

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ $\begin{cases} \left(-\frac{x^4}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} & (1) \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. & (2) \end{cases}$

Рассуждем О.Д.З.: н.к. выражение $\left(-\frac{x^4}{y}\right)^{\ln(-y)}$ имеет смысл, то $-y > 0$, $-\frac{x^4}{y} > 0$, значит, $x > 0$ и $y < 0$;

н.к. выражение $x^{2\ln(xy^2)}$ имеет смысл, то $xy^2 > 0$, $x > 0$, то есть $y > 0$. Следовательно, О.Д.З.: $x > 0$ и $y < 0$.

1) $\left(-\frac{x^4}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$

П.к. при $x, y \in \text{О.Д.З.}$ обе части уравнения положительны, имеем:

$$\ln\left(\left(-\frac{x^4}{y}\right)^{\ln(-y)}\right) = \ln\left(x^{2\ln(xy^2)}\right)$$

$$\ln(-y) \cdot \ln\left(-\frac{x^4}{y}\right) = \ln x \cdot 2\ln(xy^2); \quad \text{П.к. } x > 0, -y > 0, \text{ то } \ln\left(-\frac{x^4}{y}\right) = 4\ln x - \ln(-y).$$

$$\ln(-y) \cdot (4\ln x - \ln(-y)) = \ln x \cdot 2\ln(xy^2). \quad \text{П.к. } x > 0, -y > 0,$$

$$\text{то } \ln(xy^2) = \ln x + 2\ln(-y). \quad \text{Имеем:}$$

$$4\ln(-y) \cdot \ln x - (\ln(-y))^2 = 2\ln(x) \cdot \ln x + 4\ln x \cdot \ln(-y);$$

$$\text{Если } \ln x = a; \ln(-y) = b, \text{ имеем:}$$

$$4ab - b^2 = 2a^2 + 4ab;$$

$$2a^2 + b^2 - 3ab = 0;$$

$$b^2 - 2 \cdot b \cdot \frac{3}{2}a + \frac{9}{4}a^2 - \frac{9}{4}a^2 + 2a^2 = 0;$$

$$(b - \frac{3}{2}a)^2 - \frac{1}{4}a^2 = 0;$$

$$(b - \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a) \cdot (b - \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a) = 0;$$

$$(b-2a)(b-a)=0;$$

$$b=2a \vee b=a;$$

$$\ln(-y)=2\ln x; \vee \ln(-y)=\ln x;$$

$$-y=x^2;$$

$$y=-x.$$

$$y=-x^2$$

2) Если $y=-x^2$, то имеем:

$$x^4 - 2x \cdot x^2 - 3x^2 + 72x - 4x^2 = 0;$$

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 72x = 0; \text{ П.и. } x \in (0; \infty), \text{ то } x > 0, \text{ тогда } x \neq 0.$$

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 72 = 0;$$

обозначим $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 72$.

$$\text{Прим } x=3: 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 72 = 27 - 18 - 12 + 72 = 69 - 39 = 0,$$

то есть $x=3$ - корень.

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 4x + 72 \quad | \quad x-3 \\ \underline{x^3 - 3x^2} \\ -x^2 - 4x \\ \underline{-x^2 - 3x} \\ -4x + 72 \\ \underline{-4x + 12} \\ 60 \end{array}$$

$$(x-3)(x^2+x-4)=0;$$

$$x=3 \vee x^2+x-4=0;$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17;$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}.$$

П.и. $x > 0$, то $x=3 \vee x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$, тогда $y=-9$ или

$$y = -\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2 = -\frac{14+1-2\sqrt{17}}{4} = -\frac{15-2\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{17}-9}{2}.$$

Если $y=-x$, имеем:

$$x^4 - 2x^2 - 3x^2 + 72x - 4x = 0;$$

$$4x^2 - 8x = 0$$

$$4x(x-2)=0.$$

П.и. $x > 0$, то $x \neq 0$, умножим, $x-2=0 \Rightarrow x=2$.
 Тогда $x=2, y=-2$. Ответ: $(2; -2); (3; -9); \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{\sqrt{17}-9}{2}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а) Проведем через точку B перпендикулярную окружностям в точках C_1 и D_1 прямую $C_1D_1 \perp AB$.

Тогда $\angle AC_1B = \angle ACB$; $\angle AD_1B = \angle ADB$
по свойству вписанного

четырёхугольника. ~~$\angle C_1AD_1 =$~~

$$= 180^\circ - \angle AC_1B \quad \angle C_1AD_1 = 180^\circ - \angle AC_1B - \angle AD_1C_1 = C$$

$$= 180^\circ - \angle ACB - \angle ADB = \angle CAD = 90^\circ.$$

Значит, в $\triangle AC_1D_1$ $\angle C_1AD_1 = 90^\circ$. Так

$\angle ABC = 45^\circ$, то AC_1 — диаметр окружности.

Аналогично AD_1 — диаметр окружности. Так, радиусы
окружностей равны и равны r , то $AC_1 = AD_1$, т.е.

$\triangle AC_1D_1$ — равнобедренный прямоугольный, поэтому
 $\angle AD_1C_1 = \angle AC_1D_1 = 45^\circ = \angle ACB = \angle ADB$. Не умаляя общности,

можно считать, что луч AC проходит внутри $\angle BAC_1$

(иначе луч AD проходит внутри $\angle BAD_1$). Пусть $\angle AC_1B = \varphi$.

Тогда $\angle BAC_1 = 180^\circ - \angle BAC = \angle BAC_1 - \angle AC_1B = (180^\circ - \angle C_1BA - \angle AC_1B) - \varphi =$

$$= 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ - \varphi = 45^\circ - \varphi.$$

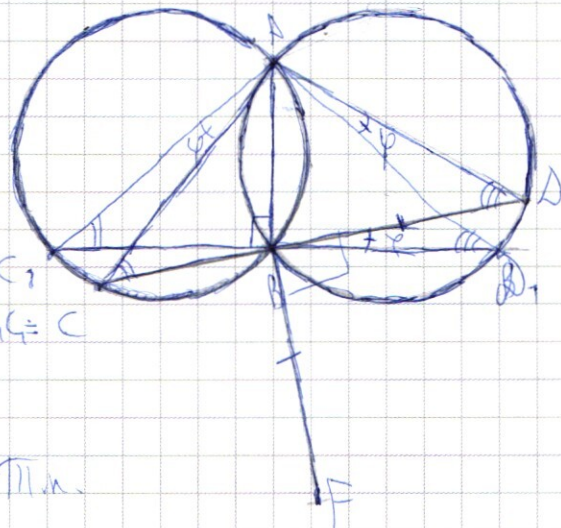
В $\triangle ABC$ по теореме синусов
 $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2r$, где r — радиус окружности. Значит, $BC =$

$$BC = 2r \cdot \sin \angle BAC = 2r \cdot \sin(45^\circ - \varphi) = 2r \cdot \cos(45^\circ + \varphi).$$

А так $\angle DAC = \angle DAC_1$, $\angle AC_1B = \varphi$, то $\angle DAD_1 = \angle AC_1B = \varphi$,

$$\alpha \angle DAB = \angle D_1AB + \varphi = (180^\circ - \angle ABD_1 - \angle AD_1B) + \varphi = 45^\circ + \varphi.$$

В $\triangle ABD$ по теореме синусов: $\frac{BD}{\sin \angle BAD} = 2r \Rightarrow BD = 2r \cdot \sin \angle BAD =$



$= 2R \cdot \sin(45^\circ + \varphi)$. В $\triangle CBF$ по теореме Пифагора:

$$(F^2 = CB^2 + BF^2 = (B^2 + BD^2 = 4R^2 \cdot \cos^2(45^\circ + \varphi) + 4R^2 \cdot \sin^2(45^\circ + \varphi) = 4R^2) \Rightarrow (F = 2R, \text{ — не зада})$$

(Заметим, что если $\angle BAC = 45^\circ + \varphi$, то а для $45^\circ - \varphi$, то тогда $\angle BAD = 45^\circ - \varphi$, и теорема будет точно так же, но $BD = 2R \cdot \sin(45^\circ - \varphi) = 2R \cdot \cos(45^\circ + \varphi)$; а $BC = 2R \cdot \sin(45^\circ + \varphi)$, и $F = 2R$ в любом случае). Таким образом, $(F = 2R = 34$.

б) Найти BC : В $\triangle ABC$, AB — высота, $AC_1 = AD_1$, $\angle C_1AD_1 = 45^\circ$, укажем, B — середина C_1D_1 , и $BC_1 = BD_1 = BD = R \cdot AC_1 \cdot \cos \angle C_1AB = 2R \cdot \cos 45^\circ = R \cdot \sqrt{2} = 14\sqrt{2}$.

Т.к. $BC = 76 < 14\sqrt{2}$, то дуга BC — большая дуга BC .)

в) $\angle BAC < \angle BAC_1 = 45^\circ$, поэтому $\angle BAC = 45^\circ - \varphi$, где $\varphi < \angle CAC_1 = \angle BAD_1 = \angle DAD_1 = \angle CAC_1$ — φ . Т.к. $BC = 2R \cdot \cos(45^\circ + \varphi)$, ищем: (не доказанно, но $\angle BAC = 45^\circ + \varphi$)

$$34 \cdot \cos(45^\circ + \varphi) = 76.$$

$$\cos(45^\circ + \varphi) = \frac{8}{14},$$

$$\cos \varphi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \varphi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8}{14},$$

$$\varphi = \arccos \frac{8}{14} = 45^\circ, \text{ т.к. } \varphi < 45^\circ < 90^\circ.$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2} \Rightarrow \sin(45^\circ + \varphi) = \sqrt{1 - \cos^2(45^\circ + \varphi)} = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{15}{17}.$$

$$\angle ABF = \angle ABD_1 + \angle D_1BF = \angle ABD_1 + \angle DBF - \angle DBD_1 = 90^\circ + 90^\circ - \varphi = 180^\circ - \varphi.$$

По формуле в п. а) $BD = 2R \cdot \sin(45^\circ + \varphi) = 34 \cdot \sqrt{1 - \cos^2(45^\circ + \varphi)} = 34 \sqrt{1 - \left(\frac{8}{14}\right)^2} = 34 \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = 34 \sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{34 \cdot 15}{17} = 30.$

В $\triangle ABF$ по $AB = BC_1 = BD_1 = 14\sqrt{2}$; $BF = BD = 30$. По теореме

косинусов: $AF^2 = AB^2 + BF^2 - 2AB \cdot BF \cdot \cos \angle ABF$; т.к. $\angle ABF = 180^\circ - \varphi$ ищем!

$$AF^2 = 289 \cdot 2 + 900 - 2 \cdot 14\sqrt{2} \cdot 30 \cdot \cos(180^\circ - \varphi)$$

$$AF^2 = 1448 + 7020 \sqrt{2} \cdot \cos \varphi = 1448 + 7020 \sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ + \varphi - 45^\circ) =$$

$$= 1448 + 7020 \sqrt{2} \cdot \left(\cos(45^\circ + \varphi) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(45^\circ + \varphi) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1448 + 7020 \cdot (\cos(45^\circ + \varphi) + \sin(45^\circ + \varphi)) = 1448 + 1020 \cdot \left(\frac{8}{14} + \frac{15}{14} \right) = 1448 + 1020 \cdot \frac{23}{14} = 1448 + 60 \cdot 23 = 1448 + 1380 = 2828.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 б) Т.к. $AP^2 = 2858$, то $AP = \sqrt{2858}$. $\triangle ACC_1$, $\angle ACC_1 = 90^\circ$,
 AC_1 — диаметр, $\angle C_1AC = \varphi \Rightarrow AC = AC_1 \cdot \cos \varphi = 2R \cdot \cos \varphi = 34$.

$$\cdot (\cos(45^\circ + \varphi) - \sin 45^\circ) = 34 \cdot (\cos(45^\circ + \varphi) \cdot \cos 45^\circ + \sin(45^\circ + \varphi) \cdot \sin 45^\circ) =$$

$$= 34 \cdot \left(\frac{8}{14} \cdot \frac{1}{2} + \frac{15}{14} \cdot \frac{1}{2} \right) = 74 \sqrt{2} \cdot \frac{23}{14} = 23\sqrt{2}.$$

В $\triangle ACF$ $AC = 23\sqrt{2}$; $AF = \sqrt{2858}$; $FC = 34$.

По формуле Герона $S_{ACF} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где
 $p = \frac{AC+CF+FA}{2}$; $a = AC$, $b = FC$; $c = AF$.

Имеем:

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)}$$

$$\cdot (a+b-c)(b+c-a) = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b)^2 - c^2} \cdot (a-b)^2 + c^2 = 1$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(a^2 + 2ab + b^2 - c^2)(a^2 - 2ab + b^2 + c^2)} = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b)^2(a-b)^2 - c^2((a+b)^2 + (a-b)^2) + c^4}$$

$$+ c^4 = \frac{1}{4} \sqrt{(a^2 - b^2)^2 - c^2(2a^2 + 2ab + b^2 + b^2 - 2ab) + c^4} =$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4} = \frac{1}{4} \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{\text{т.к. } a = 23\sqrt{2}; b = 34; c = \sqrt{2858}, \text{ имеем:}}$$

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(529 - 2)^2 + (34)^4 + (2858)^2 - 2(34^4 + 2858^2 + 529 \cdot 2^2)}$$

$$b^2 = 7756, c^2 = 2858 \cdot 2858 = 8168164 = 4 \cdot (2042041)$$

№6 б) Найдем $\cos \angle FCB$: $\cos \angle FCB = \frac{FC}{CF} = \frac{75}{34} = \frac{8}{14} = \cos(45^\circ + \varphi)$.

Т.к. $45^\circ + \varphi \in [0^\circ; 90^\circ]$, $\angle FCB \in [0^\circ; 90^\circ]$, то т.к. $\cos \angle FCB = \cos(45^\circ + \varphi)$, то $\angle FCB = 45^\circ + \varphi \Rightarrow \angle ACF = \angle ACB + \angle BCF = 45^\circ + 45^\circ + \varphi = 90^\circ + \varphi$.

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot 34 \cdot \sin(90^\circ + \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot 34 \cdot \cos \varphi. \text{ Т.к. в } \triangle ACC_1 \text{ } AC_1 \text{ — диаметр окружности,}$$

то $\angle ACC_1 = \varphi$, то $AC = AC_1 \cdot \cos \varphi = 2R \cdot \cos \varphi = 34 \cos \varphi$.

$$\begin{aligned} S_{ACF} &= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot 34 \cdot \cos p = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot \cos p \cdot 34 \cdot \cos p = 14 \cdot 34 \cdot \cos^2 p = \\ &= 289 \cdot 2 \cdot \cos^2 p = 578 \cdot (\cos(45^\circ + p) - 45^\circ) = 548 \cdot \left(\cos(45^\circ + p) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(45^\circ + p) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 548 \cdot \left(\frac{8}{14} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{15}{14} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \cdot 14 \cdot 14 \cdot \frac{23}{14} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 14 \cdot 23 \cdot \sqrt{2} = \\ &= (20 \cdot 3)(20 \cdot 3) \cdot \sqrt{2} = (400 - 9) \cdot \sqrt{2} = 391 \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Übungen: a) $(F=34; \quad d) S=397 \sqrt{2}$

7) ~~И~~ Запомним, что $64824 = 24 \cdot 99.99 = 3 \cdot 4^4$

П.п. П.п. Восьмизначное число $a_8a_7 \dots a_2a_1$ имеет произведение цифр, равное $3^3 \cdot 4^4$, то каждая цифра — делитель числа $3^3 \cdot 4^4$. П.п. $4 \cdot 3 > 9$, $4 \cdot 4 > 9$, то цифр, ~~равных~~ ^{являющихся кратными} $3 \cdot 4$ или $4 \cdot 4$, нет. Значит, т.к. произведение цифр делится на 4^4 , то среди восьми цифр ровно 4 равны „4“. Так как произведение четырех цифр равно $\frac{3^3}{4}$, а $24 > 9$, то должно три из них равны „3“, одна равна „1“; либо одна из них равна „3“, другая равна „9“, а две оставшихся равны „1“. ~~При этом~~ ~~сразу~~ ~~в~~ ~~се~~ ~~из~~ ~~чисел~~ ~~восьмизначных~~ вида а)

Всего $\frac{8!}{3! \cdot 4!}$, т.к. всего перестановок восьми 21-ов $\frac{8!}{(четыре "4")}$ и 3 одинаковых, $(три "3")$
а т.к. если ~~то~~ цифра из одинаковых и 3 одинаковых,
то все сходило нужно разделить на перестановки цифр
в этих группах. Число вида d , $\frac{8!}{4! 2! 1!}$, т.к. всего
перестановок 8 элементов $8!$, есть цифры из четырех
одинаковых (четыре "4") и двух одинаковых (две "2").
При этом никакое число вида d не равно никакому
числу вида d , поэтому всего уникальных чисел:

every bug of, not many beers available when:

$$\frac{8!}{3! \cdot 4!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{6 \cdot 4!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} = 40 \cdot 4 + 720 \cdot 4 = 280 \cdot 4 = 1120$$

Problem: 1120 was used.

Problem: 7.720 ~~was~~ unklar.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \cos 4x + \cos 3x + \sin 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0; \\
 & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos 4x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin 4x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin 3x + \cos 4x = 0; \\
 & \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 4x + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin 4x + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 3x - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin 3x + \cos 4x = 0; \\
 & \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0; \\
 & 2 \cdot \sin \frac{4x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{4x + \frac{\pi}{4}}{2} + 2 \cos \frac{3x + \frac{\pi}{4} + 4x}{2} \cdot \cos \frac{4x - 3x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0; \\
 & \sin \frac{28x + \pi}{8} \cdot \cos \frac{28x + \pi}{8} + \cos \frac{28x + \pi}{8} \cdot \cos \frac{4x - \pi}{8} = 0; \\
 & \cos \frac{28x + \pi}{8} \cdot \left(\sin \frac{28x + \pi}{8} + \cos \frac{4x - \pi}{8} \right) = 0; \\
 & \cos \frac{28x + \pi}{8} = 0(1) \quad \vee \quad \sin \frac{28x + \pi}{8} = -\cos \frac{4x - \pi}{8} (2)
 \end{aligned}$$

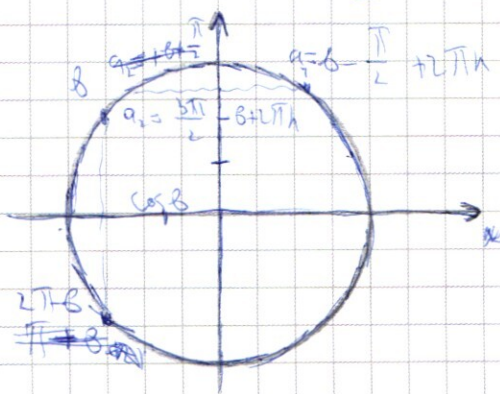
$$\begin{aligned}
 (1): \quad & \cos \frac{28x + \pi}{8} = 0; \\
 & \frac{28x + \pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \\
 & 28x + \pi = 4\pi + 8\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 28x = 3\pi + 8\pi n, \\
 & x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, \quad n \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

$$(2): \quad \sin \frac{28x + \pi}{8} = -\cos \frac{4x - \pi}{8}.$$

Как известно, $\sin a = -\cos b \Leftrightarrow a = \frac{3\pi}{2} - b + 2\pi n \vee a = \frac{3\pi}{2} - b + 2\pi n$;

$$\begin{aligned}
 & \vee a = b + \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \\
 & \text{значит, } \frac{28x + \pi}{8} =
 \end{aligned}$$



Ищем:
$$\begin{cases} \frac{28x+\pi}{8} = \frac{4x-\pi}{8} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ \frac{28x+\pi}{8} = \frac{3\pi}{2} - \frac{4x-\pi}{8} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

1)
$$\frac{28x+\pi}{8} = \frac{4x-\pi}{8} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$28x+\pi = 4x-\pi - 4\pi + 16\pi n;$$

$$24x = -6\pi + 16\pi n;$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2)
$$\frac{28x+\pi}{8} = \frac{3\pi}{2} - \frac{4x-\pi}{8} + 2\pi n;$$

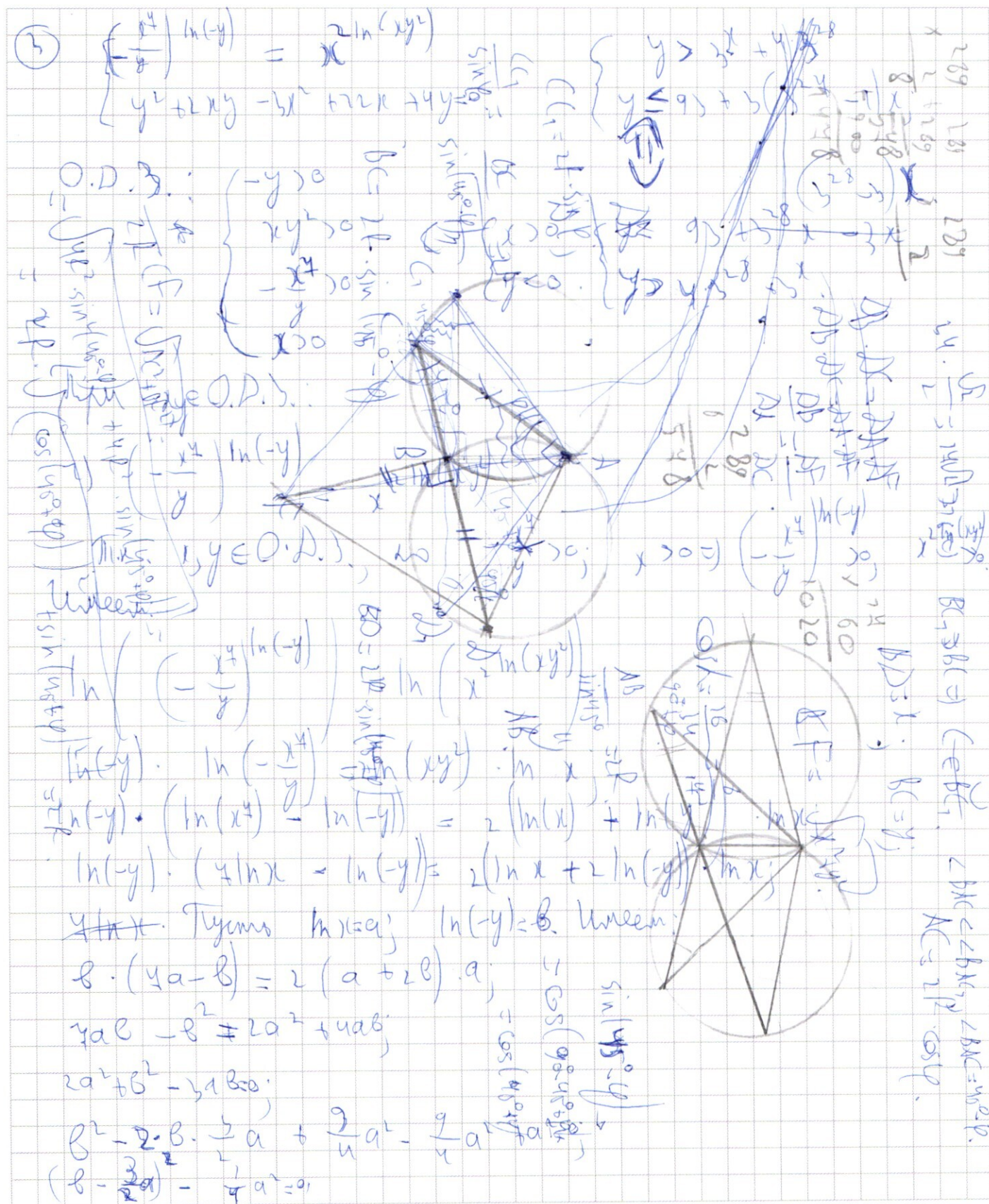
$$28x+\pi = 12\pi - 4x+\pi + 16\pi n;$$

$$32x = 12\pi + 16\pi n;$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi n}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\left(b - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\right) \left(b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\right) = 0;$$

$$(b - 2a)(b - a) = 0;$$

$$b = 2a \vee b = a;$$

$$\ln(-y) = x^{2 \ln x} \vee \ln(-y) = \ln x.$$

$$y = -x^2 \vee y = -x.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4.$$

$$f'(x) = 0; D = 4 + 25 = 29;$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{29}}{6} \vee x = -\frac{1}{3}.$$

$$2) \text{ а) если } y = -x^2;$$

$$y'' + 2xy' - 3x^2 \ln x + 4y = 0; f' \rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x}$$

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0;$$

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 12x = 0;$$

$$x(x^3 - 2x^2 - 4x + 12) = 0$$

$$x = 1; 7 - 2 - 4 + 12 = 7.$$

$$x = 0 \vee \pi, x \in (0, 2), \text{ но } x > 0, x \neq 0. \text{ Имеем:}$$

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 12 = 0.$$

$$x = 2; 8 - 8 - 8 + 12 = -2.$$

$$x = 3; 27 - 18 - 12 + 12 = 0.$$

$$\text{Пусть } f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 12.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4.$$

$$x = 1;$$

$$d) \text{ если } y = -x.$$

$$x^2 - 2x^2 - 3x^2 + 12x - 4x = 0;$$

$$f'(x) =$$

$$-4x^2 + 8x = 0;$$

$$4x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \vee \pi, x \in (0, 2), \text{ но } x > 0, x \neq 0. \text{ Имеем:}$$

$$x = 2 = 0;$$

$$x = 2.$$

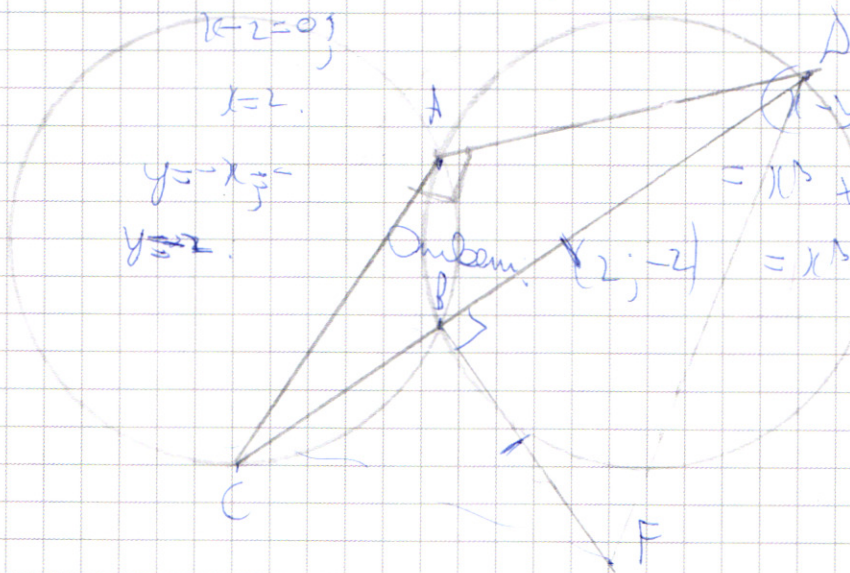
$$y = -x = -2.$$

$$y = 2.$$

$$(x - 3)(x^2 + x - 4) =$$

$$= x^3 + x^2 - 4x - 3x^2 - 3x + 12 =$$

$$= x^3 - 2x^2 - 4x + 12.$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 4x + \cos 3x + \sin 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0;$$

$$2 \cdot \cos \frac{4x+3x}{2} \cdot \cos \frac{4x-3x}{2} + 2 \sin \frac{4x+3x}{2} \cdot \cos \frac{4x-3x}{2} + \sqrt{2} \cdot (2 \cos 2x - 1) = 0;$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 5x + 2 \sin \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$\sin x + \cos 3x = \cos 5x - \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 3x - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin 3x \right)$$

$$\cos 4x + \sin 4x = \sqrt{2} \cdot \cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x \right) = 0$$

$$\cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0;$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0;$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x = \cos (x+4x) = \cos x \cos 4x - \sin x \sin 4x.$$

$$\cos 4x = \cos (8x-x) = \cos 8x \cos x + \sin 8x \sin x$$

$$y^2 + 2xy - 5x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 + 2xy + x^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$\cos 4x + \cos 3x + \sin 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0.$$

$$\cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x = \cos (4x+4x) = \cos 4x \cdot \cos 3x - \sin 4x \cdot \sin 3x$$

$$\sin 4x \cdot \sin 4x = \sin (3x+4x) = \cos 3x \cdot \sin 4x + \cos 4x \cdot \sin 3x.$$

$$\cos 4x \cdot \cos 3x - \sin 4x \cdot \sin 3x + \cos 3x + \sin 4x \cdot \cos 3x + \cos 4x \cdot \sin 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0;$$

$$\cos 3x (\cos 4x + 1) - \sin 4x \cdot \sin 3x + \sin 4x \cdot \cos 3x + \sin 3x (\cos 4x + 1) + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$\cos 3x \cdot 2 \cos^2 2x - \sin 4x \cdot \sin 3x + \sin 4x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot (-2 \sin^2 2x) + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$2(\cos 3x \cdot \cos^2 2x + \sin 3x \cdot \sin^2 2x) + \sin 4x (\cos 3x - \sin 3x) + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$2858 \left| \begin{array}{l} x^4 - 2x \cdot x^2 - 3x^2 + 12x + 12 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} = 12 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} = \infty \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} x > 4x^2 \\ y < 0 \end{cases} \quad \ln(-y) \cdot \ln\left(-\frac{x^4}{y}\right) = \ln x \cdot 2 \ln(xy) \\ \ln(-y) \cdot (\ln x - \ln(-y)) = \ln x \cdot 2(\ln x + \ln(-y))$$

$$2 \ln^2 x + \ln^2(-y) - 3 \ln x \cdot \ln(-y) = 0$$

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 12x + 12 = 0; 2a^2 + b^2 - 3ab = 0 \quad 2858 \quad 60 \quad 1448$$

$$(2a - \frac{3b}{4})^2 - \frac{1}{8}b^2 = 0 \quad 2858 \quad 1538 \quad 42380$$

$$(b - \frac{3}{2}a)^2 - \frac{1}{4}a^2 = 0 \quad 2858 \quad 1538 \quad 42380$$

$$b = 2a \vee b = a; \quad \ln x = \ln(-y) \quad x = -y^{\frac{1}{4}} \quad y(1) > 0 \Rightarrow y(1) > 0 \vee x = 1$$

$$-y = x^4 \quad x^4 - 2x^2 + 4x + 12 = 0; 7429 \quad x = -2; -8 - 2 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 12 = 0$$

$$x = -2; -8 - 8 - 14 + 12 = 0; 2858 \quad 1538 \quad 42380$$

$$\cos 4x + \cos 3x + \sin x - \sin 3x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0,$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 4x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 4x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 3x +$$

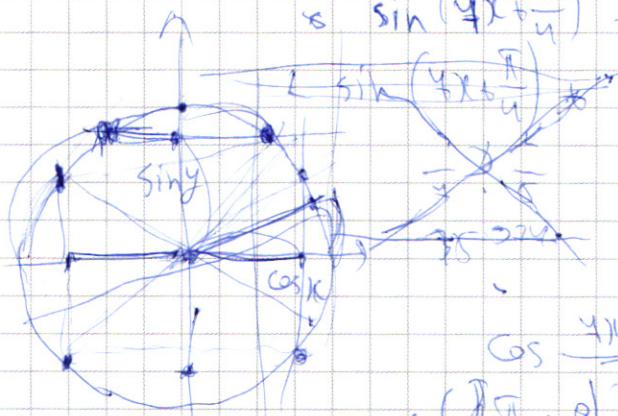
$$+ \cos 4x = 0,$$

$$\cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0;$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0;$$



$$2 \sin\left(\frac{4x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{4x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) +$$

$$+ 2 \cos \frac{4x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0;$$

$$\cos \frac{4x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \quad \vee$$

$$\sin \frac{4x + \frac{\pi}{4}}{2} + \cos \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\cos \theta \cdot \frac{4x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha = \sin \theta.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta = \sin \alpha.$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$B = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \vee \quad B = \frac{\pi}{2} + \alpha + 2\pi n$$

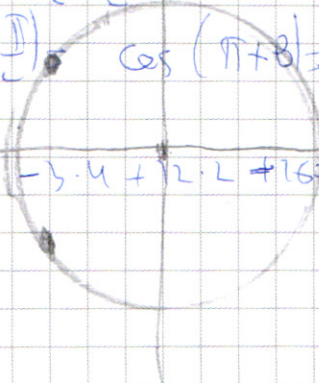
$$B = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\pi + \theta - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \theta = \cos \theta.$$

$$2\pi - \theta - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\sin\left(-\theta - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\pi + \theta\right) = -\cos \theta.$$

$$4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 12 \cdot 2 + 16 = 0$$



$$4 + 8 \quad 76 = 76 - 72 + 24 - 16 = 0.$$

$$4 - 8 - 72 + 24 - 16 = 0$$

$$28 -$$