

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР



Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

4 варианта

$$1) \quad x+y+8 \geq 0 \quad x-y+8 \geq 0 \quad 2) \quad x+y+8 \geq 0 \quad x-y+8 \leq 0$$

~~$x+y \geq -8$~~

$$y \geq -x-8$$

$$y \leq x+8$$

$$y \geq -x-8$$

$$~~y \geq x+8~~$$

$$x+y+8+x-y+8=16$$

$$2x+16=16$$

$$x=0$$

$$x+y+8-x+y-8=16$$

$$2y=16$$

$$y=8$$

$$2) \quad x+y+8 \leq 0 \quad x-y+8 \geq 0$$

$$y \leq -x-8$$

$$y \leq x+8$$

$$3) \quad x+y+8 < 0 \quad x-y+8 < 0$$

$$y < -x-8$$

$$y > x+8$$

$$-x-y-8+x-y+8=16$$

$$-2y=16$$

$$y=-8$$

$$-x-y-8-x+y-8=16$$

$$-2x-16=16$$

$$-2x=32$$

$$x=-16$$

$$(1x-8)^2 + (1y-15)^2 = a \quad (2)$$

$$\text{Рассмотрим } (x-8)^2 + (y-15)^2 = a \quad (1)$$

это ур-е окружности, с центром $O(8; 15)$ и радиусом $\sqrt{a}$. но т.к. вместо x у нас $1x$ а вместо y у нас $1y$ то каждому решению ур-я (1) будет соответствовать еще $(x; y)$

4 решения уравнения (2): $(x; y), (-x; y), (x; -y), (-x; -y)$

т.е. еще 4 окружности с центрами $O_1(8; 15); O_2(-8; 15); O_3(8; -15); O_4(-8; -15)$

При $\sqrt{a} = 7$ у нас 2 точки касания ($a = 49$)

$$O_1A = \sqrt{8^2 + 7^2} \geq \sqrt{7^2} = 7 \quad \text{т.е. окр. с ц. } O_1$$

и O_2 не пересекаются с квадратом $ABCD$

При $\sqrt{a} < 7$ точек Π нет

при $7 < \sqrt{a} < O_1A$ - 4 точки пересечения

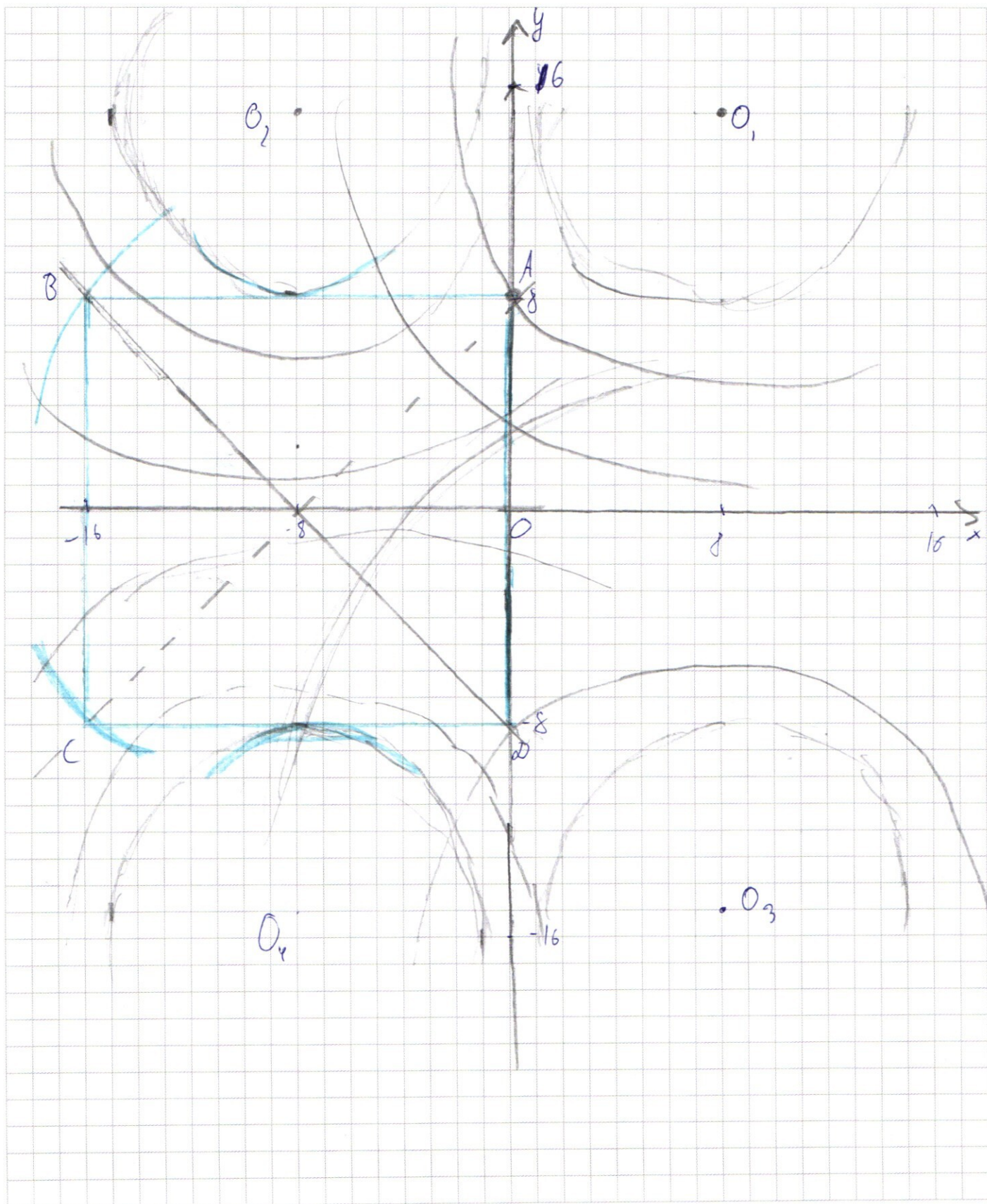
при $\sqrt{a} = O_1A$ - 6 точек Π

при $O_1A < \sqrt{a} < O_2C$ - 8 точек Π

при $O_2C = \sqrt{a}$ - 6 точек Π

при $O_2C < \sqrt{a} < O_3B$ - 4 точки Π

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



при $O_3 B = \sqrt{a}$ - 2 точки Δ

$$O_3 B = \sqrt{24^2 + 23^2} = \sqrt{529 + 529} = \sqrt{1058}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array} + \begin{array}{r} 529 \\ 46 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000 \\ 30 + 75 \end{array}$$

Ответ: $a = 49$; $a = 1105$
 $\nearrow 4$

Дано: Трёхгранный угол
сфера, касающаяся

(ABC) - сечение, перпенд. SO и
касается к сфере, ближайшая к S

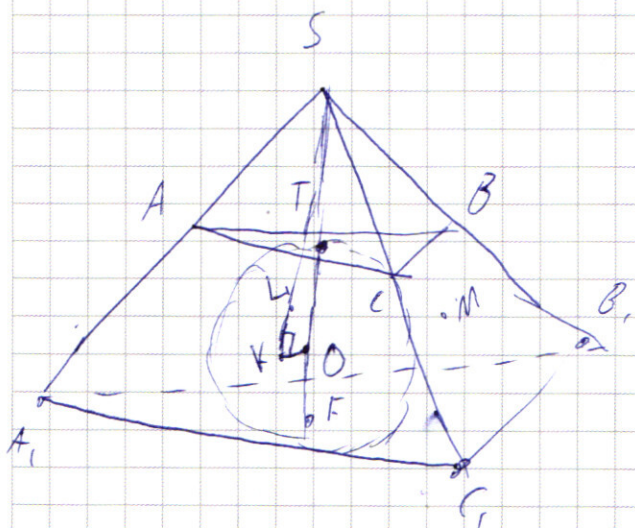
$(A_1 B_1 C_1)$ - сечение, $\perp SO$ и
касается к сфере, дальше от S

$(ABC) \parallel (A_1 B_1 C_1)$ т.к.

$(ABC) \perp SO$

$(A_1 B_1 C_1) \perp SO$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1 B_1 C_1$ т.к. это сечения



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Трёхгранного угла с параллельными плоскостями
 ST и SF - высота

T и F - точки касания (сферой (ABC) и $(A_1B_1C_1)$)

$$\frac{(ST)^2}{(SF)^2} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{9}{16}$$

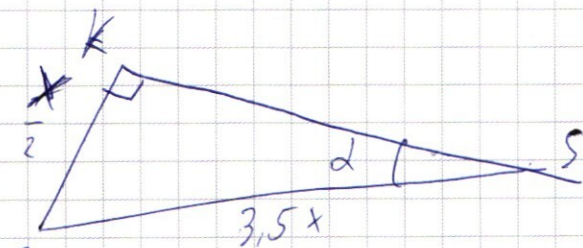
$$\frac{ST}{SF} = \frac{3}{4}$$

$$ST = 3x \quad TF = x \quad OT = \frac{x}{2} \quad SO = 3,5x$$

$TF = 2R$, т.к. это сфера, зажатая между двумя
параллельными плоскостями

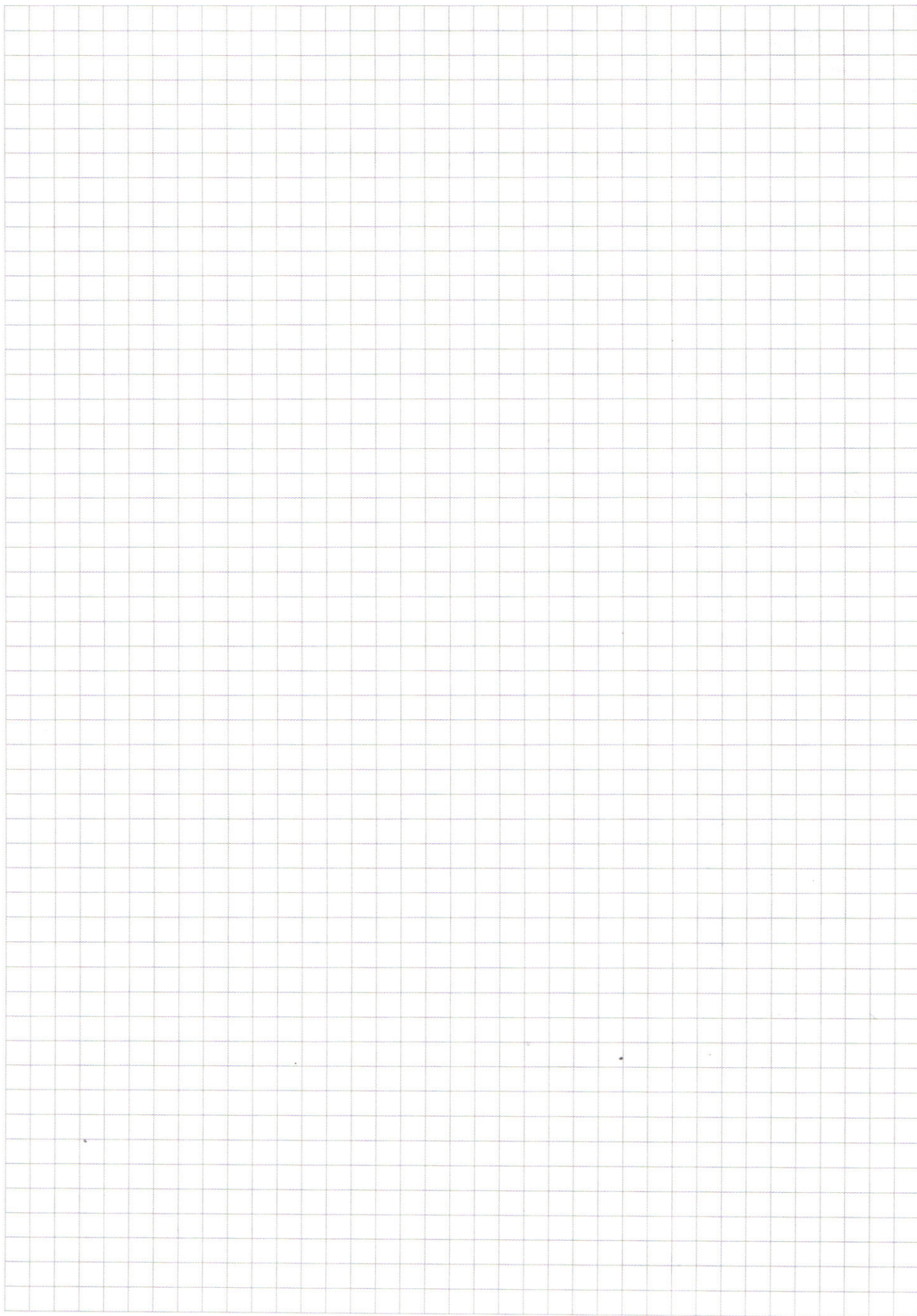
$$2R = \frac{x}{2}$$

$$OK \perp SK \quad (SK - \text{касат})$$



$$\sin \alpha = \frac{0,5x}{3,5x} = \frac{1}{7}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{7}\right) \quad \text{отсюда: } \alpha = \arcsin \frac{1}{7}$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0 \quad | : x \neq 0 \notin \text{ODZ}$$

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x = 3 \quad \text{подходит}$$

$\in \text{ODZ}$

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x^2 + x - 4) = (x-3)\left(x - \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}\right)$$

$$x \left(x - \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \right)$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} < 0 \notin \text{ODZ}$$

~~х~~ $x = 3$
 $z = 9$
 $y = -9$

$$① x^2 - 2x^2 - 3x^2 + 12x - 4x = 0$$

$$-4x^2 + 8x = 0$$

$$x(-8-4x)$$

$$x=0 \text{ (0)}^3$$

$$x=2 \Leftrightarrow x=2; y=-2$$

$$z=+2$$

$$\ln x = 2 \ln y$$

$$\ln x = \ln y^2$$

$$x = y^2$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$\ln x = 2 \ln y$$

$$e = e^2$$

$$x = e^2$$

$$② e^4 x^2 - 2e^2 x^2 - 3x^2 + 12x - 4e^2 x = 0$$

$$x^2(e^4 - 2e^2 - 3) + x(12 - 4e^2) = 0$$

$$x=0, x = \frac{12-4e^2}{e^4-2e^2-3}$$

$$x = \frac{4e^2-12}{e^4-2e^2-3}$$

$$z = \frac{4e^4-12e^2}{e^4-2e^2-3}$$

$$y = \frac{12e^2-4e^4}{e^4-2e^2-3}$$

$$12-4e^2 < 0$$

$$4e^2-12 > 0$$

$$e > 2; 16-12 > 0$$

$$e^4-2e^2-3 > 0$$

$$e > 2$$

$$16-8-3 > 0$$

$$4-2x^2 \text{ при } x > 2$$

$$x > 2$$

$$\text{Ответ: } (2, -2) \cdot \left(\frac{4e^2-12}{e^4-2e^2-3}, \frac{12e^2-4e^4}{e^4-2e^2-3} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0 \quad \text{При } x=3 \text{ подходит}$$

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 12x = 0$$

$$x=0 \notin \text{ОДЗ} \quad x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x=3 \in \text{ОДЗ}$$

$$z=9$$

$$y=-9$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 7x + 12 \\ - x^3 - 3x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 7x \\ - x^2 - 3x \\ \hline \end{array}$$

$$-4x + 12$$

$$-4x + 12$$

$$0$$

$$(x-3)(x^2+x-4)=0$$

$$(x-3)\left(x - \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \notin \text{ОДЗ}$$

$$\text{Ответ: } (2; 2), (3; -9);$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 12x - 7x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 7$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 4x - 7 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 7 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{4(4+21)}}{6} = \frac{14}{6}, -1$$

$$f\left(\frac{14}{6}\right) = f\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{343}{27} - \frac{98}{9} + 12 - \frac{49}{3}$$

$$\text{Т.к. } \frac{7}{3} > 2 \text{ то } \left(\frac{7}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{7}{3}\right)^2 > 0$$

$$\left(\frac{7}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{49}{27}$$

$$f\left(\frac{14}{6}\right) = \frac{49}{27} + 12 - \frac{49}{3} = \frac{49}{27} + \frac{36}{3} - \frac{49}{3} = \frac{49}{27} - \frac{13}{3}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$z = \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right)^2 = \frac{17 - 2\sqrt{17} + 1}{4} = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{17} - 9}{2}$$

Ответ: $(2; -2)$, $(3; -9)$, $\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

Hand-drawn graph on grid paper showing a linear programming problem. The x and y axes are labeled. A feasible region is shaded in the second quadrant, bounded by the y-axis and two lines. The lines are labeled with equations: $y = 3x + \alpha$ and $y = -3x + \beta$. The y-intercepts are labeled $\alpha + 1$ and β . A point (1, 1) is marked on the y-axis. The feasible region is filled with diagonal lines and contains several small dots.

$$93 > 3^{29} \times$$

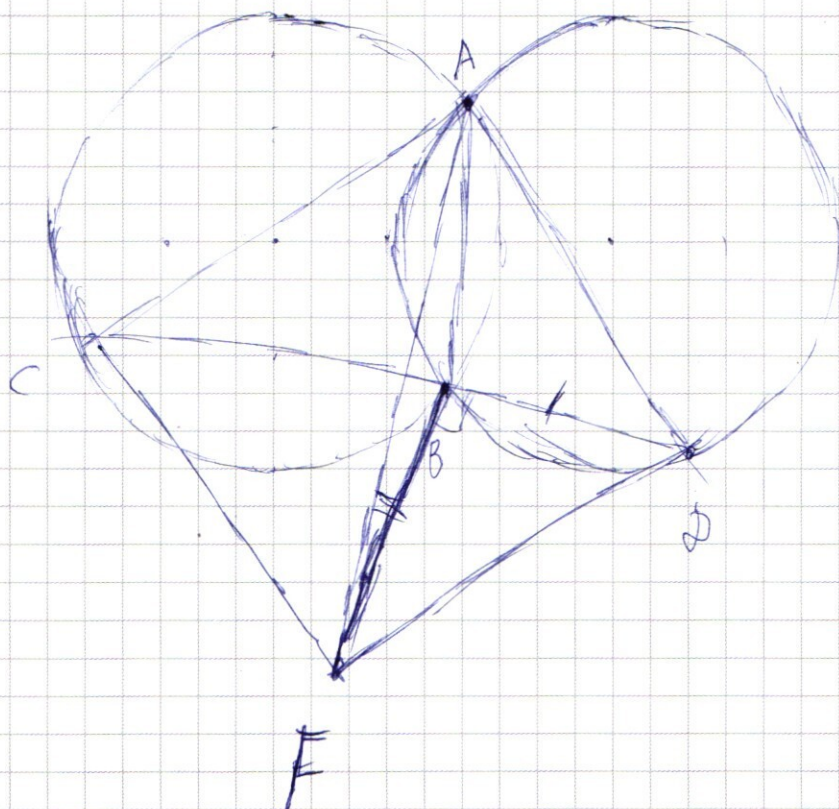
$$T \cdot K \cdot \frac{1}{t(i)} 3^x + 3x - \text{монотонно возр } \Phi - \text{г}$$

$$D(f) = (-\infty; +\infty) \quad \text{т.е. } y \text{ имеет } \varnothing \text{ число}$$

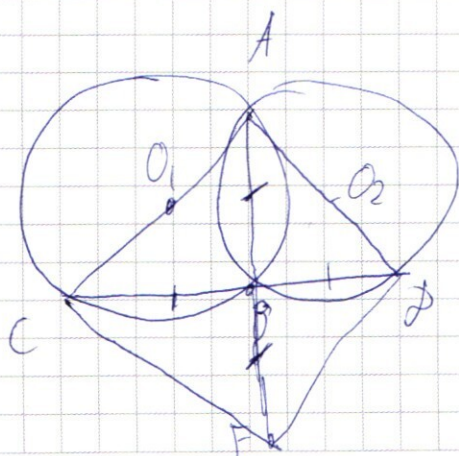
Te Oibet: ∞

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



Подберем частный случай:



$$CB = BD = BF$$

т.е. $ACFD$ - квадрат

$$AC = CF \Rightarrow CF = 34$$

Ответ: $CF = 34$

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln y} = x^{\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x+y^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

Q13

~~z > 0~~
x > 0

3.17. $y = -z$

$$\begin{cases} \left(x^{\frac{7}{2}} z^{-1}\right)^{\ln z} = x^{2 \ln(xz^2)} \\ z^2 + 2xz - 3x^2 + 12x + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\left(x^{\frac{7}{2}} z^{-1}\right)^{\ln z} = x^{2 \ln x + 2 \ln(z)^2}$$

$$x^{\frac{7}{2} \ln z} \cdot z^{-\ln z} = x^{2 \ln x} \cdot x^{4 \ln z}$$

$$x^{3 \ln z} \cdot z^{-\ln z} = x^{2 \ln x}$$

$$x^{3 \ln z} = x^{2 \ln x} \cdot z^{\ln z} \quad | \ln$$

$$\ln x \cdot 3 \ln z = \ln x \cdot 2 \ln x + \ln z \cdot \ln z$$

$$(\ln z)^2 + 2(\ln x)^2 - \ln x \cdot 3 \ln z = 0$$

$$\ln z = \frac{3 \ln x \pm \sqrt{9 \ln x^2 - 4 \cdot 2 (\ln x)^2}}{2} = \frac{3 \ln x \pm \sqrt{5 \ln x^2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \ln z &= 2 \ln x & z &= x & \text{①} \\ \ln z &= \ln x & z &= x^2 & \text{②} \end{aligned}$$



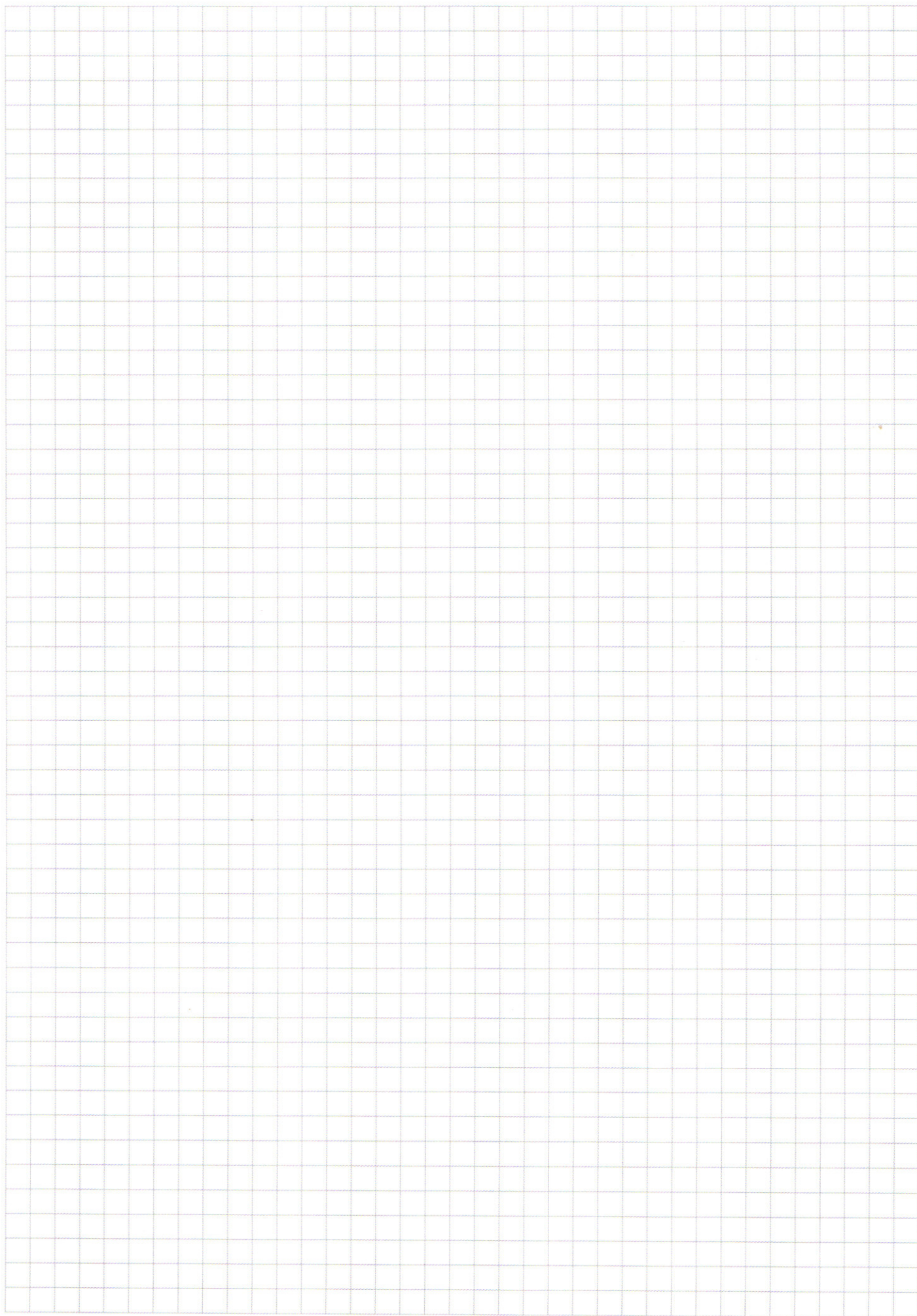
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \sin 7x \quad \left(x^7 (-y)^{-1} \right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy)}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos x + 2 \sin x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos a + \cos b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \right) + \sin \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \right) = \sin(+)(\cos(-) + \cos(+)(\sin(-) + \sin(+)(\cos(-)$$

$$\cos(+)\cos(-) - \sin(+)(\sin(-) + \cos(+)(\cos(-) + \sin(+)(\sin(-)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

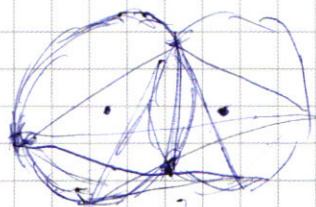
$$2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos 9x &= \cos(2 \cdot 2x) = \\ &= \cos 4x \\ &= 2 \cos^2 2x - 1 \end{aligned}$$

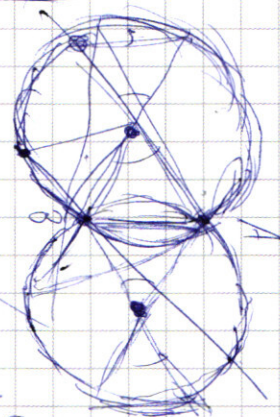
$$2 \cos 5x (\sin x + \cos x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0$$



$$\ln 2 \cdot \ln(x^2 - 1) = (2 \ln(x^2) \cdot \ln x)$$



$$\ln 2 \cdot \ln(x^2 - 1) = \ln 2 \cdot (\ln x^2 - \ln 1) = \ln 2 \cdot (2 \ln x - 0) = 2 \ln 2 \cdot \ln x$$

$$y > 3 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$-y \geq -93 \neq 3^{28} + 3x$$

$$0 > 3 + 3x \neq 3^{29} - 93$$

$$3 + 3x \neq 3^{29} + 93$$

$$3 + 87 < 3^{29} + 93$$

$$x \in [0; 29]$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 64827 \mid 9 \\ \hline 63 \\ \hline 18 \\ 18 \\ \hline 02 \\ - 00 \\ \hline 27 \\ - 27 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7203 \mid 3 \\ \hline 6 \\ \hline 12 \\ 12 \\ \hline 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \mid 49 \\ \hline 196 \\ \hline 441 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$64827 = 9 \cdot 3 \cdot 49 \cdot 49 = 3^3 \cdot 7^4$$

Варианты ① $9 \cdot 3 \cdot 77 \cdot 77 \cdot 1 \cdot 1$

② $9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1$

других нет, т.к.

$7 \cdot 3$ и $7 \cdot 7$ уже не
могут быть цифрами

Теперь посчитаем кол-во таких чисел

$$\textcircled{1} n_1 = \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 30 \cdot 28 = 840$$

$8!$ - кол-во перестановок

$4!$ - кол-во перестановок сотен

$2!$ - кол-во перестановок единиц

$$\textcircled{2} n_2 = \frac{8!}{4! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$$

$4!$ - сотен

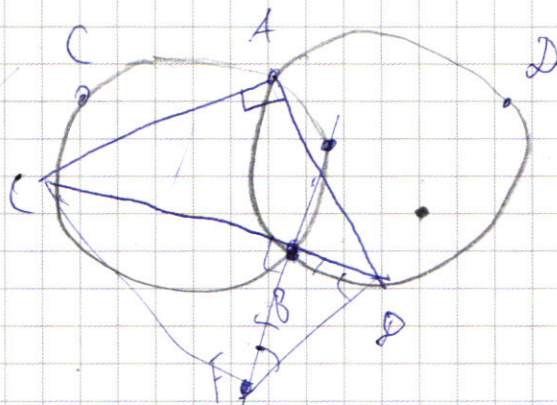
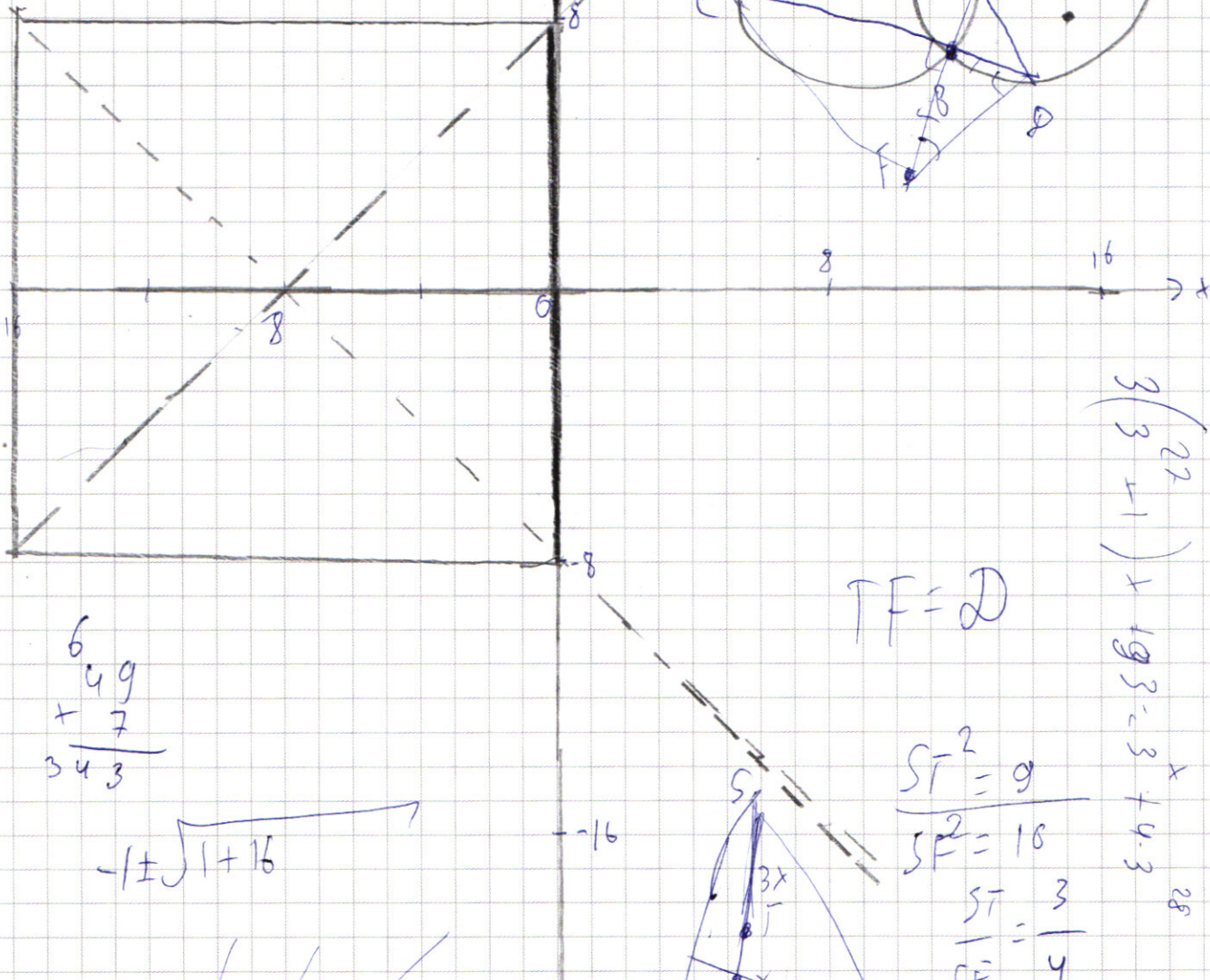
$3!$ - тройки

$$n = n_1 + n_2 = 1120$$

Ответ: 1120

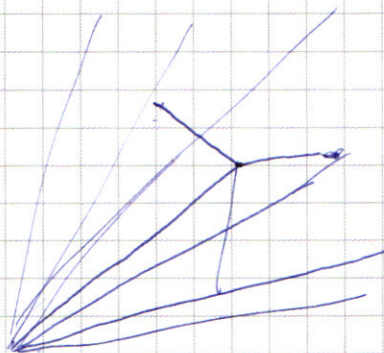
График

y 16 8 0 -8 -16



$$\begin{array}{r} 649 \\ + 7 \\ \hline 343 \end{array}$$

$$-1 \pm \sqrt{1+16}$$



$$TF = 2$$

$$\begin{aligned} \frac{ST^2}{SF^2} &= 9 \\ \frac{ST}{SF} &= 3 \\ \frac{ST}{SF} &= 4 \end{aligned}$$

$$PF =$$

$$ST = 3x$$

$$SF = 4x$$

$$TF = x$$

$$\frac{SF}{TF} = 4$$

$$3(3^2 + 1) + 193 = 3 + 4 \cdot 3$$