

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра|
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

Заметим, что есть 2 варианта: 1) три 3, четыре 7 и одна 1.
2) одна 3, четыре 7, одна 9, две 1. Больше вариантов
быть не может, т.к. любые другие произведения двух чисел больше
30. Посчитаем кол-во способов:

1) Чтобы разместить 7: $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!}$ (все 7 одинаковы)

Чтобы разместить 3 (после 7): $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!}$

Т.к. вторая функция зависит от первой, то общее кол-во:

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = \frac{40 \cdot 6 \cdot 7}{24} \cdot \frac{24}{6} = 280$$

2) Для 7: $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!}$

Для 3 (после 7): 4

Для 9 (после 7 и 3): 3

Итого: $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{24} \cdot 4 \cdot 3 = 840$

Суммарное кол-во вариантов: $280 + 840 = 1120$

Ответ: 1120.

№3.

Напишем со второго ур-ия: $y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$

$$y^2 + 2y(x+2) - (3x^2 - 12x) = 0$$

$$y = \frac{-(x+2) \pm \sqrt{(x+2)^2 + 3x^2 - 12x}}{1} = \frac{-(x+2) \pm 2(x-1)}{1}$$

$$y_1 = -x - 2 + 2x - 2 = x - 4$$

$$y_2 = -x - 2 - 2x + 2 = -3x$$

Переходим к первому уравнению: $(-\frac{x^7}{y})^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$

$$\text{ОДЗ: } y < 0, x > 0$$

$$\frac{x^7 \ln(-y)}{|y|^{\ln(-y)}} = x^{2\ln(xy^2)} \Rightarrow \frac{x^7}{|y|} = x^{2\ln(xy^2) - \ln(-y)} = x^{\ln(\frac{x^2 y^4}{-y})}$$

$$\frac{x^7}{|y|} = x^{\ln(-x^2 y^3)}$$

$$|y| = x^k, y = -|y| \text{ (т.к. } y < 0)$$

$$\left(\frac{x^7}{|y|}\right)^{\ln |y|} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$x^{(7-k)\ln x^k} = x^{2\ln(x^{1+2k})} \Leftrightarrow x^{\ln(x^{k(7-k)})} = x^{\ln(x^{2+4k})}$$

$$2+4k = 7k - k^2 \Leftrightarrow k^2 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow k \in \{1; 2\}$$

$$1) y = -x \Rightarrow \text{а) } y = x - 4 \Leftrightarrow -x = x - 4 \Leftrightarrow x = 2, y = -2 \text{ (✓)}$$

$$\text{б) } y = -3x \Leftrightarrow x = 3x \Leftrightarrow x = 0, y = 0 \text{ (✗)}$$

$$2) y = -x^2$$

$$\text{а) } y = -3x \Leftrightarrow x^2 = 3x \text{ (} x \neq 0) \Leftrightarrow x = 3, y = -9 \text{ (✓)}$$

$$\text{б) } y = x - 4 \Leftrightarrow -x^2 = x - 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 4 = 0$$

$$x \in \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2}, \text{ т.к. } x > 0, \text{ то } x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

$$y = -x^2 = -\frac{(\sqrt{17}-1)^2}{4} = \frac{\sqrt{17}-9}{2} \text{ (✓)}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=-9 \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ y=\frac{\sqrt{17}-9}{2} \end{cases}$$

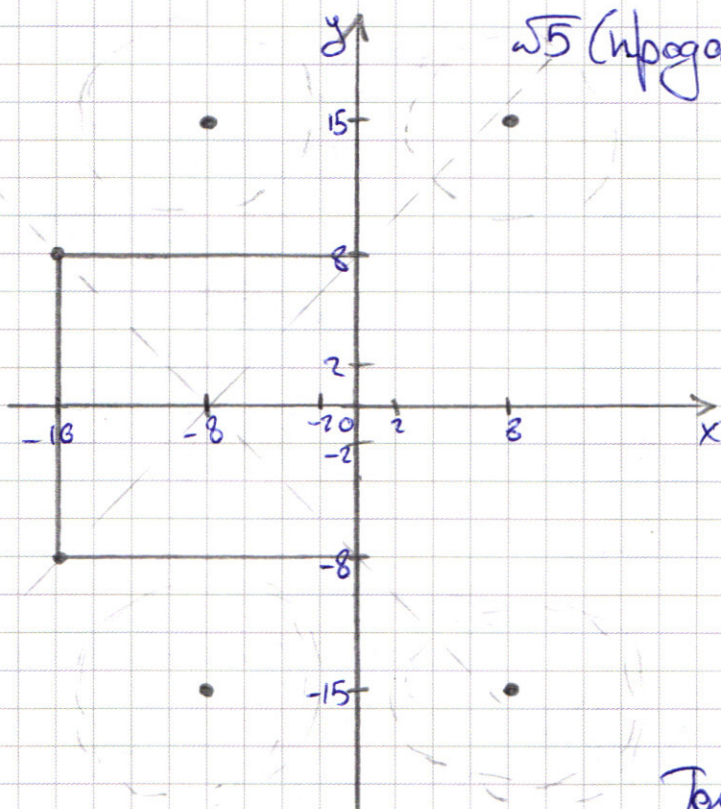
$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$ — ур-ие для прямоугольника (в нашем случае квадрата) с вершинами в $(-16; -8), (-16; 8), (0; 8), (0; -8)$.

$(|x|-8)^2 + (|y|-16)^2 = 0$ — окружности (или дуги окружностей) с центрами в $(8; 16), (-8; 16), (-8; -16), (8; -16)$.



(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



55 (продолжение)

Заметим, что картин-
ка симметрична отн-ко
оx при любом a.

3) пусть левая верхняя
окружность касается
~~левой~~ верхней стороны
квадрата. Тогда левая ниж-
няя окр. касается ~~левой~~
нижней стороны.

Тогда радиус окружности (r)

равен ~~15~~ $15 - 8 = 7 \Leftrightarrow a = 49$. Заметим, больше пересечений
не будет, т.к. не будет пересечений окружностей с осью oy.
 $a = 49$ подходит.

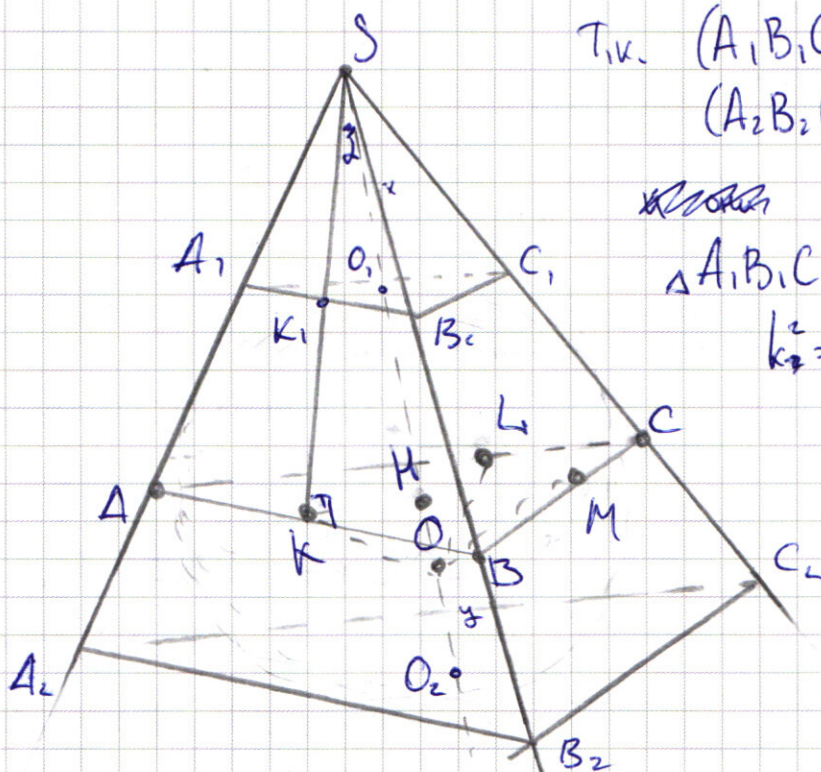
Далее в силу симметрии будет более 2-х точек пересечения.
Ещё один случай — окружности проходят через точки $(-16; 0)$
и $(0; 0)$. $a^2 = ~~16^2~~ = 15^2 + 8^2 = 289$. ~~Всё~~ При $a > 289$ — пе-
ресечений нет. При $a \in (49; 289)$ — больше 2 пересечения
(2 пересечения при $y > 0$ и ещё 2 при $y < 0$ в силу симметрии)

Ответ: $a \in [49; 289]$

54.

$$S_{A_1B_1C_1} = 9$$

$$S_{A_2B_2C_2} = 16$$



$$T.K. (A_1B_1C_1) \perp SO$$

$$(A_2B_2C_2) \perp SO$$

$$\text{TO } (A_1B_1C_1) \parallel (A_2B_2C_2)$$

$$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$$

$$k^2 = \frac{9}{16} \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$$

$$\frac{SO_1}{SO_2} = k = \frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} SO_1 = x \\ SO_2 = y \end{cases}$$

$$\frac{SO_1}{SO_2} = \frac{3}{4}$$

$$OO_1 = OO_2 = r = OK = OM = OL$$

$$\frac{SO-r}{SO+r} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow SO = 7r$$

$$\widehat{SKO} = 90^\circ \text{ (Точка касания)}$$

$$SO = 7r, KO = r \quad \widehat{KSO} = \alpha \quad \sin \alpha = \frac{r}{7r} = \frac{1}{7}$$

$$\cancel{\text{tg } \alpha = \frac{r}{7r} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \alpha = \arctg \frac{1}{7}} \quad \boxed{\alpha = \arcsin \frac{1}{7}}$$

$$\cancel{SK = \sqrt{49r^2 - r^2} = r\sqrt{48} = 2r\sqrt{12} = 4\sqrt{3}r} \quad SK^2 = 48r^2$$

$$\cancel{\text{tg } \alpha = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{4\sqrt{3}r}{7r} = \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{SH}{SK} = \frac{SH}{4\sqrt{3}r}} \quad \cos \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{SH}{4\sqrt{3}r} \Leftrightarrow SH = \frac{48}{7}r$$

$$\cos \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{SH}{4\sqrt{3}r} \Leftrightarrow 7SH = 48r \Leftrightarrow SH = \frac{48}{7}r$$

$$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC \quad k = \frac{SO_1}{SH} = \frac{x}{SH} \quad \boxed{x = OS, y = SO_2}$$

$$\frac{x}{2r+x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x = 6r + 3x \Leftrightarrow x = 6r \quad k = \frac{6r \cdot 7}{48r} = \frac{7}{8}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} k^2 S_{A_1B_1C_1} = \frac{49}{64} \cdot 81 = \frac{64}{49} \cdot 81 = \frac{(8 \cdot 9)^2}{7^2}$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \arcsin \frac{1}{7}, S_{ABC} = \frac{72^2}{49}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$64827 = 3^2 \cdot 7203 = 3^3 \cdot 2401 = 3^3 \cdot 7 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^2 \cdot 7^2 = 3^3 \cdot 7^4$

$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
 $6 \cdot 4 = 24$

$64827 \div 9 = 7203$
 $7203 \div 3 = 2401$
 $2401 \div 7 = 343$
 $343 \div 7 = 49$
 $49 \div 7 = 7$
 $7 \div 7 = 1$

$40 \cdot 56 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 6 = 280$

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40 \cdot 21 = 840$

$\sum = 840 + 280 = 1120$

$\sin + \cos = \dots$

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$\cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x + \cos 3x = 0$

$\sin 4x \cos 3x + \sin 3x \cos 4x - \sin 3x = 0$

$\sqrt{2} \cos 4x = 0$

$\cos 4x (\cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}) = 0$

$\cos 3x (\cos 4x + 1 + \sin 4x) - \sin 3x (\sin 4x + 1) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$\cos 3x (\sin 4x + 1) - \sin 3x (\sin 4x + 1) + \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x + \cos 4x \cos 3x = 0$

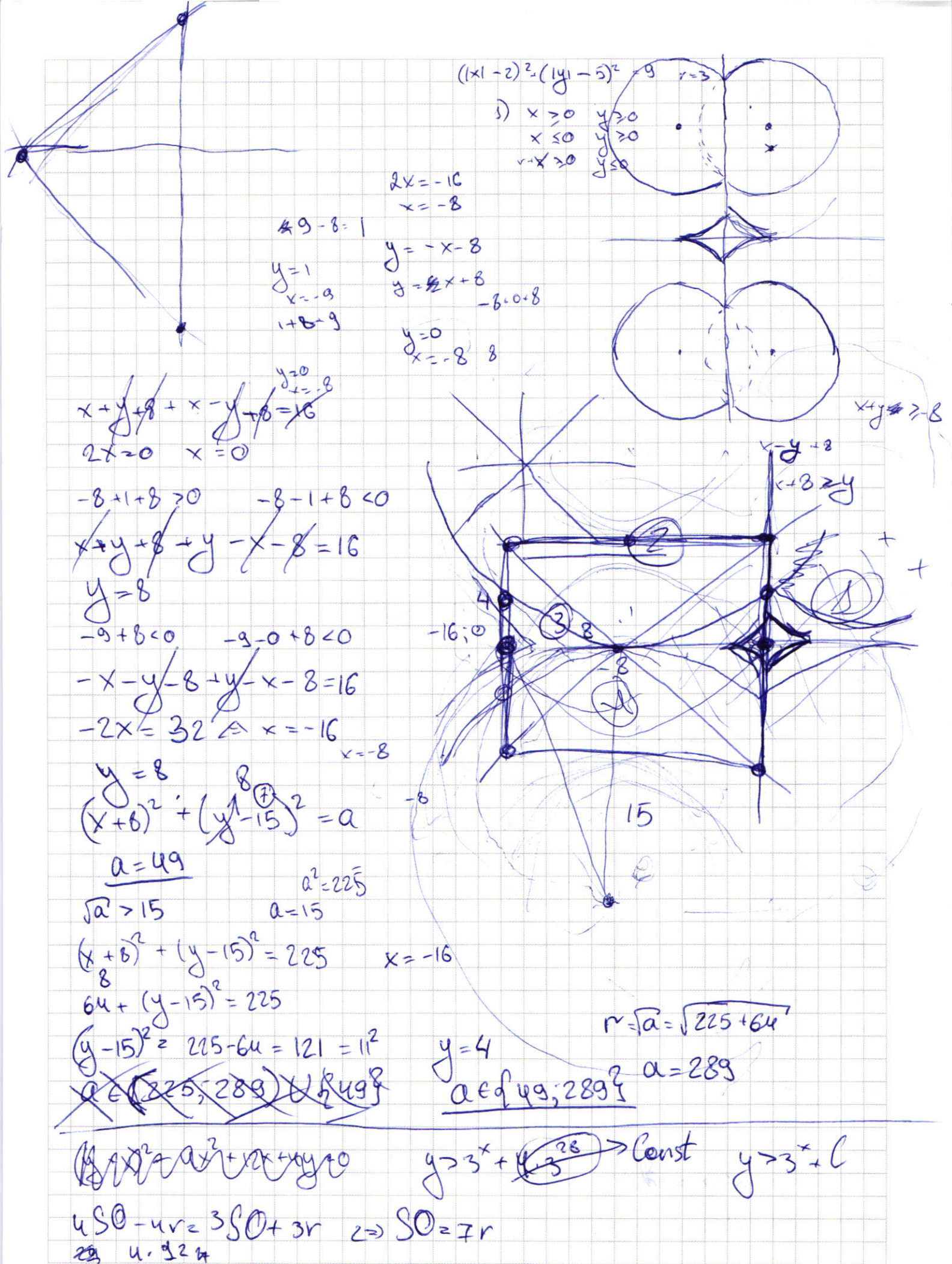
$(\sin 4x + 1)(\cos 3x - \sin 3x) + \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x + \cos 4x \cos 3x = 0$

$(\sin 4x + 1)(\cos 3x - \sin 3x) + \cos 4x (\sin 3x + \cos 3x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$(\cos 3x - \sin 3x)(\sin 4x + 1 + \cos 4x) + 2 \cos 4x \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$\sin 7x - \sin 3x = 2 \sin 2x \cos 5x$

$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos 5x$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\ln e^2 + \ln e^3 = 5$
 $\ln e^5 = \ln e^5$
 $\ln e^5 = \ln e^5$
 $4 \cdot 3^{28}$

$\ln(x^{\ln x})$
 $2^x \ln x$
 $\left(-\frac{x^2}{y}\right) \ln(-y) = -x^2 \ln(xy^2)$

$y = \frac{-(x+2) \pm \sqrt{(x+2)^2 + 3x^2 - 12x}}{1}$
 $-(x+2) \pm \sqrt{x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x}$
 $y = \frac{-(x+2) \pm 2|x-1|}{1}$

$\log_e x + \log_e \frac{1}{(4-x)^2} = \log_e \frac{x}{(4-x)^2}$
 $\log_e x + \log_e \frac{1}{(4-x)^2} = \log_e \frac{x}{(4-x)^2}$
 $\log_e x + \log_e \frac{1}{(4-x)^2} = \log_e \frac{x}{(4-x)^2}$

$3) x \geq 1: y = -x - 2 \pm (2x - 2)$
 $y_1 = -x - 2 + 2x - 2 = x - 4$
 $y_2 = -x - 2 - 2x + 2 = -3x$

$2) x \leq 1: y = -x - 2 \pm (2 - 2x)$
 $y_1 = -x - 2 + 2 - 2x = -3x$
 $y_2 = -x - 2 - 2 + 2x = x - 4$

$3) y = x - 4$
 $\left(-\frac{x^2}{x-4}\right) \ln(x-4) = x^2 \ln(x-4)$
 $\left(-\frac{x^2}{x-4}\right) \ln(x-4) = x^2 \ln(x-4)$
 $\left(-\frac{x^2}{x-4}\right) \ln(x-4) = x^2 \ln(x-4)$

$2 \ln(x-4) = 2 \ln(x-4)$
 $2 \ln(x-4) = 2 \ln(x-4)$
 $2 \ln(x-4) = 2 \ln(x-4)$

$14 - 2 \log_x(x-4) = 2 \log_x(x-4)$
 $14 - 2 \log_x(x-4) = 2 \log_x(x-4)$
 $14 - 2 \log_x(x-4) = 2 \log_x(x-4)$

$$\log_x \left(\frac{x^{14}}{x-u} \right) - \log_x (x^2 \cdot (u-x)^2) = 0$$

$$x^3 = (x-2) \cdot x$$

$$-\frac{x^7 \ln(-y)}{y \ln(-y)} = x^2 \ln(xy^3)$$

$$\frac{\log_e(x^2)}{2 \log_e e} + \frac{\log_e(u-x)^2}{2 \log_e e}$$

$$\frac{\ln(x^2 y^4)}{\ln(-y)} =$$

$$-x^7 \ln(-y) = x^2 \ln(xy^3) \cdot y \ln(-y)$$

$$= \ln(-x^2 y^3)$$

$$-x^7 = y x^2 \ln(-x^2 y^3) = y x^2 (\ln(-x^2) + \ln y^3) = y x^2 \ln y^3 \cdot \ln(-x^2)$$

$$y = -\frac{x^7}{x^2 \ln(-x^2 y^3)} = x^5 \ln(-x^2 y^3)$$

$$14 = \log_x (y^2 \cdot x^2 y^3 \cdot x^2 \ln(-x^2))$$

$$1 - x^6 \ln(-x) = x^2 \ln x^3$$

$$x^{12} \ln(-x) = x^4 \ln(x^3)$$

$$14 = \log_x y^2 + 2 \ln y^3 + 2 \ln(-x^2) = 2 \ln(y^3 x^2) + \log_x y^2$$

$$x^{6 \ln x} = x^{2 \ln x^3}$$

$$x^{5 \ln x^2} = x^{2 \ln x^5}$$

$$y = -x \quad y = -x^2$$

$$-x = x - 4 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2 \quad y = -2$$

$$y \leq 0 \quad x \geq 0$$

$$4x = 43x \Leftrightarrow x = 0 \quad y = 0$$

$$\text{X}$$

$$-x^2 = x - 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad y = -x^2$$

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \quad y = -9$$

$$-\frac{(-1+\sqrt{17})^2}{4} = -\frac{17-2\sqrt{17}+1}{4} = -\frac{18-2\sqrt{17}}{4} = -\frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

$$\log_x (x^{14}) - \log_x (y^2) = \ln(-y^6 x^4)$$

$$\log_x \left(\frac{x^{14}}{y^2} \right) = \ln(-y^6 x^4)$$

$$\log_x \left(\frac{x^7}{y} \right) - \log_x (x^2 y^3) = \frac{\ln(-x^2) + \ln y^3}{2} + \frac{3}{2} \log_y e$$

$$\frac{x}{y \cdot x^2 y^3} = \frac{x^5}{-y^3} = 1$$

$$x^5 = -y^3 \Leftrightarrow x = -y$$



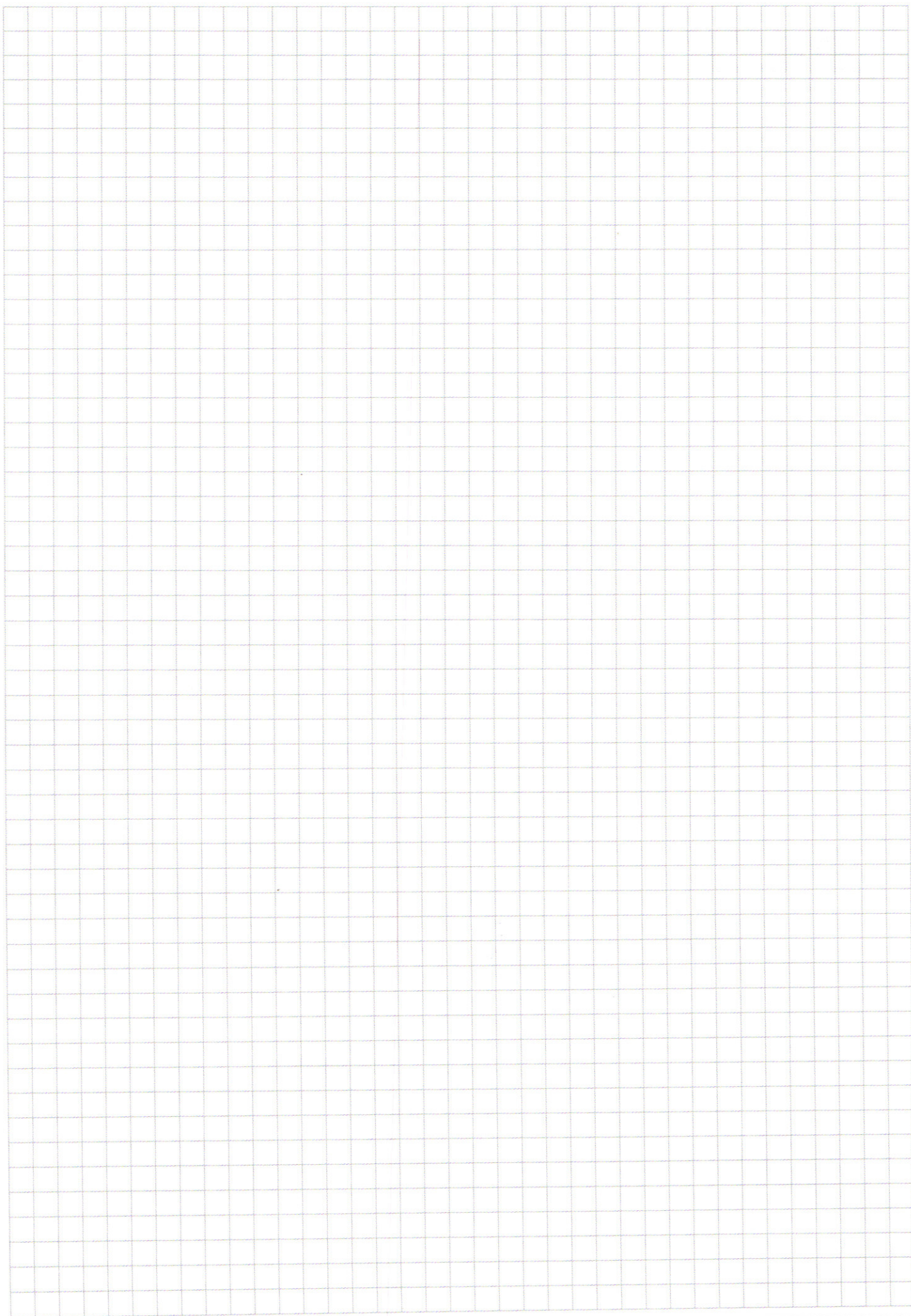
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)