

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

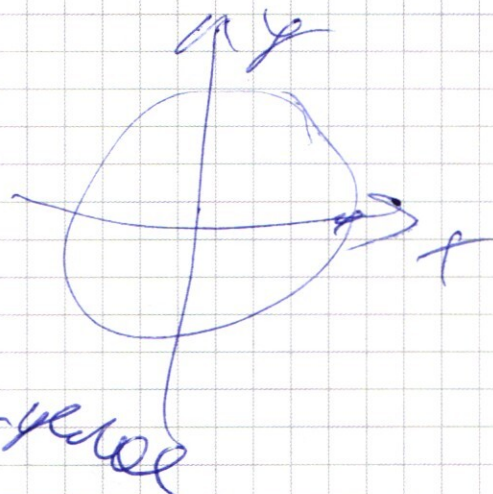
$$-2 \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) = 0; \text{ тогда}$$

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3x}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{8} + \frac{3x}{2} = \pi k$$

$$3x = 2\pi k - \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{2\pi k}{3} - \frac{\pi}{12}; k - \text{целое}$$



$$2) \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi l$$

$$2\pi l - \pi l = 3x$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi l; l - \text{целое}$$

ответ: $x_1 = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}; k - \text{целое}$

$$x_2 = \frac{2\pi k}{3} - \frac{\pi}{12}; k - \text{целое}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi l; l - \text{целое}$$

$$\sqrt{2} \cos 7x + \cos 3x + \sin 4x - \sin 3x + \sqrt{5} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos(5x) \cos(2x) + 2 \sin(2x) \cos(5x) + \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cos(5x)(2 \cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(2 \cos(5x) + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$1) \cos 2x + \sin 2x = 0 \quad \text{или} \quad \sin 2x = 0; \text{ тогда } \cos 2x = 1$$

$$\tan(2x) = -1 \quad \sin 2x \neq 0$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z}$$

$$2) 2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x) = -2 \cos 5x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}} - \frac{\sin 2x}{\sqrt{2}} \right) = -\sqrt{2} \cos 5x$$

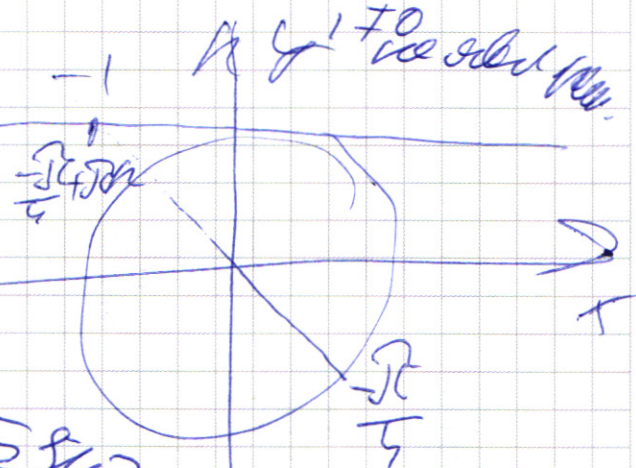
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos 2x}{\cos \frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin 2x}{\sin \frac{\pi}{4}} = \cos 5x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos 5x \quad \text{или}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \cos(5x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) - \cos(5x) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) - \cos(5x) = 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sqrt{1 - \frac{x^2}{y}} \ln(-y) = x^2 \ln(xy^2) & (1) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

Р-ние ур-ние (1)

$$\ln(-y) \ln\left(1 - \frac{x^2}{y}\right) = \ln(x^2 \ln(xy^2))$$

$$\begin{aligned} \ln(-y) (2 \ln(x) - \ln(-y)) &= 2 \ln(x) (\ln x + 2 \ln|y|) \\ -\ln^2(-y) + 2 \ln(x) \cdot \ln(-y) &= 2 \ln^2 x + 4 \ln(-y) \ln x \\ \ln^2(-y) + 2 \ln^2 x - 3 \ln(-y) \ln(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\ln(-y) = a; \ln x = b$$

$$a^2 + 2b^2 - 3ab = 0$$

$$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2b \\ a_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(-y) = 2 \ln(x) \\ \ln(-y) = \ln(x) \end{cases}$$

Р-ние ур-ние (2)

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 + 2y(12x+2) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$D = (12x+2)^2 + 3x^2 - 12x = 4x^2 + 48x + 16 + 3x^2 - 12x = 7x^2 + 36x + 16$$

$$= 16x^2 - 32x + 16 = 16(x^2 - 2x + 1) = 16(x-1)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{-2x-4 \pm 4(x-1)}{2} = -x-2 \pm 2(x-1)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= -x-2+2x-2 = x-4 \\ y_2 &= -x-2-2x+2 = -3x \end{aligned}$$

3-минутная
1) $\begin{cases} \ln(-y) = 2 \ln x \\ y = -3x \end{cases}$

$$\ln(3x) = 2 \ln x$$

$$3x = x^2$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0 \text{ и } x = 3$$

$$y = 0 \quad y = -9$$

т.к. $y < 0$ и $x > 0$, то
 $x = 0$; $y = 0$ не явл.
реш.

2) $\begin{cases} \ln(-y) = 3 \ln x \\ y = x - 4 \end{cases}$

$$\ln(4-x) = \ln(x^2)$$

$$4-x = x^2$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17} - 4}{2}$$

$$\text{т.к. } \sqrt{17} < \sqrt{21}$$

то эта

м.к. не явл. реш.

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} - 4$$

не явл. реш.
т.к.
 $x > 0$ не

3) $\begin{cases} \ln(-y) = \ln x \\ y = -3x \end{cases}$

$$\ln(3x) = \ln x$$

$$3x = x$$

$$2x = 0$$

не явл. реш.

т.к. $x \neq 0$

4) $\begin{cases} \ln(-y) = \ln x \\ y = x - 4 \end{cases}$

$$\ln(4-x) = \ln x$$

$$4-x = x$$

$$2x = 4$$

$$x = 2 \Rightarrow$$

$$y = 2 - 4 = -2$$

явл. реш.

Ответ: $x_1 = 3$; $y_1 = -9$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; y_2 = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x_3 = 2; y_3 = -2.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5. \begin{cases} |x+y+p| + |x-y+p| = 16 & (1) \\ (|x|-p)^2 + (|y|-15)^2 = 25 & (2) \end{cases}$$

Решим уравнение (1)

$$|x+y+p| + |x-y+p| = 16; \text{Решим 4 случая}$$

$$1) \text{ Пусть } \begin{cases} x+y+p \geq 0 \\ x-y+p \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -(p+x) \\ y \leq x+p, \text{ тогда} \end{cases}$$

$$x+y+p + x-y+p = 16$$

$$2x + 16 = 16$$

$$2x = 0$$

$$\underline{x=0} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -p \\ y \leq p \end{cases} \Rightarrow -p \leq y \leq p$$

$$2) \text{ Пусть } \begin{cases} x+y+p > 0 \\ x-y+p < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > -(p+x) \\ y > p+x \text{ тогда} \end{cases}$$

$$x+y+p - x+y-p = 16$$

$$2y = 16; \underline{y=p} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p > -p-x \\ p > p+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 > -x \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -16 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\underline{0 < x < -16}$$

$$\underline{-16 < x < 0}$$

$$3) \text{ Пусть } \begin{cases} x+y+p < 0 \\ x-y+p > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -y-p \\ x > y-p, \text{ тогда} \end{cases}$$

$$-x-y-p+x-y+p=16$$

$$-2y=16$$

$$y=-8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -(-8)-p \\ x > -8-p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > -16 \end{cases}$$

$$4) \text{ Пусть } \begin{cases} x+y+p < 0 \\ x-y+p < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < -p-x \\ y > x+p, \text{ тогда} \end{cases}$$

$$-16 < x < 0$$

$$y-x-p-x-y-p=16$$

$$-2x-16=16$$

$$-2x=32$$

$$x=-16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y < -p+16 \\ y > -16+p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < p \\ y > -p \end{cases}$$

$$-p < y < p$$

Решим уравнение (2)

$$(x-p)^2 + (y-15)^2 = a; \text{ Рядом с нулем}$$

$$1) x \geq 0; y \geq 0$$

$$(x-p)^2 + (y-15)^2 = a$$

Окр-ств

в I четверти

центр
(p, 15)

$$2) x < 0; y < 0$$

$$(x+p)^2 + (y+15)^2 = a$$

Окр-ств

в III четверти

центр

(-p, -15)

$$3) x > 0; y < 0$$

$$(x-p)^2 + (y+15)^2 = a$$

Окр-ств

в IV четверти

центр

(p, -15)

$$4) x < 0; y > 0$$

$$(x+p)^2 + (y-15)^2 = a$$

Окр-ств

в II четверти

центр

(-p, 15)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin\left(\frac{9x+5x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{9x-5x}{2}\right) =$$

$$= -2 \sin(7x) \sin(2x)$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin(7x) \cos(2x)$$

$$-2 \sin(7x) \sin(2x) + 2 \sin(7x) \cos(2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin(7x) (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin(7x) (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$1) \cos 2x = \sin 2x$$

$$2) \sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$$

n - любое

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$



черновик



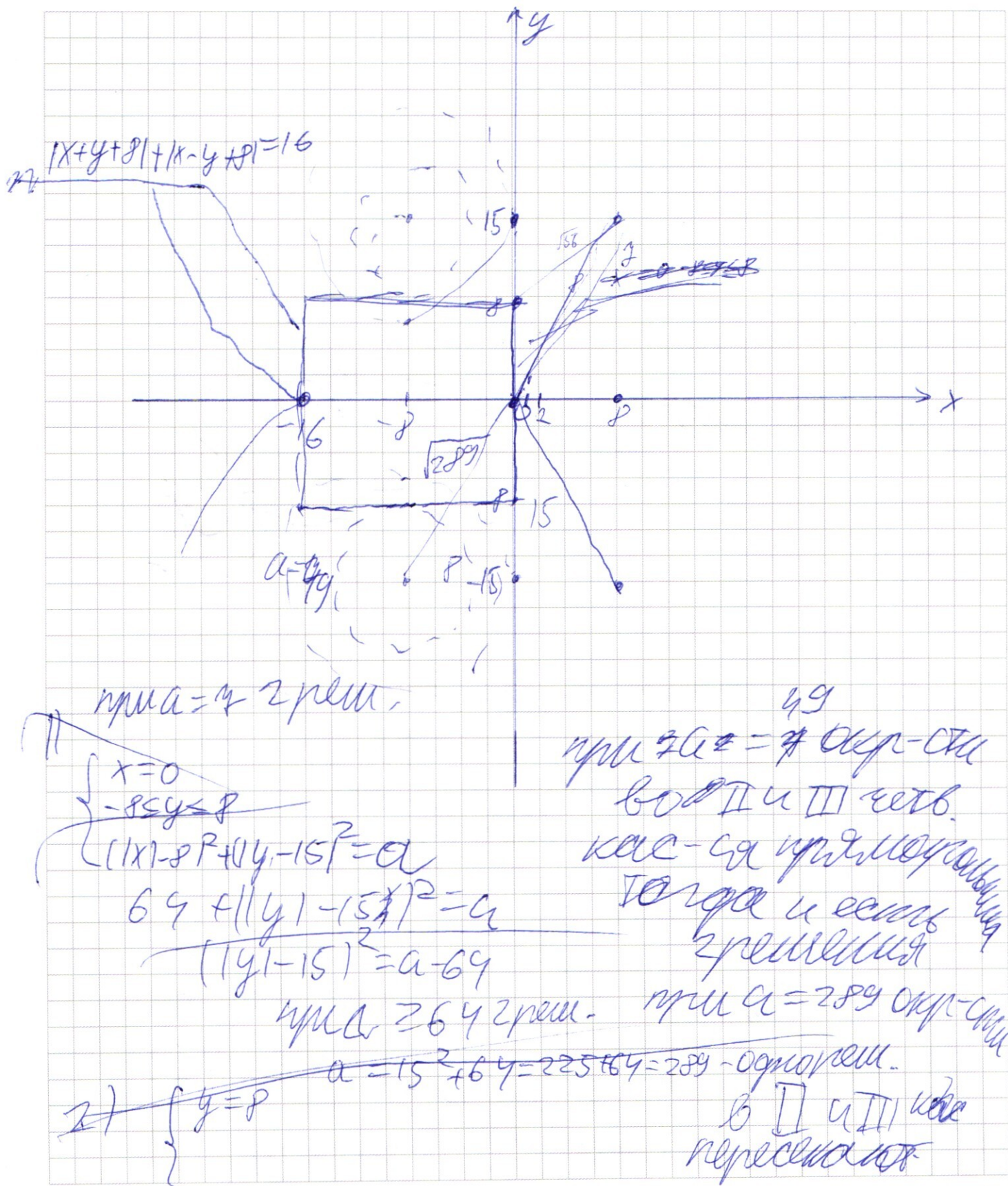
чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



прямоугольник в точках $(-16; 0)$ и $(0; 0)$
 а окружности в I и IV в точке $(0; 0)$

Ответ: $a = 49$,
 $a = 279$.

н1.

64827 Разложим число 64827 на простые множители.

$$64827 = 3^4 \cdot 3^3 \cdot 1; \text{ т.к. } 7 \cdot 7 = 49 \text{ и } 7 \cdot 3 = 21; \text{ и } 64827 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 64827 \cdot 3 \\ 21609 \cdot 3 \\ 7203 \cdot 7 \\ 1029 \cdot 7 \\ 147 \cdot 7 \\ 21 \cdot 7 \\ 3 \cdot 3 \end{array}$$

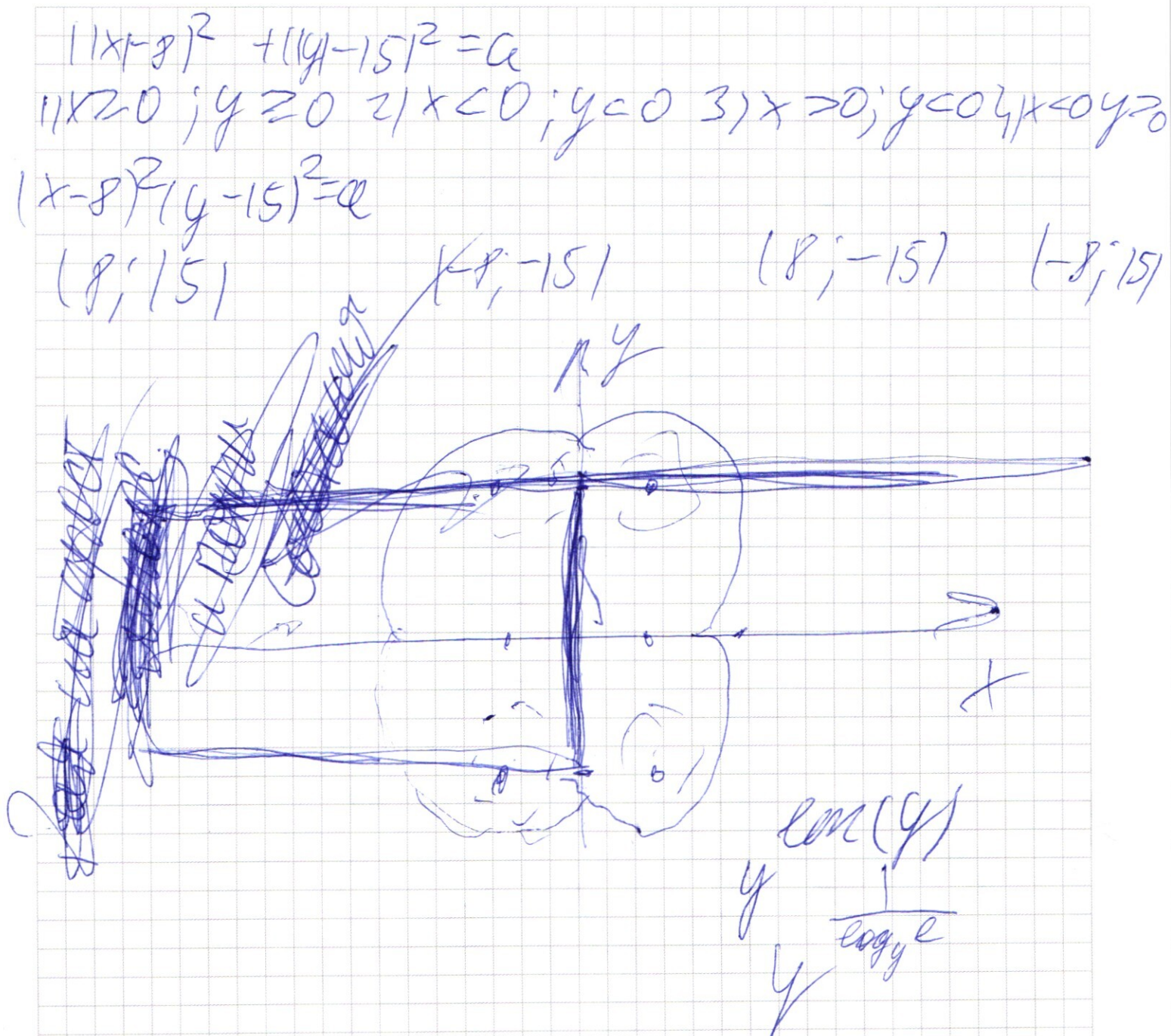
1) кол-во вариантов $8!$
 1 случай $4!3!$

2) кол-во вариантов $8!$
 2 случая $4!2!$ сложим вар-ты

$$\frac{8!(2!+3!)}{4!(2!3!)} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 6}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 4 = 480 \text{ и } 120$$

Ответ: 600 вариантов

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

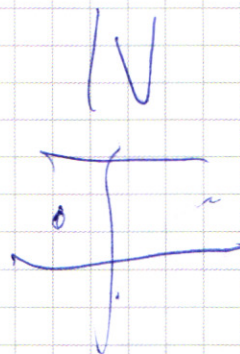


$$11) x + y + p + |x - y + p| = 16$$

$$a) \begin{cases} x + y + p \geq 0 & x - y + p \geq 0 \\ x + y \geq p - x & y \leq p + x \end{cases}$$

~~10) $x + y + p = 16$~~
 ~~$2x + 16 = 16$~~
 ~~$2x = 0$~~
 ~~$x = 0$~~

$$y = p.$$



$$b) \begin{cases} x + y + p > 0 & x - y + p < 0 \end{cases}$$

$$x + y + p - x + y - p = 16$$

$$2y = 16$$

$$y = 8$$

$$x > -16$$

$$x < 0$$

$$-16 < x < 0$$



$$c) \begin{cases} x + y + p < 0 \end{cases}$$

$$x - y + p > 0$$

$$y < -(x + p)$$

$$y < x + p$$

$$x - y + p - x - y - p = 16$$

$$-2y = 16$$

$$y = -8$$

$$x < 0$$

$$x > -16$$

$$2) \begin{cases} x + y + p < 0 \end{cases}$$

$$x - y + p < 0$$

$$-2x = 32$$

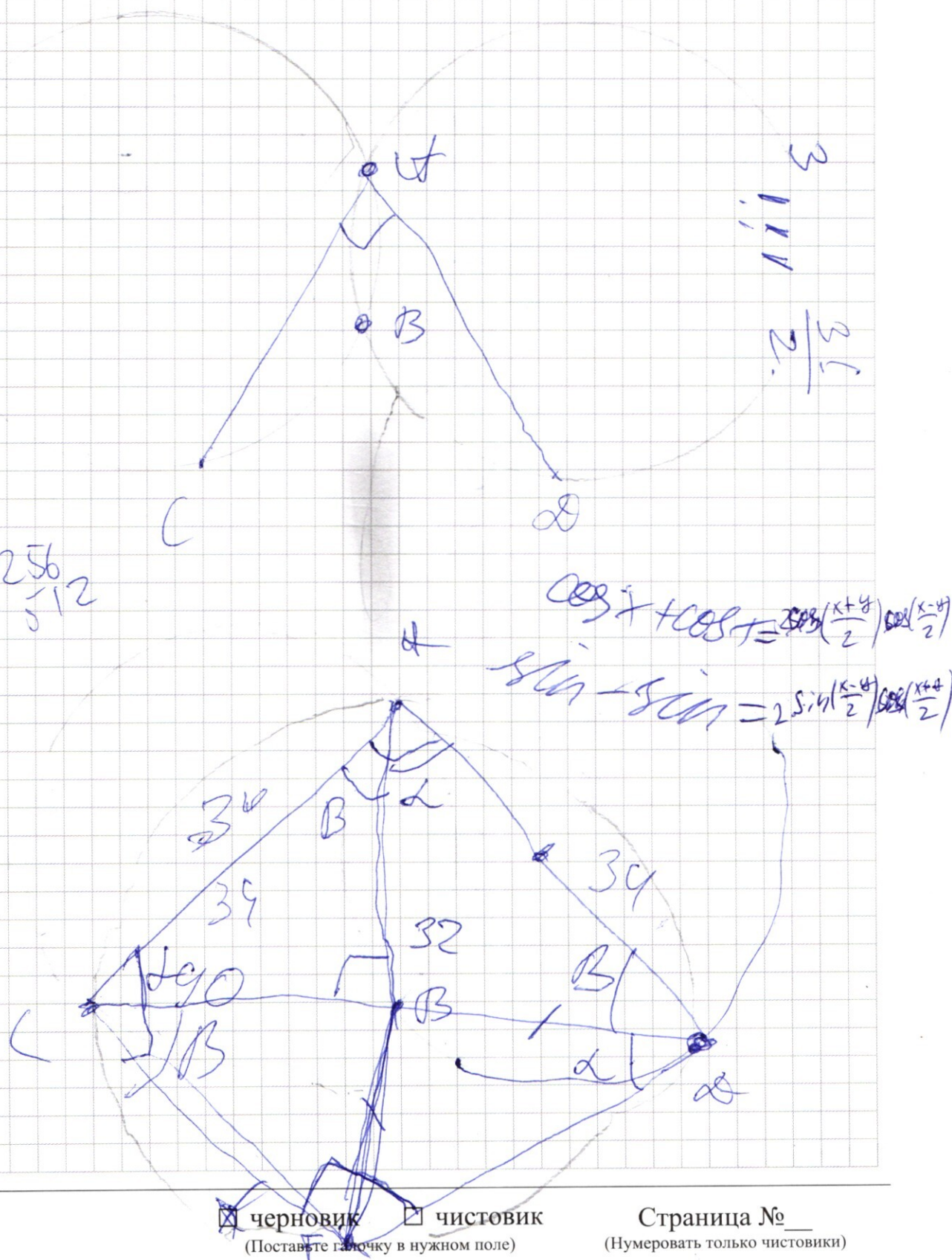
$$x = -16$$

$$y - x - p - p - y - x = 16$$

$$\begin{cases} y + p - 16 < 0 \\ y - p < 0 \\ y < p \\ -y - p < 0 \\ y > -p \\ -p < y < p \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

16 $\frac{256}{512}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[illegible]

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{2x}$$

$$y \leq 93 + 3(3^{2x} - 1/x)$$

$$\begin{array}{r} 93 \overline{) 3} \\ \underline{3} \\ 31 \\ \underline{31} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ 32 \\ 35 \\ 124 \\ 3 \end{array}$$

$$\frac{3^x + 4 \cdot 3^{2x}}{2} \geq \sqrt{3^{2x+4}}$$

$$(3^3 + 4) / 3$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{2x} \geq \sqrt{3^{2x+4}} \cdot 4$$

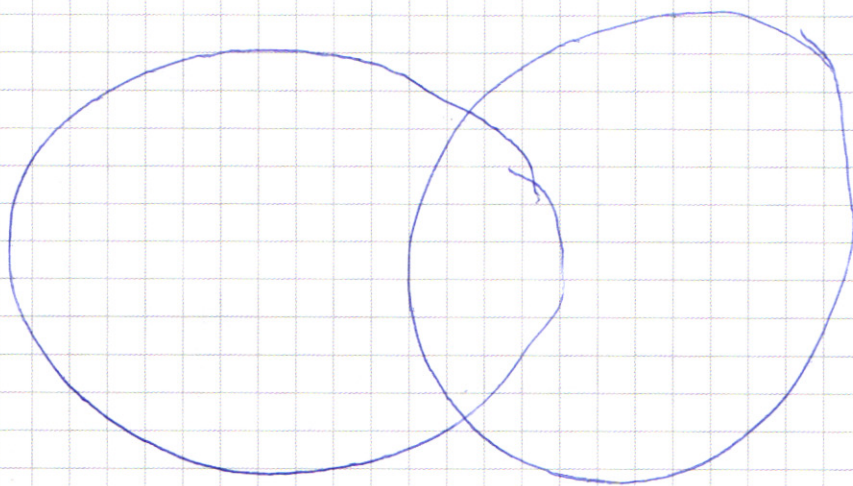
$$3^x + 4 \cdot 3^{2x} \geq \sqrt{3^{32}} \cdot 4$$

$$3^x + 4 \cdot 3 \geq 3^{16} \cdot 4$$

$$14 + \frac{x}{2}$$

$$3 \cdot 4$$

$$y \leq 3(3^3 + 4) / 3 + 3(3^{2x} - 1/x)$$



Рег. №: M11-ВГ-0082

Класс участия: 11 класс

Место проведения: Волгоград

Дата проведения: 22 февраля 2020 г.

Время начала (местное): 12:00



Олимпиада школьников «Физтех» по математике

Заключительный этап 2020 г.

Анкета участника

Данная анкета предъявляется участником вместе с документом, удостоверяющим личность, при входе на олимпиаду. По окончании написания олимпиады анкета обязательно вкладывается в работу. Работа без предоставления анкеты недействительна и не проверяется. Анкета без подписей недействительна.

<u>Бондарев</u> Фамилия	<u>Николай</u> Имя	<u>Николаевич</u> Отчество	<u>06.03.2002</u> Дата рождения	<u>17 лет</u> Возраст
<u>Российская Федерация</u> Страна	<u>Волгоградская обл</u> Регион	<u>г Волгоград</u> Населенный пункт		
<u>Паспорт гражданина РФ</u> Документ, удостоверяющий личность	<u>60 16</u> Серия	<u>936646</u> Номер	<u>11.04.2016</u> Дата Выдачи	<u>610-026</u> Код Подразделения
<u>Российская Федерация</u> Страна школы	<u>Волгоградская обл</u> Регион Школы	<u>г Волгоград</u> Населенный Пункт Школы		
<u>11 класс</u> Класс обучения	<u>МОУ ГИМНАЗИЯ № 4</u> Полное название образовательного учреждения			
<u>+7 937 726 32 66</u> Мобильный телефон	<u>nikolauslllllll@gmail.com</u> E-mail			

Согласие на обработку персональных данных

Я согласен на сбор, хранение, использование, распространение (передачу) и публикацию своих персональных данных, а также олимпиадных работ, в том числе в сети "Интернет". Я согласен, что мои персональные данные будут ограничено доступны организаторам олимпиады для решения административных и иных рабочих задач. Я проинформирован, что под обработкой персональных данных понимаются действия (операции) с персональными данными в рамках выполнения Федерального закона №152 от 27 июля 2006 г., конфиденциальность персональных данных соблюдается в рамках исполнения Операторами законодательства Российской Федерации. Я согласен на получение информационных писем от организаторов олимпиады на E-mail, указанный при регистрации.

Я подтверждаю, что все указанные мной данные верны и в указанном виде будут использованы при печати диплома олимпиады в случае его получения. Я согласен на передачу данных в государственный информационный ресурс о детях, проявивших выдающиеся способности, созданный во исполнение Постановления Правительства Российской Федерации № 1239 от 17 ноября 2015 г.

Я подтверждаю, что ознакомлен с Положением и Регламентом проведения олимпиады школьников "Физтех", а также с правилами оформления и условиями проверки работы.

«22» февраля 2020 г.

Подпись участника олимпиады

Кирилло В. М.

ФИО законного представителя

мать

Степень родства

Подпись

Подпись законного представителя

Анкета без подписи недействительна.

Анкета обязательно должна быть вложена в работу!

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР



Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K , L , M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

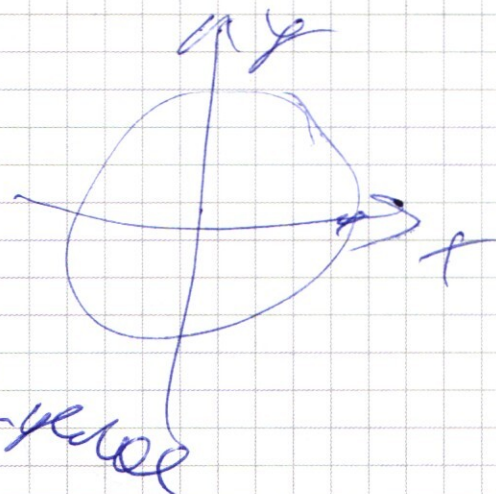
$$-2 \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) = 0; \text{ тогда}$$

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3x}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{8} + \frac{3x}{2} = \pi k$$

$$3x = 2\pi k - \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{2\pi k}{3} - \frac{\pi}{12}; k - \text{целое}$$



$$2) \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi l$$

$$2\frac{\pi}{8} - \pi l = 3x$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi l; l - \text{целое}$$

ответ: $x_1 = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}; k - \text{целое}$

$$x_2 = \frac{2\pi k}{3} - \frac{\pi}{12}; k - \text{целое}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi l; l - \text{целое}$$

$$\sqrt{2} \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{5} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos(5x) \cos(2x) + 2 \sin(2x) \cos(5x) + \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cos(5x)(2 \cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(2 \cos(5x) + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$1) \cos 2x + \sin 2x = 0 \quad \text{Пусть } \sin 2x = 0, \text{ тогда } \cos 2x = 1$$

$$\cot(2x) = -1 \quad \sin 2x \neq 0$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z}$$

$$2) 2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x) = -2 \cos 5x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}} - \frac{\sin 2x}{\sqrt{2}} \right) = -\sqrt{2} \cos 5x$$

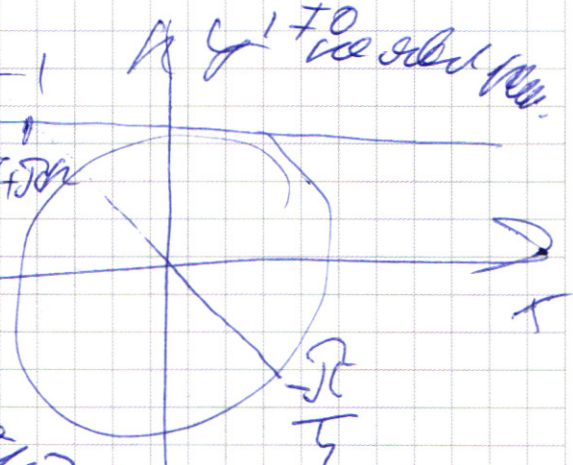
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos 2x}{\cos \frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin 2x}{\sin \frac{\pi}{4}} = \cos 5x \quad \text{Введём новую переменную}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos 5x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \cos(5x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) - \cos(5x) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) - \cos(5x) = 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sqrt{(-\frac{x^2}{y})} \ln(-y) = x^{2 \ln(xy^2)} & (1) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

Р-ние ур-ние (1)

$$\ln(-y) \ln(-\frac{x^2}{y}) = \ln(x^{2 \ln(xy^2)})$$

$$\begin{aligned} \ln(-y) (2 \ln(x) - \ln(-y)) &= 2 \ln(x) (\ln x + 2 \ln(-y)) \\ -\ln^2(-y) + 2 \ln(x) \cdot \ln(-y) &= 2 \ln^2 x + 4 \ln(-y) \ln x \\ \ln^2(-y) + 2 \ln^2 x - 3 \ln(-y) \ln(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\ln(-y) = a; \ln x = b$$

$$a^2 + 2b^2 - 3ab = 0$$

$$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2b \\ a_2 = b. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(-y) = 2 \ln(x) \\ \ln(-y) = \ln(x) \end{cases}$$

Р-ние ур-ние (2)

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 + 2y(x+2) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$D = (x+2)^2 + 3x^2 - 12x = 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 64x - 48x =$$

$$= 16x^2 - 32x + 16 = 16(x^2 - 2x + 1) = 16(x-1)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{-2x-4 \pm 4(x-1)}{2} = -x-2 \pm 2(x-1)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= -x-2+2x-2 = x-4 \\ y_2 &= -x-2-2x+2 = -3x \end{aligned}$$

3-матрица

$$1) \begin{cases} \ln(-y) = 2 \ln x \\ y = -3x \end{cases}$$

$$\ln(3x) = 2 \ln x$$

$$3x = x^2$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0 \text{ и } x = 3$$

$$y = 0 \quad y = -9$$

м.к. $y < 0$ и $x > 0$, то
 $x = 0$; $y = 0$ не реш.
 м.к.

$$2) \begin{cases} \ln(-y) = 2 \ln x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$\ln(4-x) = \ln(x^2)$$

$$4-x = x^2$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17} - 4}{2}$$

$$m.k. \sqrt{17} < \sqrt{17}$$

не реш.

м.к. $x > 0$ и $y < 0$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} - 4$$

не реш.

м.к. $x > 0$ и $y < 0$

$$3) \begin{cases} \ln(-y) = \ln x \\ y = -3x \end{cases}$$

$$\ln(3x) = \ln x$$

$$3x = x$$

$$2x = 0$$

не реш.

м.к. $x \neq 0$

$$4) \begin{cases} \ln(-y) = \ln x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$\ln(4-x) = \ln x$$

$$4-x = x$$

$$2x = 4$$

$$x = 2 \Rightarrow$$

$$y = 2 - 4 = -2$$

реш.

Ответ: $x_1 = 3$; $y_1 = -9$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; y_2 = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x_3 = 2; y_3 = -2.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5. \begin{cases} |x+y+p| + |x-y+p| = 16 & (1) \\ (|x|-p)^2 + (|y|-15)^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Решим уравнение (1)

$$|x+y+p| + |x-y+p| = 16; \text{Р-решим 4 случая}$$

$$1) \text{ Пусть } \begin{cases} x+y+p \geq 0 \\ x-y+p \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -(p+x) \\ y \leq x+p, \text{ тогда} \end{cases}$$

$$x+y+p + x-y+p = 16$$

$$2x + 16 = 16$$

$$2x = 0$$

$$\underline{x=0} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -p \\ y \leq p \end{cases} \Rightarrow -p \leq y \leq p$$

$$2) \text{ Пусть } \begin{cases} x+y+p > 0 \\ x-y+p < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > -(p+x) \\ y > p+x \text{ тогда} \end{cases}$$

$$x+y+p - x+y-p = 16$$

$$2y = 16; y = p \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p > -p-x \\ p > p+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 > -x \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -16 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\cancel{0 \leq x \leq -16} \\ -16 < x < 0$$

$$3) \text{ Пусть } \begin{cases} x+y+p < 0 \\ x-y+p > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -y-p \\ x > y-p, \text{ тогда} \end{cases}$$

$$-x-y-p+x-y+p=16$$

$$-2y=16$$

$$y=-8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -(-8)-p \\ x > -8-p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > -16 \end{cases}$$

$$4) \text{ Пусть } \begin{cases} x+y+p < 0 \\ x-y+p < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < -p-x \\ y > x+p, \text{ тогда} \end{cases}$$

$$-16 < x < 0$$

$$y-x-p-x-y-p=16$$

$$-2x-16=16$$

$$-2x=32$$

$$x=-16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y < -p+16 \\ y > -16+p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < p \\ y > -p \end{cases}$$

$$-p < y < p$$

Решим уравнение (2)

$$(x-8)^2 + (y-15)^2 = a; \text{ Радиус и центр}$$

$$1) x \geq 0; y \geq 0$$

$$\text{I четверть}$$

$$(x-8)^2 + (y-15)^2 = a$$

Окр-ств

В I четверти

центр
(8, 15)

$$2) x < 0; y < 0$$

$$\text{IV четверть}$$

$$(x+8)^2 + (y+15)^2 = a$$

Окр-ств

В IV четверти

центр

(-8, -15)

$$3) x > 0; y < 0$$

$$\text{III четверть}$$

$$(x-8)^2 + (y+15)^2 = a$$

Окр-ств

В III четверти

центр

(8, -15)

$$4) x < 0; y > 0$$

$$\text{II четверть}$$

$$(x+8)^2 + (y-15)^2 = a$$

Окр-ств

В II четверти

центр

(-8, 15)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin\left(\frac{9x+5x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{9x-5x}{2}\right) =$$

$$= -2 \sin(7x) \sin(2x)$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin(7x) \cos(2x)$$

$$-2 \sin(7x) \sin(2x) + 2 \sin(7x) \cos(2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin(7x) (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin(7x) (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$1) \cos 2x = \sin 2x$$

$$2) \sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$$

n - любое

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$



черновик



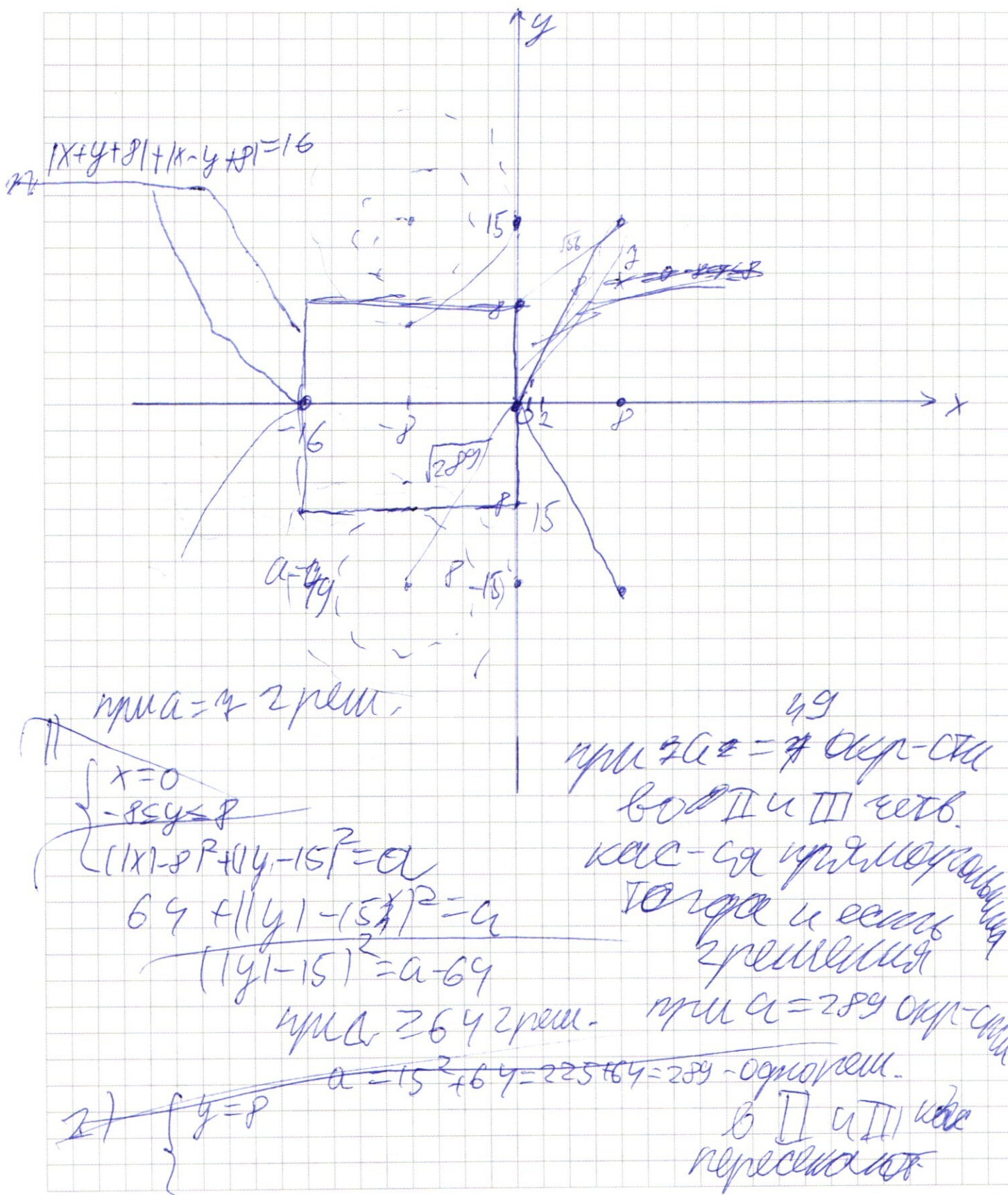
чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



прямоугольник в точках $(-16; 0)$ и $(0; 0)$
 а окружности в I и IV в точке $(0; 0)$

Ответ: $a = 49$,
 $a = 279$.

н1.

64827 Разложим число 64827 на простые множители.

$$64827 = 3^4 \cdot 3^3 \cdot 1; \text{ т.к. } 7 \cdot 7 = 49 \text{ и } 7 \cdot 3 = 21; \text{ а } 64827 \begin{array}{r} 3 \\ 21609 \end{array} \begin{array}{r} 3 \\ 3 \end{array}$$

$$4 \text{ цифры } 3 \text{ цифры } 1 \text{ цифра } 4 \text{ цифры } 3 \cdot 3 = 9 \text{ то есть } 7203 \begin{array}{r} 7 \\ 1029 \end{array} \begin{array}{r} 7 \\ 7 \end{array}$$

$$1) 77773331477779311 \text{ цифра } 2 \text{ цифры } 147 \begin{array}{r} 7 \\ 21 \end{array} \begin{array}{r} 7 \\ 3 \end{array}$$

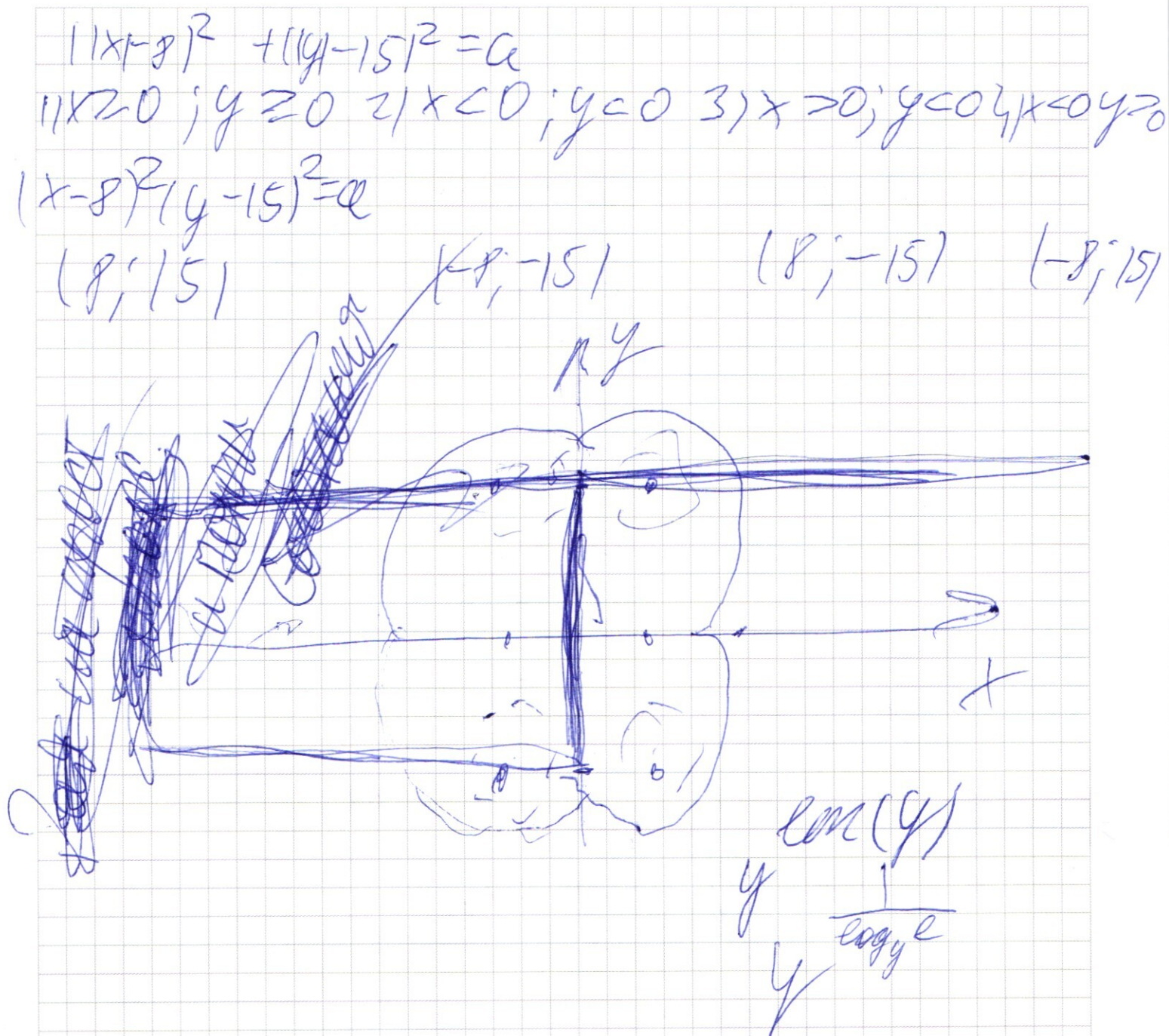
$$1) \text{ кол-во вариантов } \frac{8!}{4!3!}$$

$$2) \text{ кол-во вариантов } \frac{8!}{4!2!} \text{ сложим варианты}$$

$$\frac{8!(2!+3!)}{4!(2!3!)} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 6}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 \cdot 4 = 140 \text{ и } 20$$

Ответ: 160 вариантов

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$11 | x+y+p | + | x-y+p | = 16$$

$$a) \begin{cases} x+y+p \geq 0 \\ x-y+p \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+p \leq 0 \\ x-y+p \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x+16 &= 16 \\ 2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$y=p$$



$$b) \begin{cases} x+y+p > 0 \\ x-y+p < 0 \end{cases}$$

$$x+y+p - x+y-p = 16$$

$$2y = 16$$

$$y = 8$$

$$x > -16$$

$$x < 0$$

$$-16 < x < 0$$



$$c) \begin{cases} x+y+p < 0 \\ x-y+p > 0 \end{cases}$$

$$x-y+p > 0$$

$$y < -(x+p)$$

$$y < x+p$$

$$x-y+p - x-y-p = 16$$

$$-2p = 16$$

$$p = -8$$

$$x < 0$$

$$x > -16$$

$$2) \begin{cases} x+y+p < 0 \\ x-y+p < 0 \end{cases}$$

$$x-y+p < 0$$

$$-2x = 32$$

$$x = -16$$

$$y-x-p - y-x-p = 16$$

$$y+p-16 < 0$$

$$y-p < 0$$

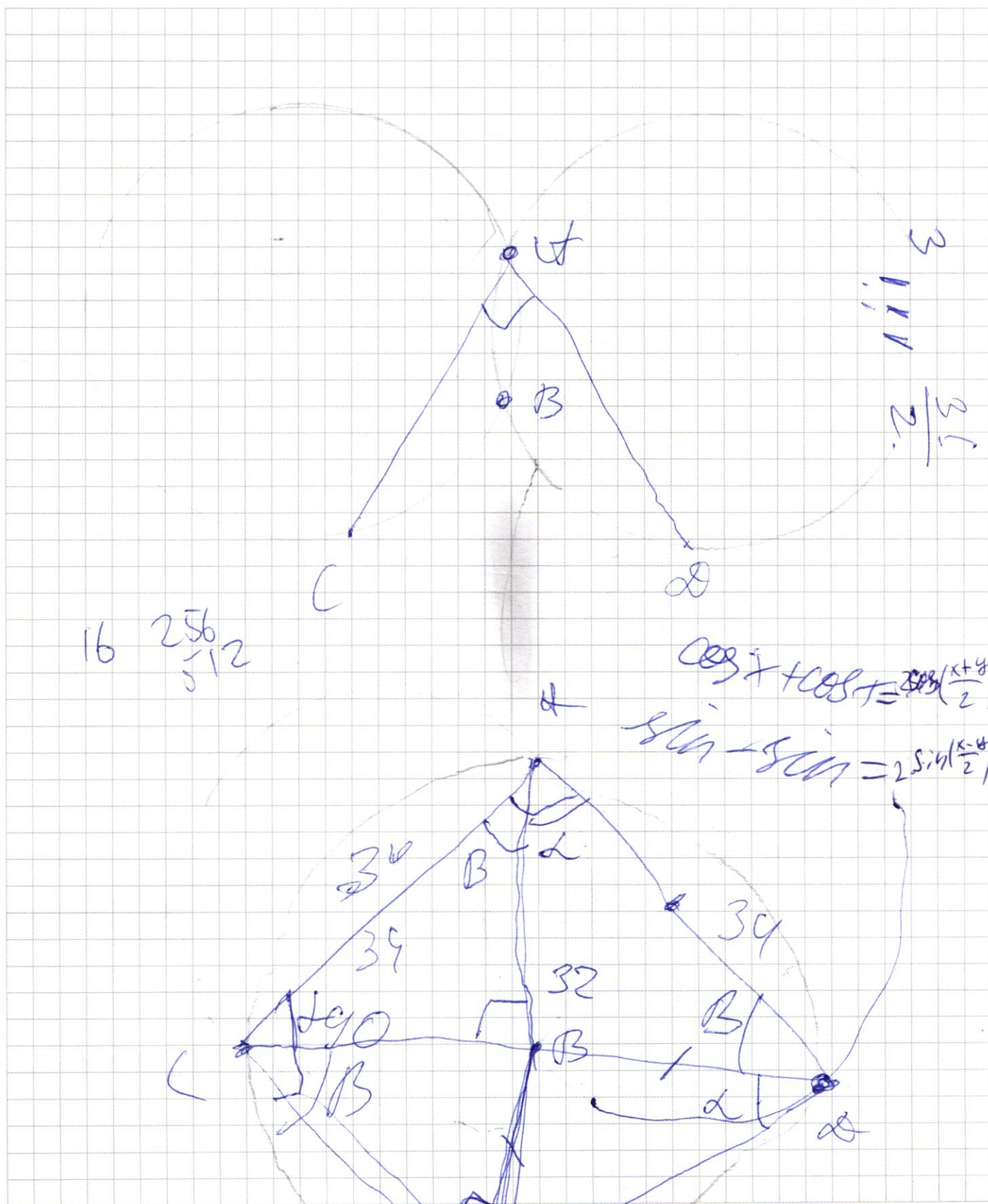
$$y < p$$

$$-y-p < 0$$

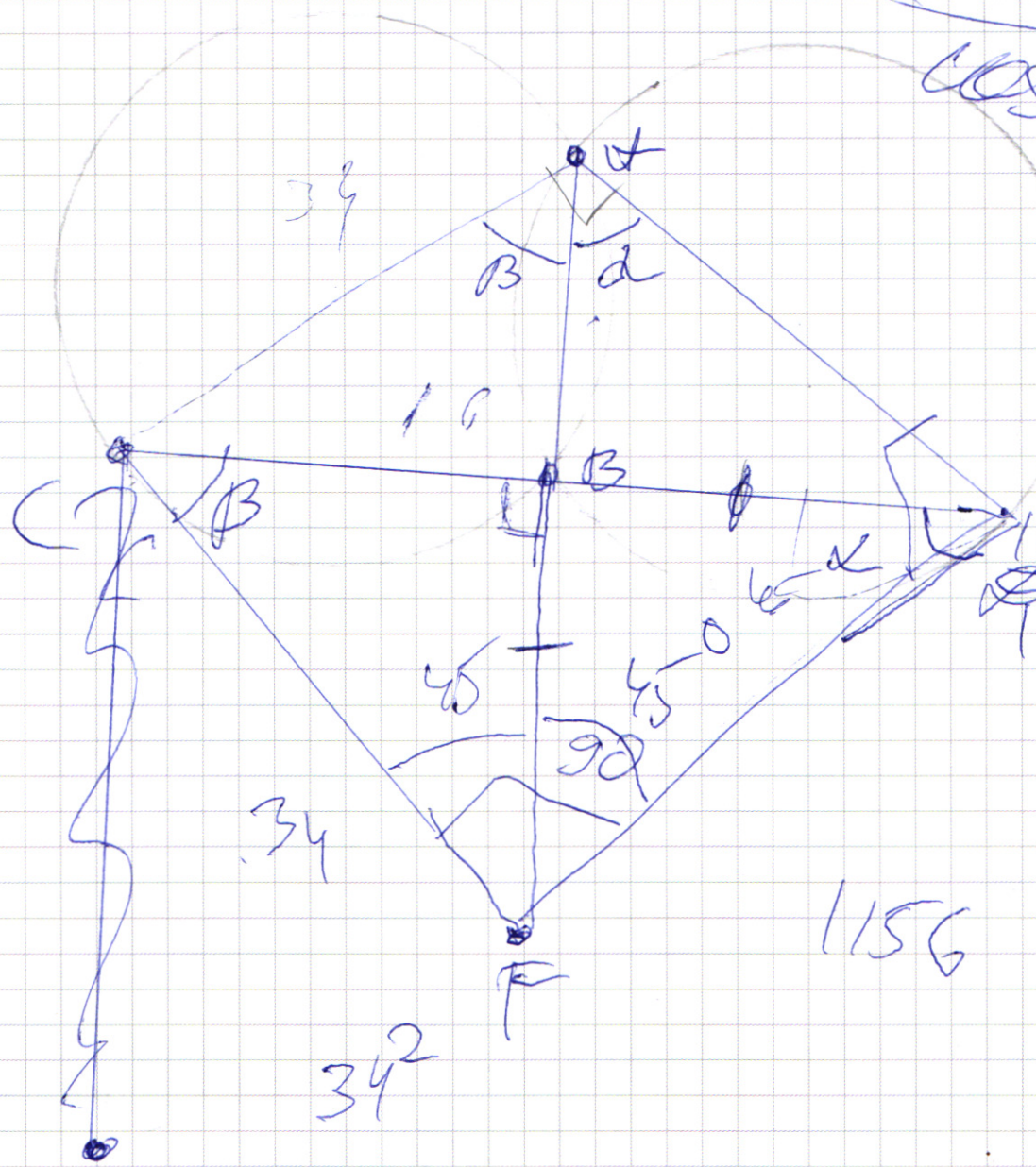
$$y > -p$$

$$-p < y < p$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$



$$\frac{10}{34} = 0.2941$$

1156

342

2/2
0.5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\bar{a}.$ 64827
 $\begin{array}{r} 21 \ 27 \\ 12 \ 9 \\ \hline 64827 \end{array} \Big| 3$
 $\begin{array}{r} 64827 \\ -6 \\ \hline 04 \end{array} \Big| 21609$
 64827
 $64827 \Big| 3$
 $21609 \Big| 3$
 $7203 \Big| 7$
 $1029 \Big| 7$
 $197 \Big| 7$
 $21 \Big| 7$
 $3 \Big| 3$
 $7.7.7.7$
 43.331
 9311
 $213!41$
 16807
 4802
 64827

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{2x}$$

$$y \leq 93 + 3(3^{2x} - 1)/x$$

$$\frac{3^x + 4 \cdot 3^{2x}}{2} \geq \sqrt{3^{2x+4}}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{2x} \geq \sqrt{3^{2x+4}} \cdot 2$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{2x} \geq \sqrt{3^{32}} \cdot 4$$

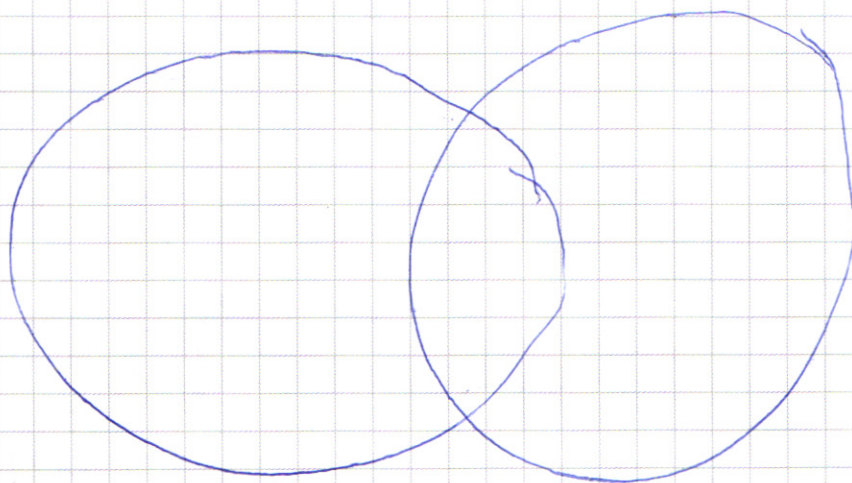
$$3^x + 4 \cdot 3 \geq 3^{16} \cdot 4$$

$$3^{14+\frac{x}{2}} \cdot 4$$

$$y \leq 3(3^3 + 4)/3 + 3(3^{2x} - 1)/x$$

$$\begin{array}{r} 93 \overline{) 3} \\ \underline{3} \\ 31 \\ \underline{31} \\ 0 \end{array}$$

$$(3^3 + 4)/3$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)} & -y > 0 \\ & y < 0 \end{cases}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$\ln\left(1 - \frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = \ln(x^{2 \ln(xy^2)})$$

$$\ln(-y) \ln\left(1 - \frac{x^2}{y}\right) = 2 \ln(xy^2) \ln(x)$$

$$\ln(-y) (\ln(x^2) - \ln(y)) = 2 \ln(x) (\ln x + \ln y^2)$$

$$\ln(-y) (2 \ln(x) - \ln(y)) = 2 \ln(x) (\ln x + 2 \ln(y))$$

$$2 \ln(x) - \ln^2(-y) = 2 \ln^2 x + 4 \ln(x) \ln(-y)$$

$$\ln^2(-y) + 4 \ln(x) \ln(-y) - 2 \ln x + 2 \ln^2 x = 0$$

$$\ln^2(-y) - \ln^2 x + 4 \ln(x) \ln(-y) = 2 \ln^2 x + 4 \ln(-y) \ln x$$

$$\ln^2(-y) + 2 \ln x - 3 \ln(-y) \ln x = 0$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$\ln(-y) = a$$

$$\ln(x) = b$$

$$a^2 + 2b^2 - 3ab = 0$$

$$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$$

$$a_1 = 2b$$

$$a_2 = b$$

$$a_1 = \frac{3b \pm b}{2}$$

