

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K , L , M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

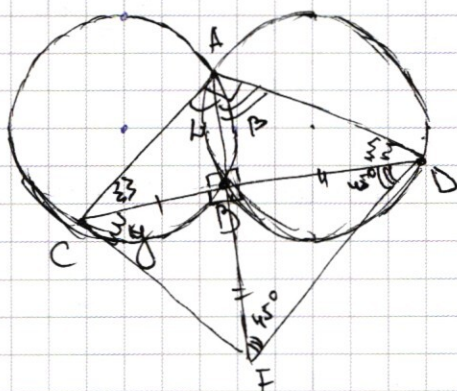
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



а) $R=17$

$\angle CAD=90^\circ$; $BF=BD$; $AB \perp CD$

б) $BC=16$

~~Доказ!~~

Дано:

Найти:

а) $CF=?$

б) $S_{ACF}=?$

Реш:

а) 1. $CF^2 = CB^2 + BD^2 = CB^2 + BF^2$

2. По следств. из т. син.!

$$\frac{CB}{\sin \alpha} = 2R = 2 \cdot 17 \Rightarrow CB = 34 \sin \alpha$$

$$\frac{BD}{\sin \beta} = 2R = 2 \cdot 17 \Rightarrow BD = 34 \sin \beta$$

3. $\sin \beta = \sin (90 - \alpha) = \cos \alpha$

4. $CF = \sqrt{CB^2 + BD^2} = \sqrt{34^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = \boxed{34}$

б) 1. В равном окр. $\angle ACB$ и $\angle ADB$ опр. на равн. дуги $\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB$

$$\angle ACB + \angle ADB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ \Rightarrow CB = BD = BF$$

2. $BF^2 = CF^2 - CB^2 \Rightarrow BF^2 = 34^2 - 16^2 \Rightarrow BF = 30$

3. $AC = CD \sin 45^\circ = (CB + BD) \frac{\sqrt{2}}{2} = (16 + 30) \frac{\sqrt{2}}{2} = 23\sqrt{2}$

4. $S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF (\sin 45^\circ + y) = \frac{1}{2} \cdot 23\sqrt{2} \cdot 34 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{16}{24} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{30}{34} \right) =$
 $= 23\sqrt{2} \cdot 17 \left(\frac{23\sqrt{2}}{24} \right) = 23^2 \cdot \frac{17}{2} = \boxed{529}$

Ответ: $CF = \boxed{34}$

$S_{ACF} = \boxed{529}$

$$\sqrt{1} \quad 64827 = \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_4 \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_3 \cdot 1$$

Восьмизнач. число можно разделить на 4 и 3

$$\begin{array}{l} 4 - [7] \\ 3 - [3] \\ 1 - [1] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4 - [7] \\ 3 - [3] \\ 1 - [3] \\ 2 - [1] \end{array}$$

$$C_1 = \frac{8!}{4! \cdot 3!}$$

$$C_2 = \frac{8!}{3! \cdot 1! \cdot 4! \cdot 2!}$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2} = \frac{280}{280} + \frac{840}{840} = 1120$$

Ответ: количество восьмизнач. чисел, которое можно составить равно 1120

$$\sqrt{2} \quad \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\left\{ \sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

$$2\cos 5x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2\sqrt{2} \cos 5x \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2\sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \left(\cos 5x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \right) = 0$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{7}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) \right) = 0$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \pi n \\ \frac{7}{2}x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi l \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2} \\ x = \frac{2}{7} \left(\frac{3}{8}\pi + \pi k \right) \\ x = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{4}\pi + \pi l \right) \end{cases} \Rightarrow \underline{n, k, l \in \mathbb{Z}}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2} \\ x = \frac{3}{28}\pi + \frac{2}{7}\pi k \\ x = \frac{1}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi l \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\left\{ \begin{aligned} \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(y)} &= x^{2\ln(xy^2)} \quad (1) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} -y > 0 \\ xy^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \quad (2)$$

$$(1) \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$x^{2\ln(-y) - 2\ln(xy^2)} = (-y)^{\ln(y)}$$

$$\ln x (2\ln(-y) - 2\ln x - 4\ln(y)) = \ln(y) \ln(y)$$

$$2\ln^2 x - 3\ln x \cdot \ln(y) + \ln^2(y) = 0$$

$$\begin{cases} 2\ln x - \ln(y) = 0 \\ \ln x - \ln(y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln^2 x^2 = \ln(y) \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 = y \\ x = -y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 \quad (3) \\ y = -x \quad (4) \end{cases}$$

$$(2) y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(y+3x)(y-x+4) = 0$$

~~y = -x~~

$$(3) y = -x^2$$

$$(-x^2+3x)(-x^2-x+4) = 0$$

$$\begin{cases} x^2-3x=0 \\ x^2+x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)x=0 \\ x^2+x-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \\ x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \text{ и.к., т.к. } x > 0.$$

$$(4) y = -x$$

$$(3x-x)(-x-x+4) = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$2 = \sqrt{17}$
 $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

При $x=0$ $y=0$. Это тоже посторон. корень, т.к. $y < 0$.

Ответ:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \\ x=3 \\ y=-3 \\ x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{-9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$y = -\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 = -\left(\frac{1+2\sqrt{17}+17}{4}\right) = \frac{-9-\sqrt{17}}{2}$$

N5 ~~$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$
 $(|x|+8)^2 + (|y|-15)^2 = 0$~~

N7
$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{28} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 46 + 2 \cdot (2^{32} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} - 7 - 2(2^{32} - 1)x < 0$$

$$x=6$$

$$2^6 + 3 \cdot 2^{34} - 76 - 2(2^{32} - 1)6 = 64 + 3 \cdot 2^{34} + 12 - 76 + 3 \cdot 2^{34} - 12 \cdot 2^{32} = 0$$

$$x=38$$

$$\begin{aligned} 2^{38} + 3 \cdot 2^{34} - 76 - 2(2^{32} - 1)38 &= \\ = 2^{38} + 3 \cdot 2^{34} - 76 - 2 \cdot 38 \cdot 2^{32} + 76 &= \\ = 2^{34}(2^4 + 3 - 19) &= 0 \end{aligned}$$

кач-во y загл. x !

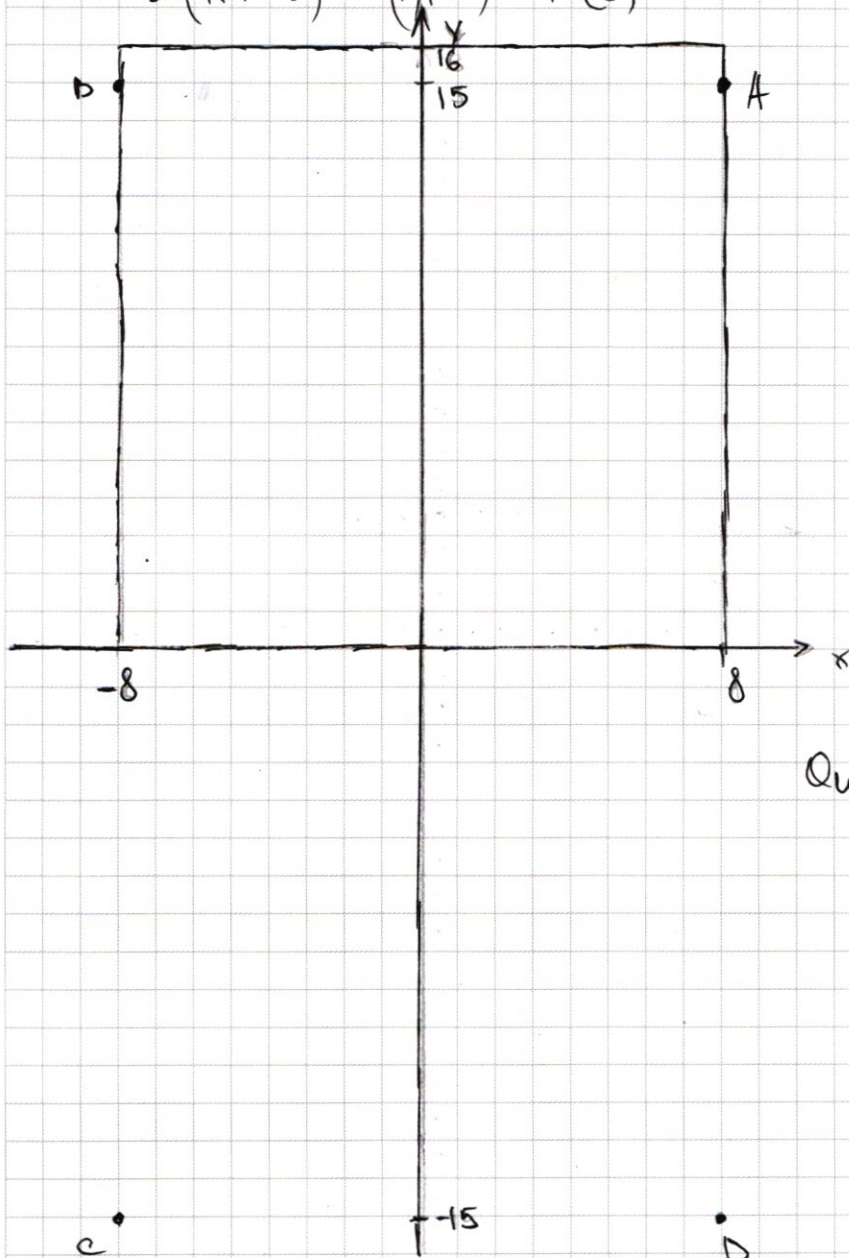
$$76 + 2(2^{32} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{34}$$

Общ. кач-во нап. реш.

$$\begin{aligned} \sum_{x=6}^{38} (76 + 2(2^{32} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{34}) &= (76 - 3 \cdot 2^{34})(38 - 6) - 2(2^{32} - 1)x \\ &= \frac{(38-6)(38-6+1)}{2} - 2^6 \frac{2^{32}-1}{2-1} - (76 - 3 \cdot 2^{34}) \cdot 32 + (2^{32} - 1)32 \cdot 33 - 2^{39} + 2^6 = \\ &= 76 \cdot 32 - 32 \cdot 33 + 64 + 2^{37}(33 - 12 - 4) = \frac{(76 - 54)32}{42} + 2^{37} \cdot 17 = \\ &= 1344 + 2^{37} \cdot 17 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5
$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (x-8)^2 + (y-15)^2 = 9 \quad (2) \end{cases}$$

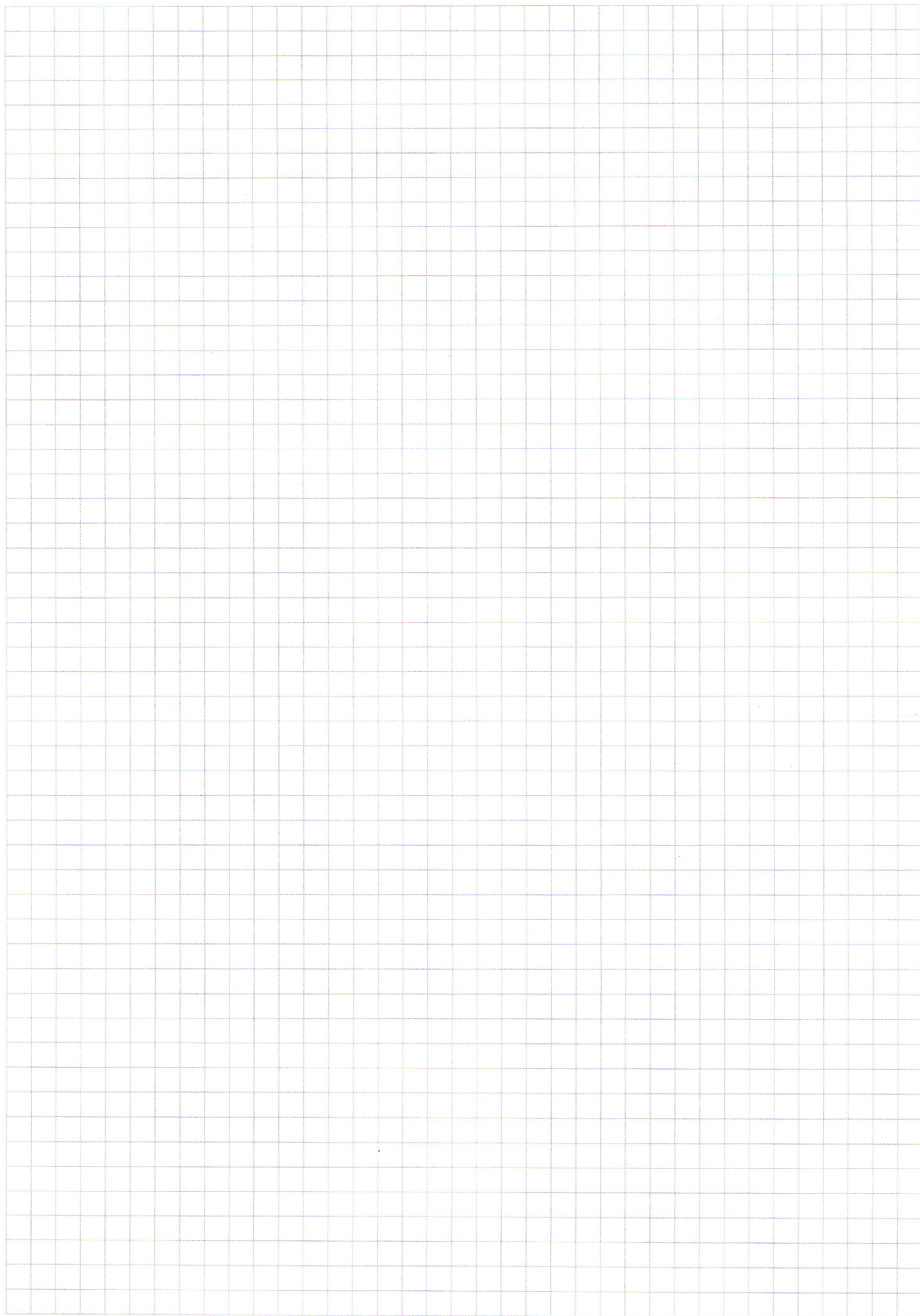


Т. А, В, С, D - центры
окружностей (2) с рад. $R=3$
границами этих окр. авт.
прямые $x=8$ и $y=15 \Rightarrow$ окр. с цент.
С и D не смогут пересечься
2 раза квадрат.

$$R_{\max} = 8 \quad R_{\min} = 0$$

$$a_{\max} = 2\sqrt{2} \quad a_{\min} = 0$$

$$Q_{\text{sub}}: a \in (0; 2\sqrt{2}]$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

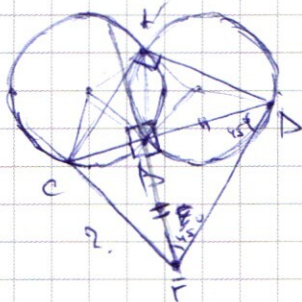
$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$R = 17$$

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} (2 \cos^2 2x - 1) = 0$$

$$\begin{aligned} 2 \sin x \cos x \\ 2 \cos^2 x - 1 \\ 2 \cos^2 2x - 1 \end{aligned}$$

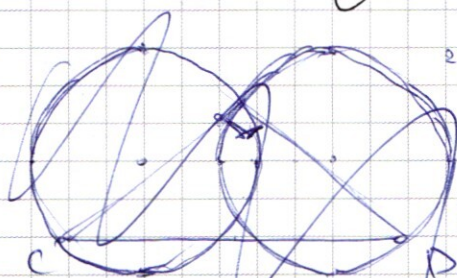


$$C = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{40320}{24 \cdot 24} = \frac{40320}{576} = 70$$

$$\begin{array}{r} 64827 \div 3 \\ 6 \quad 21609 \\ 4 \quad 21609 \\ -3 \quad 21609 \\ -18 \quad 21609 \\ 18 \quad 21609 \\ 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 70 \\ \times 4 \\ \hline 280 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 1. \angle ACB = \angle ADB \\ \angle ACB + \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ \end{aligned}$$



$$2. BF^2 = CF^2 - CB^2 \Rightarrow BF = \dots$$

$$3. AC = CD \sin 45^\circ = (CB + BD) \frac{\sqrt{2}}{2} = \dots$$

$$4. S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF (\sin 45^\circ) = \dots$$

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2$$

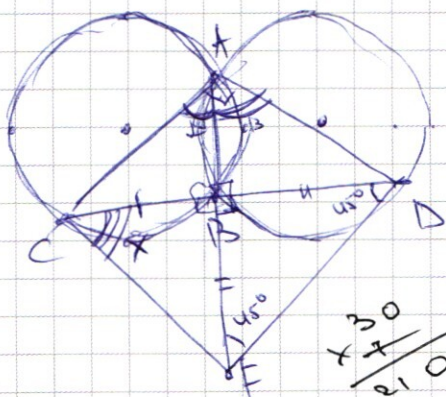
$$\frac{CB}{\sin L} = 2R = 2 \cdot 17 \Rightarrow CB = 34 \sin L$$

$$\frac{BD}{\sin P} = 2R = 2 \cdot 17 \Rightarrow BD = 34 \sin P$$

$$\sin P = \sin (90 - L) = \cos L$$

$$CF = \sqrt{CB^2 + BD^2} = \sqrt{34^2 (\sin^2 L + \cos^2 L)} = 34$$

$$CB = BF$$



$$(\sin 45^\circ \cos x + \cos 45^\circ \sin x)$$

$$\begin{array}{r} \times 30 \\ 7 \\ \hline 210 \\ \times 210 \\ 840 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ +8 \\ \hline 23 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 18 \\ \hline 828 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 50 \\ \hline 900 \end{array}$$

№3

$$\ln\left(-\frac{x^2}{y}\right) \ln(-y) = x^{2\ln(x y^2)} (1)$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$\begin{aligned} -y > 0 \\ x y^2 > 0 &\Rightarrow x > 0 \\ y > 0 \end{aligned}$$

(1) ~~$2\ln(x y^2)$~~ $-2\ln(x y^2)$

$$\frac{1}{x \cdot y} = \frac{3}{28}$$

$$x^{2\ln(x y^2)} = (1-y)^{\ln(-y)}$$

$$\ln x (2\ln(x y^2) - 2\ln x - 4\ln(y)) = \ln(-y) \ln(-y)$$

$$2\ln^2 x - 3\ln x \ln(y) + \ln^2(y) = 0$$

$$2\ln x - \ln(y) = 0$$

$$2\ln(-y) - \ln(y) = 0$$

$$\ln x - \ln(y) = 0$$

$$\ln(y) - \ln(x)$$

(2) ~~$2\ln(x y^2) = 0$~~
 ~~$\ln(y) - \ln(x)$~~

$$3x(x+4)$$

$$\begin{aligned} x &= -y \\ x^2 &= -y \end{aligned} \quad \begin{aligned} y &= -x \\ y &= -x^2 \end{aligned}$$

$$(y+3x)(y-x+4) = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$\begin{aligned} y &= -x \\ (3x-x)(-x-x+4) &= 0 \\ x &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -x^2 \\ (-x^2+3x)(-x^2-x+4) &= 0 \\ x^2+3x &= 0 \\ x^2-4x+4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{9+2\sqrt{17}+17}{4} = \frac{-9+\sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -2 \\ x &= \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y &= -\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{-9-\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2-3x &= 0 \\ x^2+x-4 &= 0 \\ x(x-3) &= 0 \\ x &= 0 \\ x &= 3 \\ x &= \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x &= \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (x-8)^2 + (y-15)^2 = 9 \end{cases}$$

$$x_0 = 8$$

$$y_0 = 15$$

$$\begin{aligned} \text{Sign}(x+y) & \begin{array}{c} - \\ + \end{array} \\ \text{Sign}(x-y) & \begin{array}{c} - \\ + \end{array} \end{aligned}$$

$$x+y \leq -8$$

$$-x-y+8 - x-y+8 = 16$$

$$-2x+16=16$$

$$-2x=0$$

$$x=0$$

$$x+y \geq -8$$

$$x+y+x-y+16=16$$

$$2x=0$$

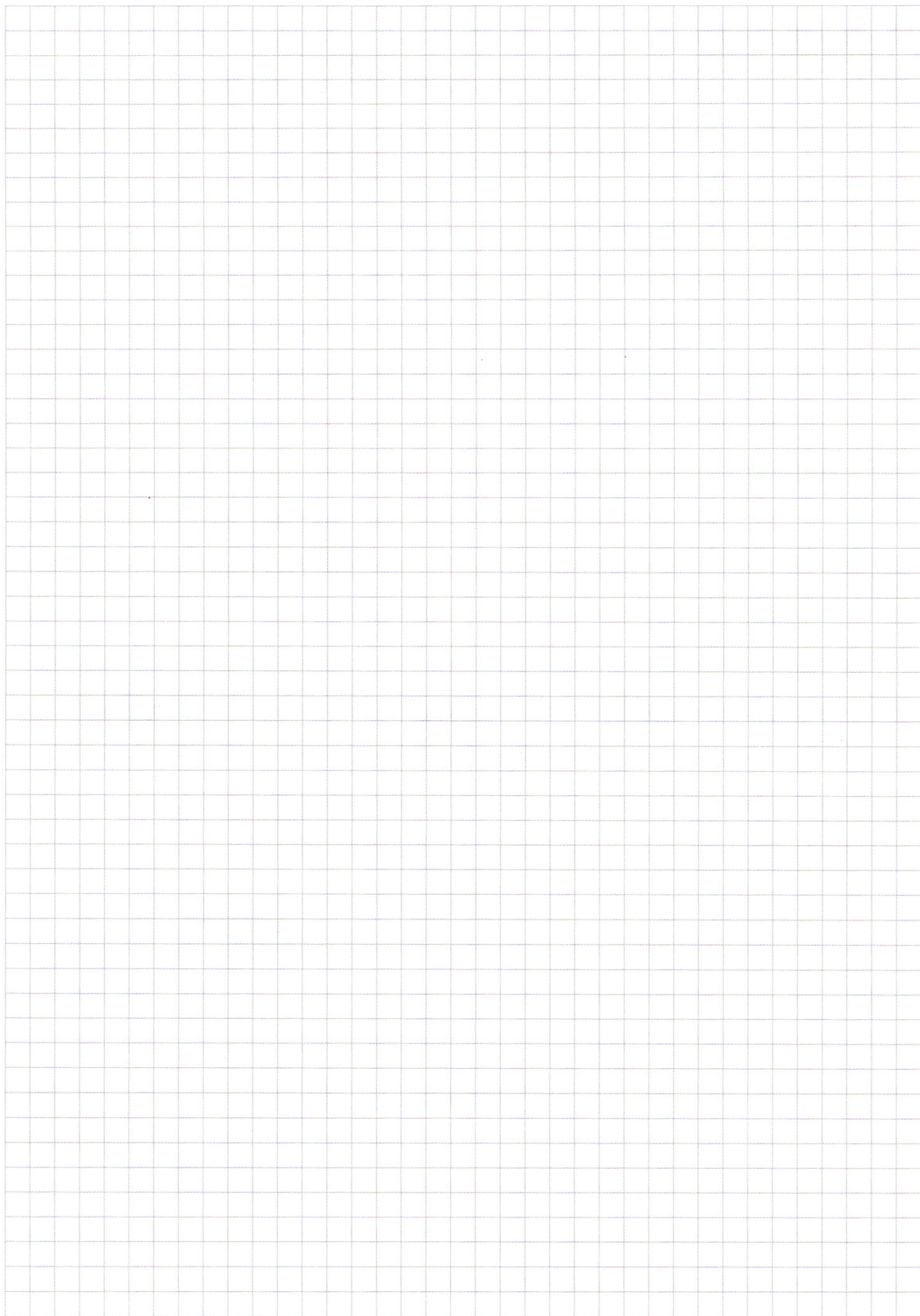
$$x=0$$

$$y \geq -8$$

$$y \leq -8$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 2 \\ \hline 84 \\ + 126 \\ \hline 170 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 225 \\ - 69 \\ \hline 156 \end{array}$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)