 \quad - \quad - \quad 7 \quad 7 \quad - \quad 7 \quad -$$

II $C_8^4 \cdot 4 \cdot 3$

$$\binom{4}{8}(4+12) = \binom{4}{8} \cdot 16 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot 16 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 16 =$$

11

$$\cos 2 = -\sin 2$$
$$\tan 2 = -1$$

$$\binom{2}{1} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

$$\begin{aligned}\cos 4x &= \cos^2 2x - \sin^2 2x = \\ &= (\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x)\end{aligned}$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} - \cos 4x = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x)(\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\ln(-y)(\ln x^2 - \ln(-y)) = (\ln(x) + \ln(y^2)) \cdot \ln(x^2)$$

$$\ln(-y)(2\ln x - \ln(-y)) = (\ln(x) + 2\ln(y)) \cdot 2\ln(x)$$

$$\ln(-y) = a \quad \ln x = b \quad a(2b - a) = (b + 2a) \cdot 2b$$

$$2ab - a^2 = 2b^2 + 4ab$$

$$2b^2 - 3ab + a^2 = 0$$

$$(a - b)^2 + b^2 - ab = 0$$

$$(a - b)^2 + b(b - a) = 0$$

$$(a - b)(a - b - b) = 0$$

$$a = b \vee a = 2b$$

$$\ln(-y) = \ln(x) \quad \ln(-y) = 2\ln(x) = \ln(x^2)$$

$$x = -y \quad x^2 = -y$$

$$y = -x^2$$

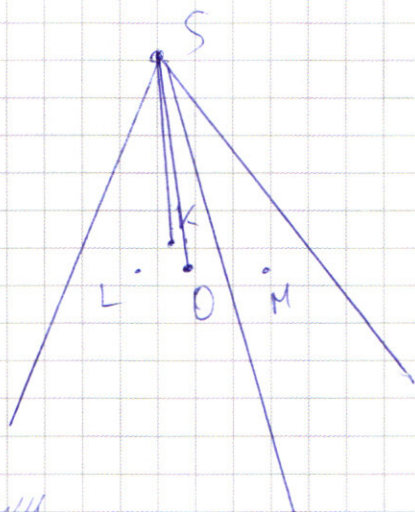
$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 12x = 0$$

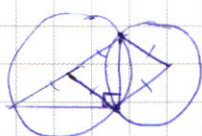
$$x^3 - 2x^2 - 4x + 12 = 0 \quad x \neq 0$$

$$24 - 18 - 24 + 12 = 0 \quad (x = 3)$$

$$(x - 3)(x^2 + x - 4)$$



или
 (x, y) - реш., то $(x, -y)$ -
 тоже реш.



$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$$

$a = ?$, при каком. знач.
 имеют 2 реш.

$$x^2 - 16|x| + 64 + y^2 - 30|y| + 225 = a^2$$

$$\text{I } x+y+8 > 0 \quad x-y+8 > 0$$

$$x+y+8 + x-y+8 = 16$$

$$x=0 \quad y+8 > 0 \quad 8 > y$$

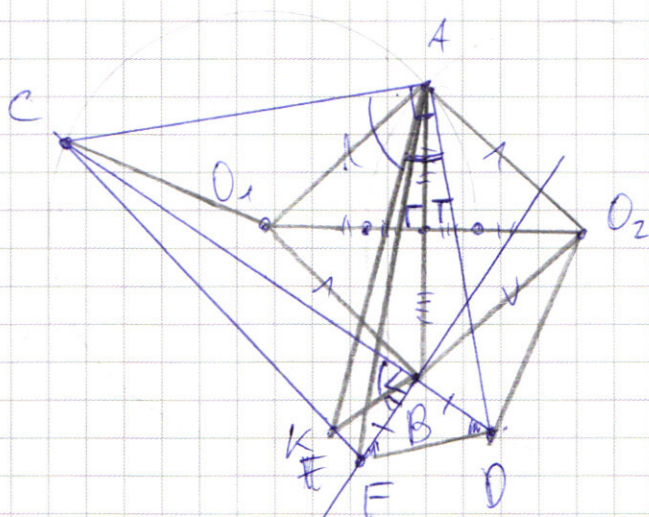
$$y > -8 \quad |y| < 8$$

$$64 + (|y|-15)^2 = a$$

$$(|y|-15)^2 = a - 64$$

$$|y| - 15$$

$$15 - |y| =$$



$$R_2 = R_1 = 14$$

CF = ?

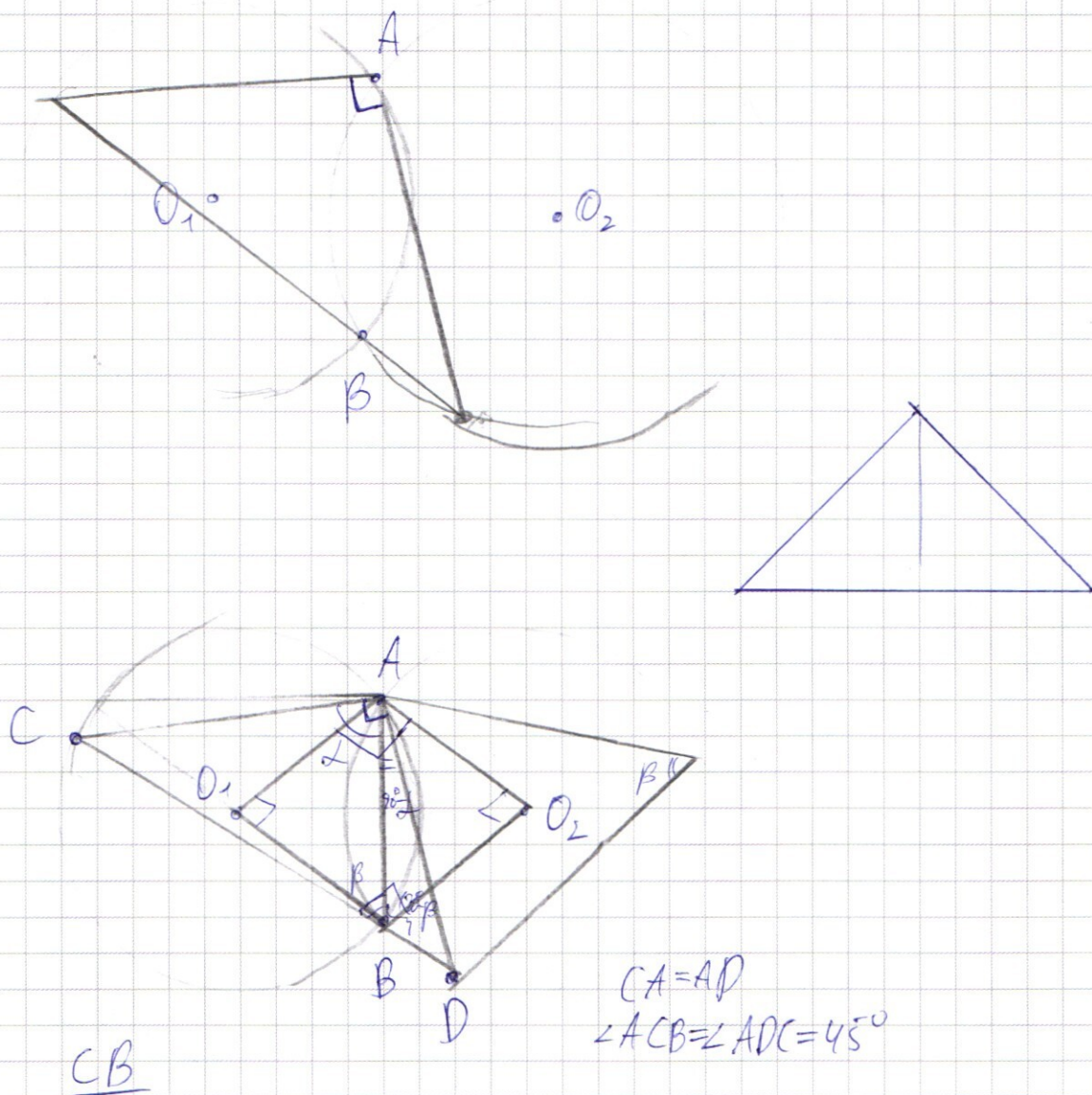
$$BC = 16$$

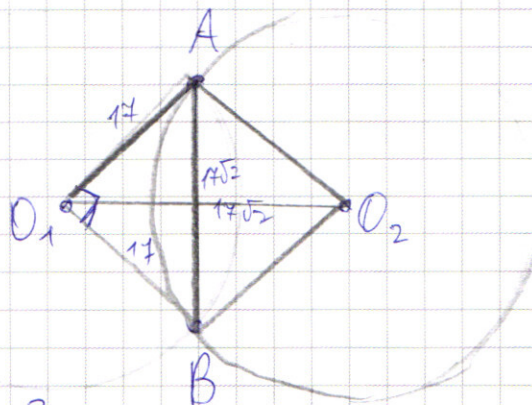
AA1

$S_{AA_1CF} = ?$

$$CF = \sqrt{BF^2 + CB^2} = \sqrt{BD^2 + CB^2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 2$$

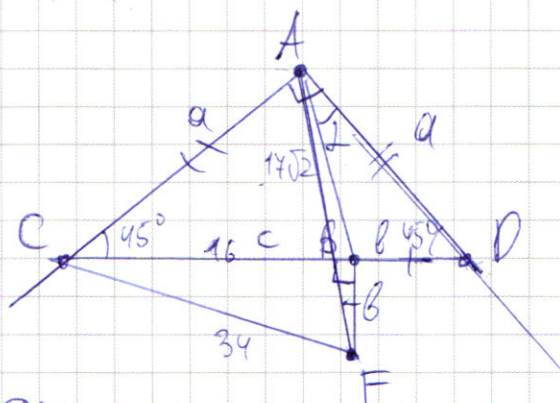
$$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(90^\circ - 2)$$

$\downarrow$
 $\sin 2$

$$AC = AD = a$$

$$BD^2 = 2AB^2 + 2a^2 - 2AB \cdot a \cdot (\cos 2 + \sin 2)$$

$$BD^2 + CB^2$$

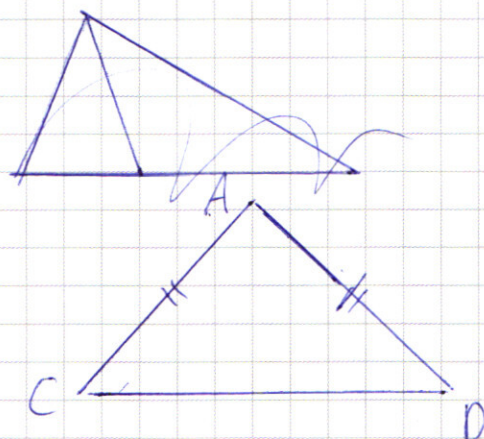


$$\frac{b}{\sin 2} = \frac{c}{\cos 2} = 34$$

$$b^2 + c^2 = 34^2 (\sin^2 2 + \cos^2 2)$$

$CF = 34$

$$BC = 16 \quad S_{\triangle ACF}$$



$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 34 \\ \hline 136 \\ + 1020 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ + 256 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$b = 30$$