

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

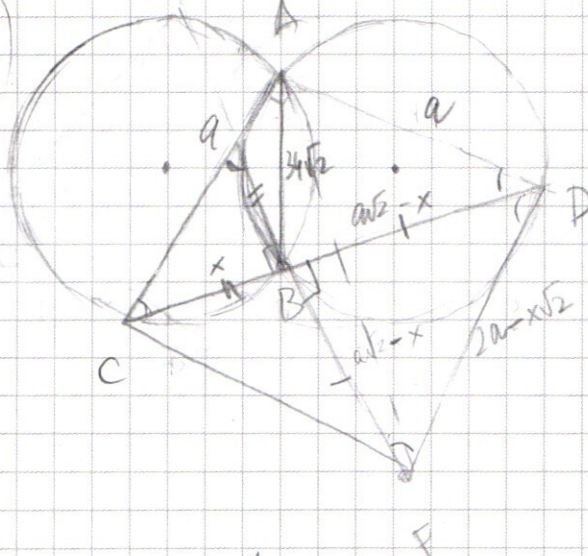
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. а)



$$AB = 2R \cdot \sin 45^\circ = \frac{2 \cdot 17 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 34\sqrt{2}$$

$$AC = AD$$

$$x^2 + x^2 + 2a^2 - 2ax\sqrt{2} =$$

$$= \sqrt{2}(x^2 + a^2 - ax\sqrt{2})$$

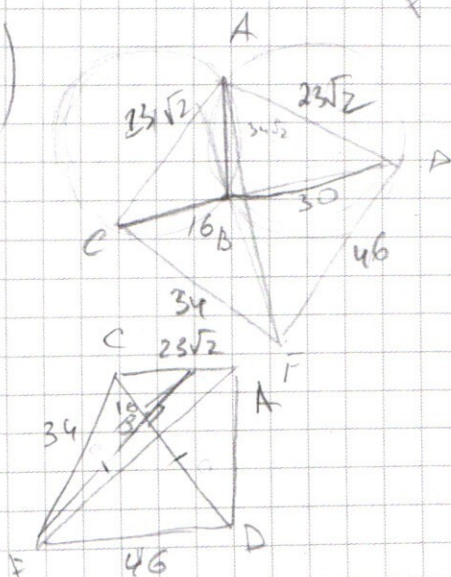
$$a^2 + x^2 - 2ax\sqrt{2} = 34^2 \cdot 2$$

$$CF = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot 34^2 = 2 \cdot 34^2 = 68$$

$$CE = \sqrt{x^2 + 2a^2 + x^2 - 2ax\sqrt{2}}$$

$$AB = \sqrt{a^2 + x^2 - 2ax\sqrt{2}}$$

б)



Ищем AC:

$$\frac{a^2 + 16^2 - 2a \cdot 16 \cdot \sqrt{2}}{2} = 34^2 \cdot 2$$

$$a^2 - 16\sqrt{2}a - 2056 = 0$$

$$D_1 = 16^2 + 2056 = 2194$$

$$a_{1,2} = 8\sqrt{2} \pm \sqrt{2} \cdot \sqrt{1097}$$

$$a = \sqrt{2}(8 + \sqrt{1097})$$

$$BF = 2\sqrt{1097}$$

$$2\sqrt{1097} = 256 + 34^2 - 2 \cdot 34 \cdot 16 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{256 + 68^2 - 2 \cdot 1097}{2 \cdot 68 \cdot 16}$$

$$7. \begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{2x} \\ y \leq 93 + 5(3^{22} - 1)x \end{cases}$$

$$y \leq 93 + 5(3^{22} - 1)x$$

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{2x} \\ y \leq 93 + 3^x - 3x \end{cases}$$

$$(34 - 16)(34 + 16) = (a\sqrt{2} - 16)^2$$

$$18 \cdot 50 = (a\sqrt{2} - 16)^2$$

$$9 \cdot 25 \cdot 2 = (a\sqrt{2} - 16)^2$$

$$a\sqrt{2} - 16 = 30$$

$$a\sqrt{2} = 46$$

$$a = \frac{46\sqrt{2}}{2} = 23\sqrt{2}$$

$$93 - 12 + n \geq y > 3^x + n$$

$$81 + n \geq y > 81 + n$$

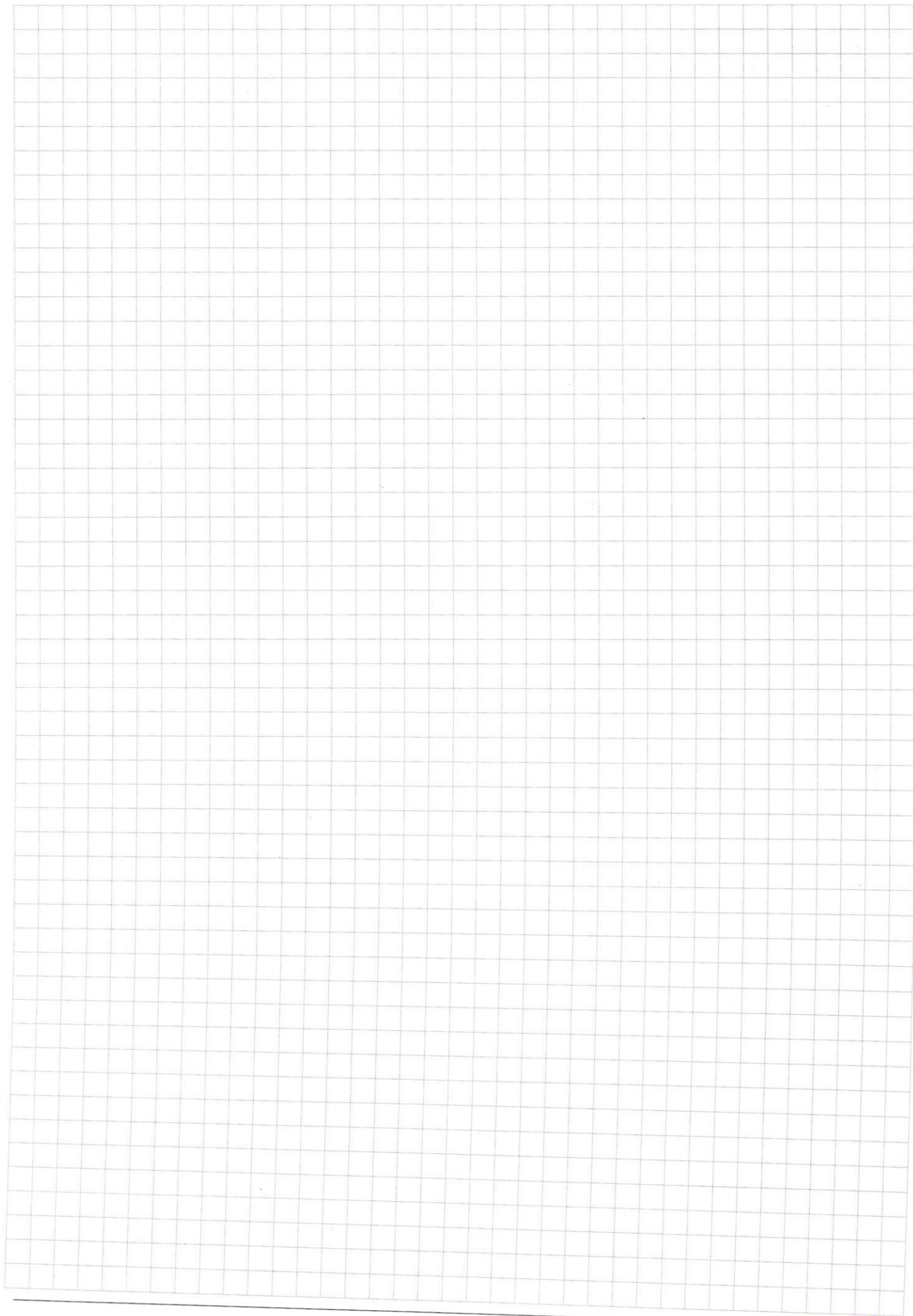
$$93 - x + n \geq y > 3^x + n$$

$$\begin{aligned} 93 + 3^{20} \cdot x - 3x &> 3^x + 4 \cdot 3^{20} \\ 93 - 3x - 3^x &> 3^{20}(4 - x) \end{aligned}$$

$$S_{\triangle P} = \frac{(46 + 23\sqrt{2})}{2} \cdot 23\sqrt{2}$$

$$S_{\triangle P} = \frac{1}{2} \cdot 23\sqrt{2} \cdot 46$$

$$S_{\triangle P} = \frac{1}{2} \cdot (23\sqrt{2})^2 = 23^2$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $64287 = 9 \cdot 7203 = 9 \cdot 7 \cdot 1029 = 3^2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 147 = 3^2 \cdot 7^3 \cdot 21 = 3^3 \cdot 7^4$

Иногда получается набор цифр:

- 7, 7, 7, 7, 3, 3, 3, 1

- 7, 7, 7, 7, 9, 3, 1, 1

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 105$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = 7 \cdot 8 = 56$$

$$C_8^2 = \frac{8!}{6!2!} = 28$$

$$S = 105 \cdot 56 \cdot 8 + 105 \cdot 28 \cdot 64 = 1058(56 + 28 \cdot 8) = 840 \cdot 28 = 19488$$

Ответ: 19488.

2) $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$
 $2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$
 $2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$
 $(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)) = 0$
 $(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x - 2 \cos(2x - \frac{\pi}{4})) = 0$

$$\begin{cases} \cos 2x = -\sin 2x \\ \cos 5x = \cos(2x - \frac{\pi}{4}) \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = \frac{3\pi}{4} + \pi n \\ 5x = 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 3x = \frac{\pi}{4} - 2x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + \pi n \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + \pi n \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

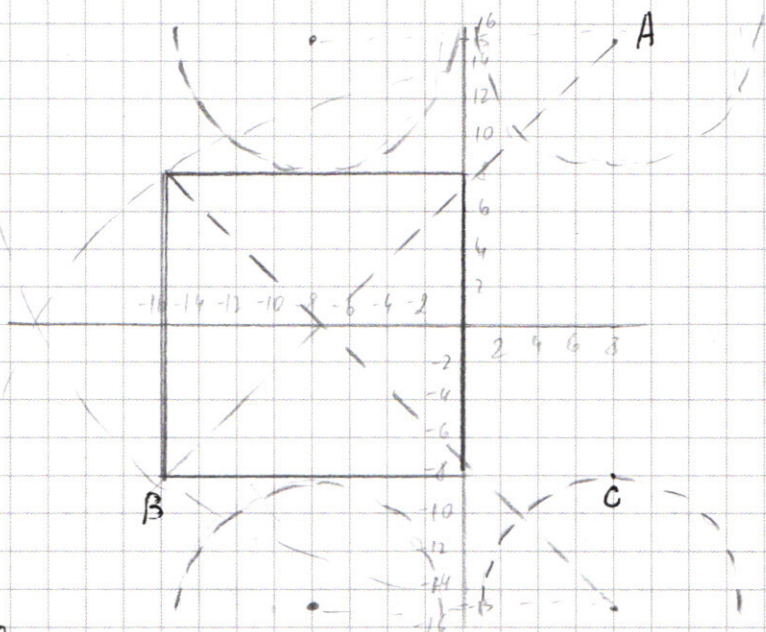
5) $\begin{cases} |x+y+8| + |x+8-y| = 16 & (1) \\ (x-8)^2 + (y-15)^2 = a & (2) \end{cases}$

(1). ~~Эта~~ график этой функции выглядит как квадрат с центром в точке $(-8; 0)$ и стороной, равной 16.

(2) график этой функции выглядит как четыре окружности с центрами в точках $(8; 15)$, $(8; -15)$, $(-8; 15)$, $(-8; -15)$ и радиусом $\sqrt{a}$.

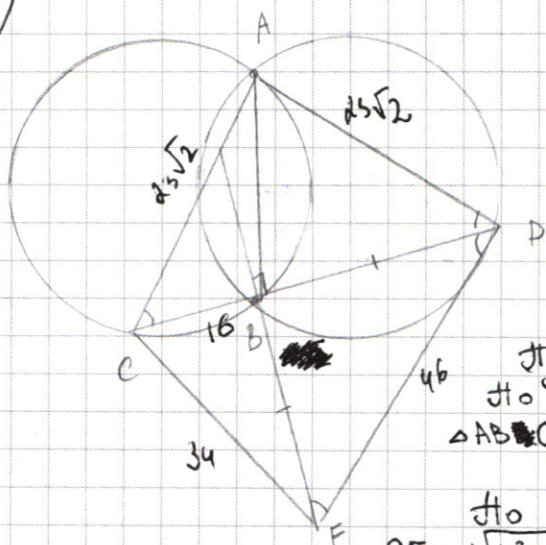
1. Две окружности с центрами в точках $(-8; 15)$ и $(-8; -15)$ касаются квадрата в точках $(-8; 8)$ и $(-8; -8)$.
Отсюда радиус равен $15 - 8 = 7$, $a = 7^2 = 49$

2. Две окружности пересекают вершины квадрата $(-16; 8)$ и $(-16; -8)$, а две окружности с центрами в точках $(8; 15)$ и $(-8; -15)$ не пересекают его. Введём точки A, B и C (указаны на рисунке). Тогда радиус, равный $\frac{AB}{2}$ по т. Пифагора равен $\sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{23^2 + 24^2}$, где $a = AB^2 = 23^2 + 24^2 = 1105$.



Ответ: 49; 1105.

6.)



а) по теореме синусов
 $2R^2 = \frac{AB}{\sin \angle C}$

т.к. окружности одинаковы и AB
 стягивает дугу, где дуги этих окружностей, то
 $\angle ADC = \angle ACD \Rightarrow \angle ACD = 45^\circ$
 $\angle CAD = 90^\circ$

$$AB = 2 \cdot 17 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2}$$

Пусть $AC = a$, тогда $AD = a$, $CD = a\sqrt{2}$

Пусть $BC = x$, тогда $BD = a\sqrt{2} - x = BF$

по теореме косинусов:

$$\triangle ABC: 34^2 \cdot 2 = a^2 + x^2 - 2ax \cdot \cos 45^\circ$$

$$34^2 \cdot 2 = a^2 + x^2 - ax\sqrt{2}$$

по теореме Пифагора:

$$CF = \sqrt{x^2 + 2a^2 + x^2 - 2ax\sqrt{2}} = \sqrt{2(x^2 + a^2 - ax\sqrt{2})} = \frac{2 \cdot 34}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

б) по т. Пифагора в $\triangle CBF$:

$$34^2 - 16^2 = (a\sqrt{2} - 16)^2$$

$$9 \cdot 4 \cdot 25 = (a\sqrt{2} - 16)^2 \Rightarrow a\sqrt{2} = 30 + 16 = 46, a = 23\sqrt{2}$$

т.к. $AD = BF$ и $\angle DBF = 90^\circ$, то $FD = \sqrt{2} \cdot BF = 23 \cdot 2 = 46$

$\angle CAD = \angle ADF = 90^\circ \Rightarrow ADFC$ - прямоугольная трапеция

$$S_{\text{трапеции}} = (AC + FD) \cdot AD \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} 23\sqrt{2} (23\sqrt{2} + 46)$$

$$S_{FDA} = \frac{1}{2} 46 \cdot 23\sqrt{2}$$

$$S_{ACE} = S_{\text{трапеции}} - S_{FDA} = \frac{1}{2} (23\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2} 23\sqrt{2} \cdot 46 - \frac{1}{2} 23\sqrt{2} \cdot 46 = 23^2 = 529$$

Ответ: а) 34
 б) 529

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $64827 = 9 \cdot 7203 = 9 \cdot 7 \cdot 1029 = 3^2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 147 = 3^2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 21 = 3^3 \cdot 7^4$ $C_8^2 = \frac{8!}{6!2!} = 7 \cdot 6 = 28$
 $C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 3 \cdot 7 = 105$ $C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 7 \cdot 8 = 56$

$S = 105 \cdot 56 \cdot 8 + 105 \cdot 28 \cdot 64 = 105 \cdot 8 (56 + 28 \cdot 8) = 840 \cdot 232 = 19488$

2. $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x = -\sqrt{2} \cos 4x$

$2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) = -\sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)$

$2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x + \sin^2 2x) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos (2x - \frac{\pi}{4})) = 0$

$\begin{cases} \cos 2x = -\sin 2x \\ \cos 5x = \cos (2x - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$

$\begin{cases} 2x = \frac{3\pi}{4} + \pi n \\ 5x = 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}$

$\begin{cases} 2x = \frac{3\pi}{4} + \pi n \\ 5x = \frac{\pi}{4} - 2x + 2\pi n \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} \pi n \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n \\ x = \frac{\pi}{24} + \frac{2}{3} \pi n \end{cases}$

3. $\begin{cases} (-\frac{x^2}{y}) \ln(-y) = x^{2 \ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (-\frac{x^2}{y}) \ln(y) = x^2 y^4 \ln(x) \\ \ln(y) \ln(-\frac{x^2}{y}) = \ln(x) \cdot \ln(x^2 y^4) \end{cases}$

$(y+x)^2 - (2x-3)^2 + 4y+9 = 0$

$\frac{(y)^2}{x} + \frac{2y}{x} - 3 + \frac{12}{x} + \frac{4y}{x} = 0$

$1 - 2 - 3 + \frac{12}{x} - \frac{y}{x} = 0$

$-4 + \frac{8}{x} = 0$
 $x = 2, y = -2$

4. $\begin{cases} |x+y+8| + |x+8-y| = 16 \\ (x+8)^2 + (y+15)^2 = 9 \end{cases}$

$(-16, 8)$

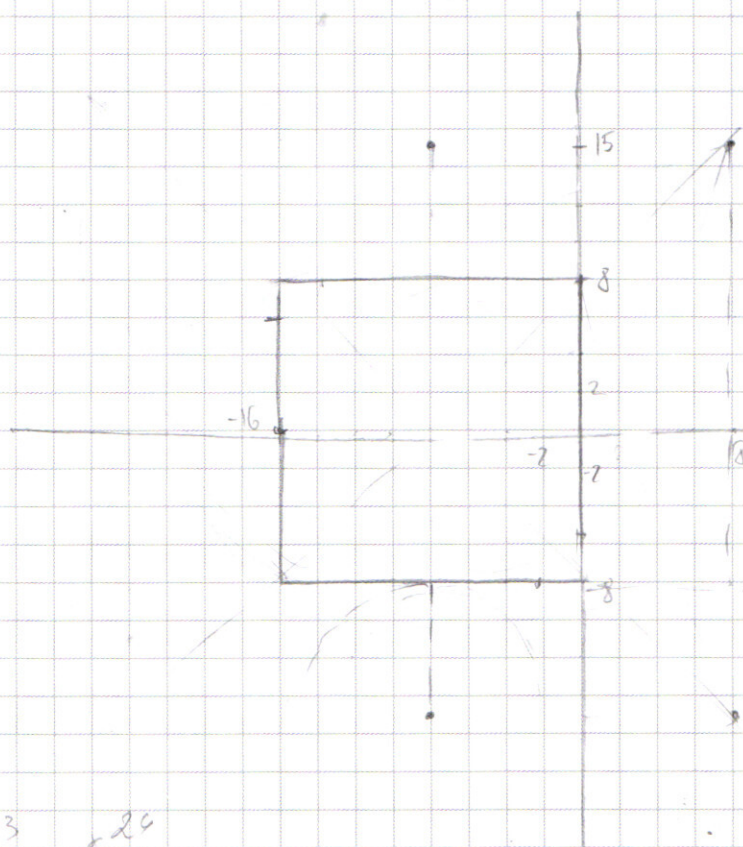
$$1. \sqrt{a} = 7$$

$$a = \underline{\underline{49}}$$

$$2. a = 23^2 + 24^2 =$$

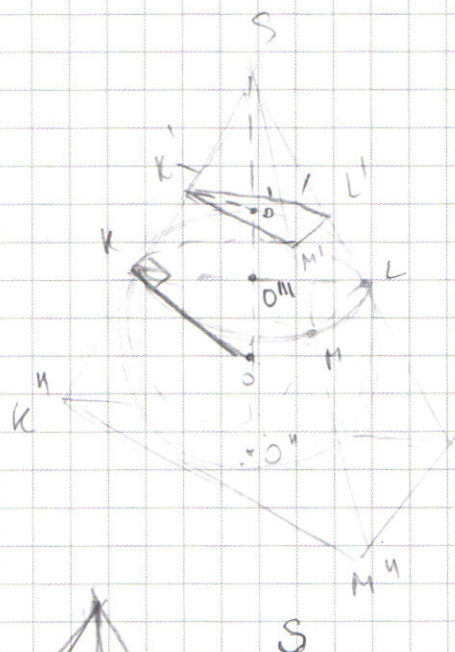
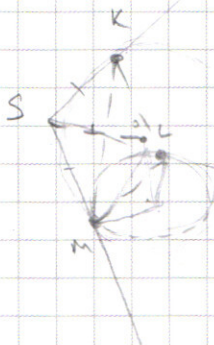
$$= \underline{\underline{1105}}$$

$$16 \cdot 25^2 = 100 \cdot 100$$



$$\begin{array}{r} 23 \quad 24 \\ 23 \quad 24 \\ \hline 69 \quad 96 \\ 46 \quad 48 \\ \hline 529 \quad 576 \\ + 576 \\ \hline 529 \\ \hline 1105 \end{array}$$

4.



$$\frac{SO'}{SO+2R} = \frac{3}{4}$$

$$SO' = 6R$$

$$g = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\sin \angle KSO = \frac{R}{7R} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{12}{13}$$

$$a' = \frac{13}{12} a$$

$$S_{KML} = \frac{\sqrt{3}}{4} (a')^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{169}{144} = \frac{169}{144} \cdot g$$

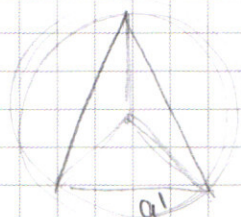
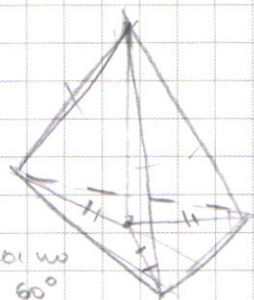
$$= \frac{169}{16} = 10 \frac{9}{16} =$$

$$= 10 \frac{9 \cdot 25^2}{10000} =$$

$$= 10,5625$$

$$\begin{array}{r} 625 \\ \times 9 \\ \hline 5625 \end{array}$$

Все углы по 60°



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3.) \int \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)} \quad (1)$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \quad (2)$$

(2) Разделим всё на x^2 :

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x} - 3 + \frac{12}{x} + \frac{4(y)}{x(y)} = 0$$

$$1 - 2 - 3 + \frac{12}{x} - \frac{4}{x} = 0$$

$$-4 + \frac{8}{x} = 0$$

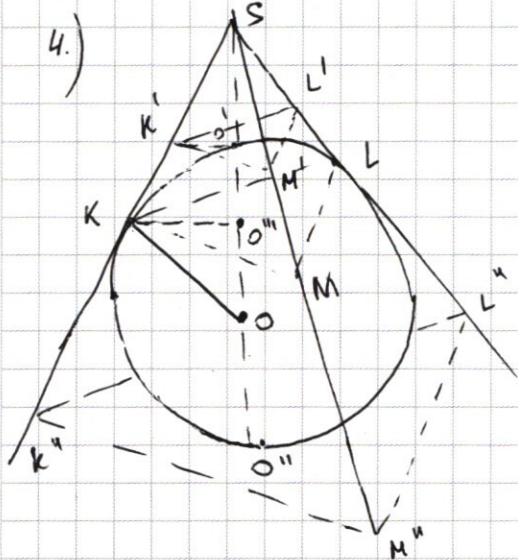
$$x = 2, y = -2$$

Ответ: (2; -2)

(1). Возведем логарифмический показатель от обеих частей:

$$\ln(y) \cdot \ln\left(-\frac{x^7}{y}\right) = \ln(xy^2) \cdot \ln(x)$$

$$\text{Отсюда } x = -y$$



1. Соединим точки K и O. По ТТП $KO \perp KS$.

2. Пусть $SO' = x$. Тогда у нас будет

$$\frac{x}{x+2R} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4};$$

$$4x = 3x + 6R$$

$$x = 6R$$

$$3. KO = R \Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{1}{7}$$

$$SO = 7R$$

4. Соединим K и O', K и O'', K и O'''. $KO'' \perp SO$, $KO' = KO \Rightarrow KO'$ - медиана,

$$OO' = O''O = \frac{R}{2}$$

$$\frac{KO'}{KO''} = \frac{6}{6 + \frac{1}{2}} = \frac{12}{13}$$

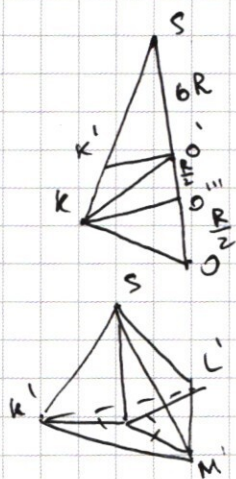
5. Т.к. сфера касается уша, то $KS = \cancel{8R} = SL$
 $K'S = M'S = L'S$.

SO' - высота, $K'S = M'S = L'S \Rightarrow KO' = LO' = MO'$, где O - точка пересечения медиан. $\triangle K'L'M'$ - равносторонний

$$g = K'M'^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ где } \frac{K'M'}{KM} = \frac{K'O'}{KO''}$$

$$S_{KML} = KM^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{13}{2}\right)^2 \cdot g = \frac{169}{16} \cdot \frac{9}{16} = 10 \frac{9}{16} = 10,5625$$

Ответ: $\arcsin\left(\frac{1}{7}\right)$
 $S = 10,5625$.







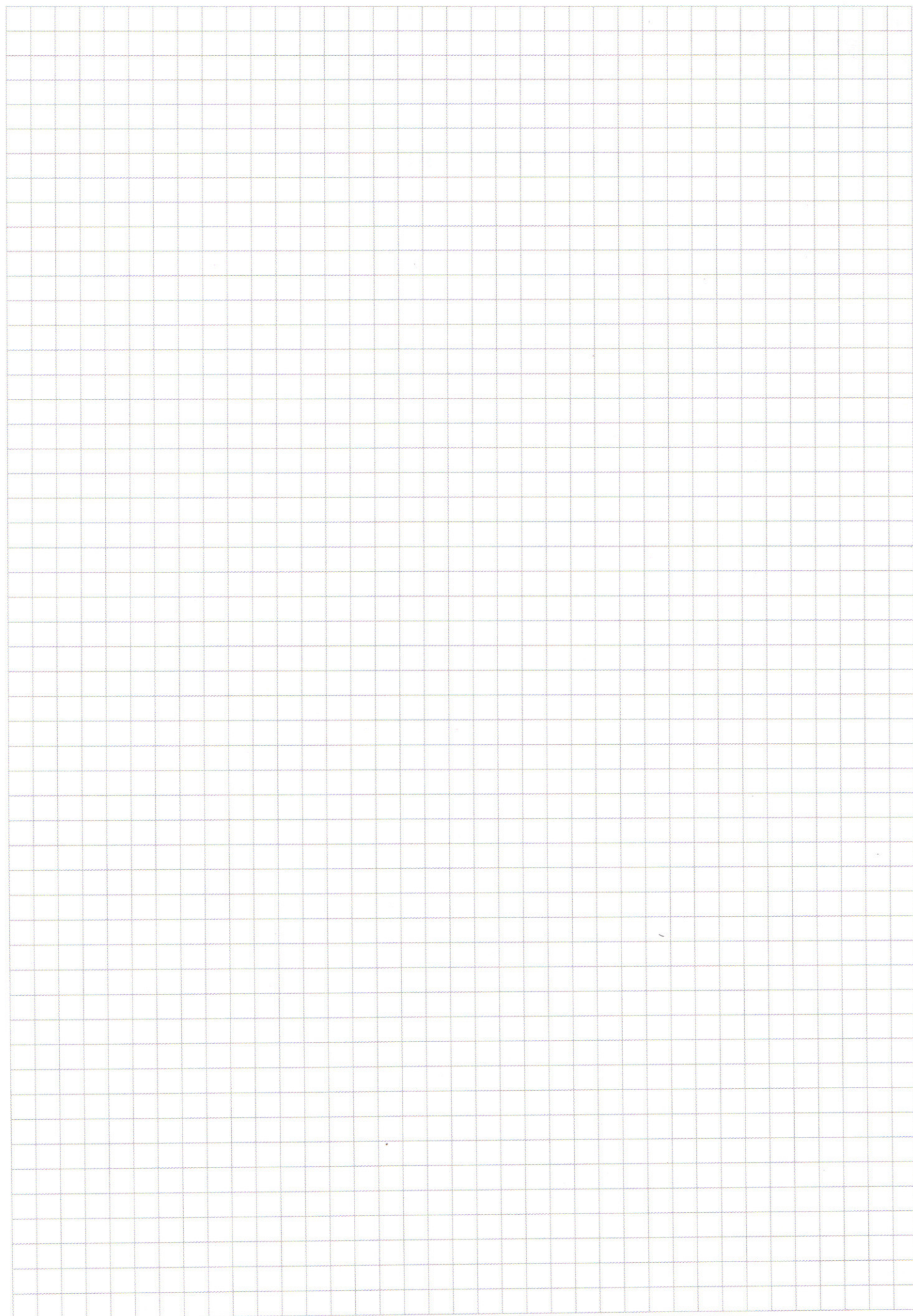
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)