

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.2. $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

Воспользуемся тем, что $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
и $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$:

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\sin 2x + \cos 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)) = 0$$

$\Rightarrow$ исходное уравнение равносильно совокупности:

$$\begin{cases} \sin 2x + \cos 2x = 0 & (1) \\ 2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0 & (2) \end{cases}$$

Решим каждое по отдельности:

$$\begin{aligned} 1) \quad \sin 2x + \cos 2x = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$2) \quad 2 \cos 5x - \sqrt{2} (\sin 2x - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 5x + 2 \sin 2 \cos 5x + 2 \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos(\frac{7}{2}x + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\bullet \cos(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos(\frac{7}{2}x + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\cos(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{2}x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } -\frac{2}{8} + \frac{21k}{2}, \frac{37}{28} + \frac{25m}{7}, \frac{57}{12} + \frac{29n}{3}; m, n, k \in \mathbb{Z}.}$$

1.1) Заметим, что $64827 = 3^3 \cdot 7^4$. Тогда у нас есть две возможности составить число по условию задачи:

1) Число состоит из одной „1“, трех „3“ и четырех „7“. Из 8-ми мест выбрать одно для „1“ мы можем $C_8^1 = 8$ способами. Из оставшихся 7-ми мест выбрать три для „3“ мы можем $C_7^3 = 5 \cdot 7$ способами, и из оставшихся 4-х мест выбрать четыре для „7“ можно $C_4^4 = 1$ способом. Всего получаем: $C_8^1 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 = 8 \cdot 5 \cdot 7 = 280$ способов $\Rightarrow$ 280 таких чисел существует.

2) Число состоит из одной „3“, одной „9“, четырех „7“ и двух „1“. Аналогично получаем:

$$C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^4 \cdot C_2^2 = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 840 \text{ таких чисел.}$$

Очевидно, других возможностей быть не может, т.к. цифра не превосходит 9-ти. Всего получаем $280 + 840 = 1120$ чисел.

$$\boxed{\text{Ответ: } 1120}$$

1.5)
$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ ((|x|-8)^2 + (|y|-15)^2) = a \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. Рассмотрим случаи раскрытия модуля:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Случай 1. $x+y+s \geq 0, x-y+s \geq 0$

$$x+y+s+x-y+s=16 \Leftrightarrow x=0$$

Тогда $\begin{cases} y \geq -s-x = -s \\ y \leq x+s = s \end{cases} \Rightarrow \underline{x=0, y \in [-s; s]}$

Случай 2. $x+y+s \geq 0, x-y+s \leq 0$

$$x+y+s-x+y-s=16 \Leftrightarrow y=s$$

Тогда $\begin{cases} x \geq -s-y = -16 \\ x \leq y-s = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x \in [-16; 0], y=s}$

Случай 3. $x+y+s \leq 0, x-y+s \geq 0$

$$-x-y-s+x-y+s=16 \Leftrightarrow y=-s$$

Тогда $\begin{cases} x \leq -s-y = 0 \\ x \geq y-s = -16 \end{cases} \Rightarrow \underline{x \in [-16; 0], y=-s}$

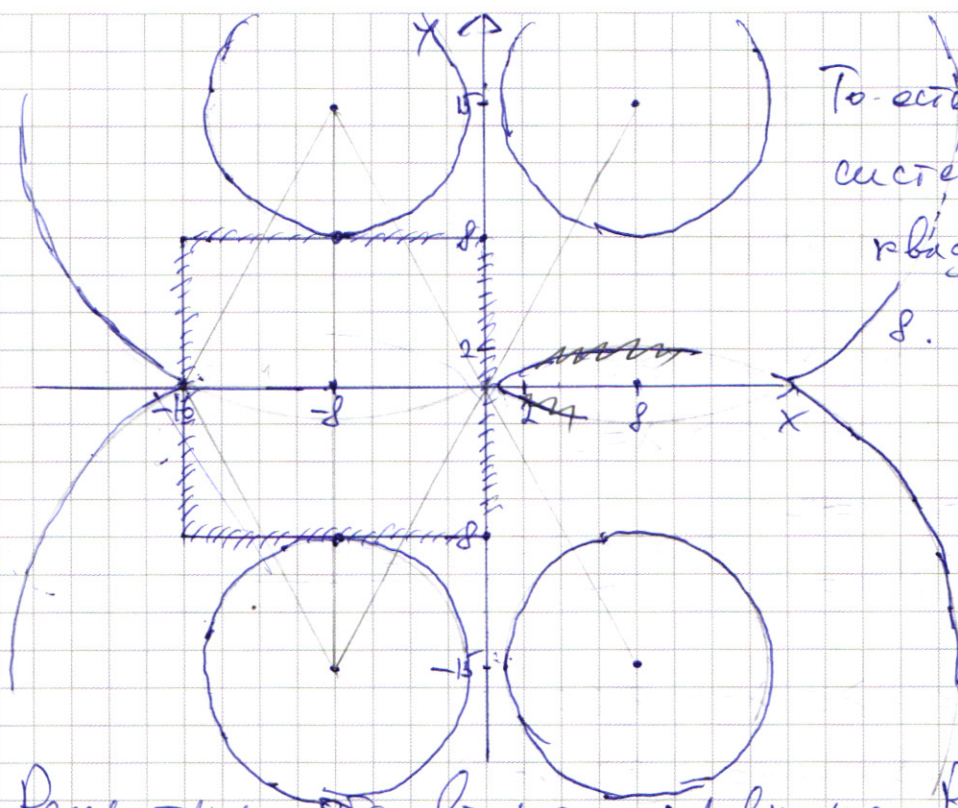
Случай 4. $x+y+s \leq 0, x-y+s \leq 0$

$$-x-x+s-x+y-s=16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-16$$

Тогда $\begin{cases} y \leq -s-x = s \\ y \geq x+s = -s \end{cases} \Rightarrow \underline{x=-16, y \in [-s; s]}$

Рассмотрев все 4 случая, мы можем изобразить найденные множества на чертеже (см. обратн. сторону)



То есть первое уравнение системы задает квадрат со стороной 8.

Рассмотрим ~~то~~ второе уравнение. Раскрывем модули, видим, что оно задает две пары "некоторых" окружностей с радиусом $\sqrt{a}$ и с центрами в точках $(8; 15)$, $(8; -15)$, $(-8; 15)$, $(-8; -15)$.

Заметим, что если $a < 7^2$, то окружность не касается квадрата $\Rightarrow$ при $a < 7^2$ решений нет. Случай $a = 7^2$ изображен на чертеже.

Тогда окружности в III и IV четвертях касаются квадрата в точках $(-8; 8)$ и $(-8; -8)$: ровно два решения.
(по т. Пифагора, см. чертёж)

Заметим, что при $r = \sqrt{a} = \sqrt{4^2 + 15^2} (\Rightarrow a = 241)$ только две точки касания: пересечение с квадратом: в точке $(-16; 0)$ и $(0; 0)$. При $a > 7^2$ и $a < 241$

Заметим, что окружность в III четверти пересекает квадрат в двух точках и в IV четверти тоже пересекает квадрат в двух точках.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $a > 241$ и $a < \sqrt{(15+8)^2 + 4^2}$ окружность в II четверти пересекет квадрат в двух различных точках и окружность в IV четверти пересекет в

Заметим, что при $a > \sqrt{241}$ решений нет, так как окружности не будут вообще пересекать квадрат или касаться его. (Точки касания окр. в III и IV четвертях с осью OX будут находиться левее, чем -16; с осью OY ситуация аналогична ввиду симметрии.)

Ответ: 49; 241.

Р.3
$$\begin{cases} \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим второе ур-ние как квадратное относительно y :

$$y^2 + y(2x+4) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (2x+4)^2 + 12x^2 - 48x = 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x = \\ &= 16x^2 - 32x + 16 = 4^2(x-1)^2 = (4x-4)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-2x-4+4x-4}{2} = x-4 \\ y = \frac{-2x-4-4x+4}{2} = -3x \end{cases}$$

Тогда исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y = x - 4 \\ y = -3x \end{cases}$$

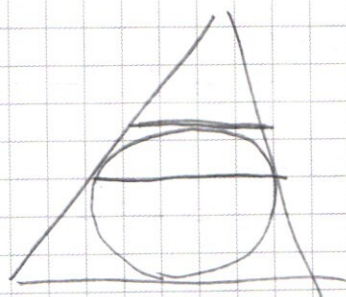
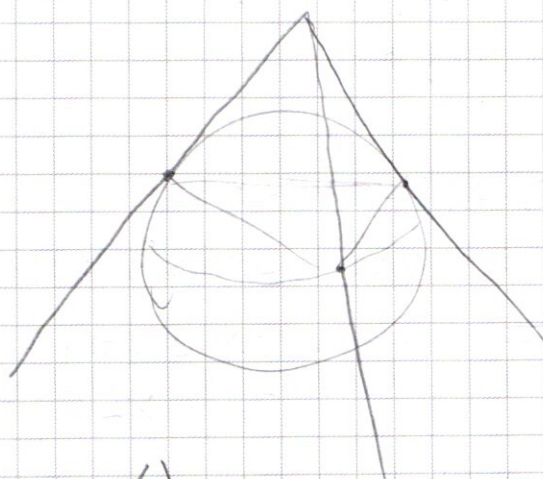
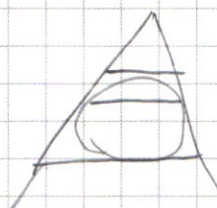
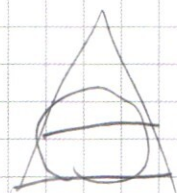
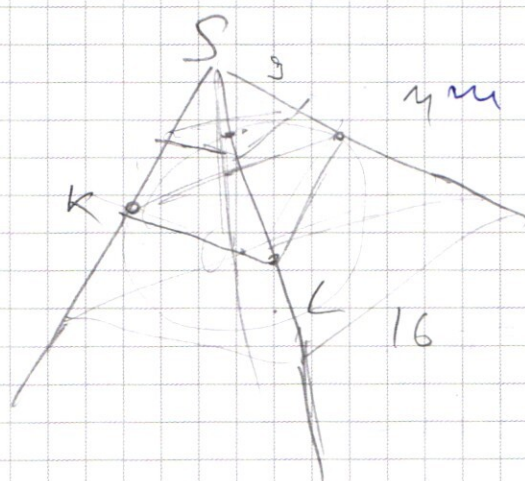
ОДЗ: $\begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$93 + (3^{2x} - 3)x \geq 4 > 3^x + 4 \cdot 3^{2x}$$

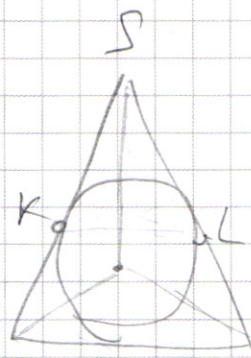
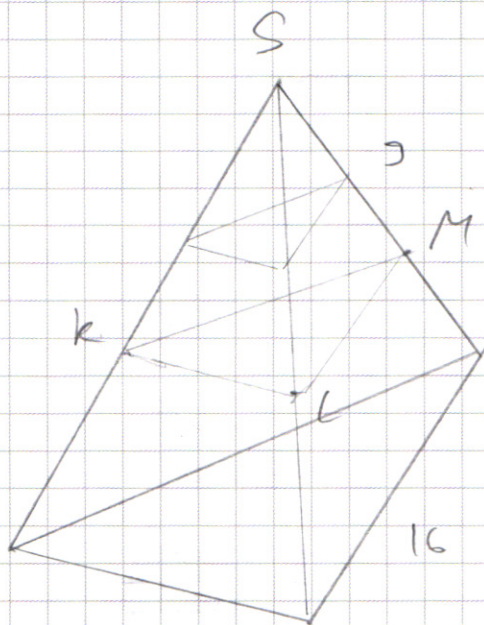
$$93 + 3^{2x}x - 3x > 3^x + 4 \cdot 3^{2x}$$

$$93 - 3x > 3^x + 3^{2x}(4 - x)$$



$$xy^2 > 0$$

$$x > 0$$



$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -3x \end{cases}$$

$$y^2 + 2xy -$$

$$y^2 + y(2x + 4) - (3x^2 - 12x) = 0$$

$$D = 4x^2 - 16x + 16 + 12x^2 - 48x = 16x^2$$

$$y^2 + y(2x + 4) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$D = 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x =$$

$$= 16x^2 - 32x + 16 = 16(x^2 - 2x + 1) = (4x - 4)^2$$

$$y = \frac{-2x - 4 + 4x - 4}{2} = x - 4$$

$$y = \frac{-2x - 4 - 4x + 4}{2} = -3x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos x$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin(x-y) - \sin(x+y) =$$

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \sin y \cos x$$

$$y = x_1, x = y_1$$

$$2 \sin x_1 \cos y_1 = \sin(x+y_1) - \sin(x-y_1)$$

$$x+y=a \quad x=\frac{a+b}{2}$$

$$x-y=b \quad y=\frac{a-b}{2}$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + d) =$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} \cos d - \sin d \cos \frac{\pi}{2} = \cos d$$

$$7x + \frac{\pi}{4} - 3x + \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2} = 2x + \frac{\pi}{4}$$

$$\sin 7x + \cos 7x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x \right) =$$

$$= \sqrt{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x - (\sin 3x - \cos 3x) = 0$$

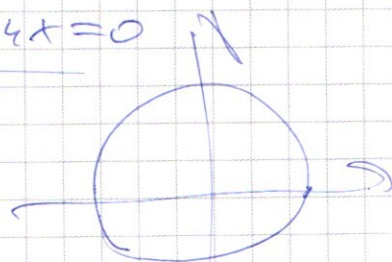
$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x - \sin(3x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$2 \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \sin(4x + \frac{\pi}{2}) =$$

$$= 2 \sin \sin \frac{\pi}{4} \sin 2x$$



1 2

$$C_3! \cdot C_2! \cdot C_1! = 3 \cdot 6$$

$$C_3^2 \cdot 1 = \frac{3!}{2!} = 3$$

1 1 2

1 2 3

$$\ln(-y) = \log_e(-y) = \frac{1}{\ln y}$$

1 2 1

1 3 2

$$= \ln(-y) =$$

2 1 1

$$= \ln(1 - (1+y)) =$$

$$y^2 - 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$= \ln 1 -$$

$$D = 4x^2 + 12x^2 = (4x)^2$$

$$\frac{\ln 1}{\ln(1+y)} =$$

$$y = \frac{2x+4x}{2} = 3x$$

$$y = \frac{2x-4x}{2} = -x$$

$$(y+x)(y-3x) + 4(3x+y) = 0$$

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$\left(-x^2 \cdot y^{-1}\right)$$

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = \left(x^{\ln(xy^2)}\right)^2$$

$$\left(-x^2\right)^{\ln(-y)} \cdot y^{-\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$(-1)^{\ln(-y)} \cdot x^{2\ln(-y)} \cdot y^{-\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -3x \end{cases}$$

$$y^{\ln y} = y^{\frac{1}{\log_y e}}$$

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$-y = 3x$$

$$x^{2\ln(-y)} \cdot (-y)^{-\ln(-y)} = x^{2\ln x + 4\ln y}$$

$$x \neq 0: \quad x^{2\ln(-y) + 4\ln y}$$

$$x^{2\ln(-y) - 4\ln(y)} + 2\ln x \cdot (-y)^{-\ln(-y)} = 1$$

$$-y > 0$$

$$3: y < 0 \Rightarrow |y| = -y$$

$$x^{3\ln(-y) + 2\ln x} \cdot (-y)^{-\ln(-y)} = 1$$

$$\text{При } y = -3x: \quad x^{3\ln(3x) + 2\ln(x)} =$$

$$= x^{3\ln 3 + 3\ln x + 2\ln x} = x^{3\ln 3 + 5\ln x}$$

$$\begin{aligned} (3x^6)^{\ln x} \cdot x^{\frac{2\ln 3 \ln 3}{3}} \\ (3x^6)^{\ln x} \cdot \left(\frac{x^2}{3}\right)^{\ln 3} = 1 \end{aligned}$$

$$(-y)^{-\ln(y)} = (3x)^{-\ln(3x)} = \frac{1}{3^{(\ln 3)(\ln 3 - \ln x)}}$$

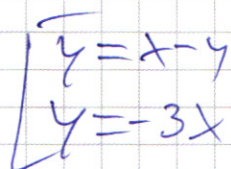
$$x^{3\ln 3 + 5\ln x} = 3^{\ln 3 - \ln x} \cdot x^{\ln 3 - \ln x} \cdot x^{\ln 3 - \ln x}$$

$$x^{2\ln 3 + 6\ln x} = 3^{\ln 3 - \ln x}$$

$$x^{2\ln 3} \cdot (x^6)^{\ln x}$$

$$x^{2\ln 3} \cdot (x^6)^{\ln x}$$

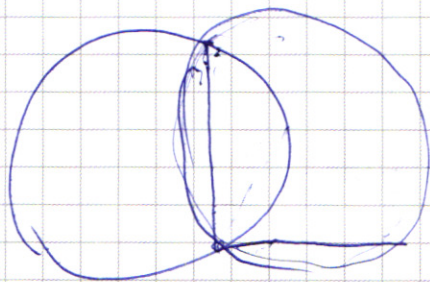
$$x^{2\ln 3} \cdot (x^6)^{\ln x} = \frac{\ln 3}{3 \ln x} \cdot 3$$



$3x > 0$

$$X(-3\lambda) > 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$



$$x \cdot (-3x)^2 =$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 9x^3 > 0 \\ x > 0 \end{matrix}$$

$$\frac{7}{2} + = \frac{37}{8} + 7n$$

$$7x = \frac{35}{4} + 25n$$

$$\lambda = \frac{37}{28} + \frac{27n}{47}$$

$$-\frac{1}{y} > 0$$

$$\frac{x}{-3x} > 0$$

$$\frac{1}{3} \times 50$$

$$\frac{-x}{x-4} > 0$$

$$\frac{1}{4-x} > 0$$

$$2(x-4) < 0$$

$$\lambda \in [0; 4]$$

225

$$\begin{array}{r} 2 \\ 15 \\ \cdot 15 \\ \hline 75 \\ + 15 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 225 \\ + 16 \\ \hline 241 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$CD^2 = AC^2 + AD^2$
 $BF = FD$
 $a^x = 1$
 $a^x \cdot b^y = \begin{cases} a^x = 1 \\ x \in \mathbb{R} \\ x = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$
 $x^7 \cdot t$
 $x^{7 \ln t} \cdot y^{-\ln t} = x^{2 \ln x + 4 \ln t}$
 $(x^{\ln t})^3 \cdot (x^{\ln t})^4 \cdot y^{-\ln t} = x^{2 \ln x} + (x^{\ln t})^4$
 $x^{3 \ln t - 2 \ln x} \cdot y^{\ln t} = 1$
 $x^2 = 2r^2 - 2r \cos \alpha$
 $y^2 = 2r^2 + 2r \cos \alpha$
 $x^2 + y^2 = 4r^2$
 $x^2 + y^2 = (2r)^2$
 $R_{\text{region}}, x^{\ln t} \neq 0$
 $x^{3 \ln t} \cdot y^{-\ln t} = x^{2 \ln x}$

$$-3(x^2 - 4x + 4)$$

$$D = 16 - 4c$$

$$y^2 + 2xy +$$

$$y^2 + 2xy - 3(x^2 - 4x + 4) + 12 + 4y = 0$$

$$y + 2$$

$$x^2$$

$$(y+2)^2 - 3(x-2)^2 + 8 + 2xy = 0$$

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)}$$

$$x^2 (\ln x + 2 \ln t)$$

$$= x^{2 \ln x} \cdot x^{4 \ln t}$$

$$\ln(x)$$

$$-y = t$$

$$\left(\frac{x^2}{t}\right)^{\ln t} = x^{2 \ln(xt^2)}$$

$$t^2 - 2xt - 3x^2 + 12x - 4t = 0$$

$$t^2 - 2xt + x^2 - 4x^2 + 12x - 4t = 0$$

$$(t-x)^2 - 4(x^2 - 3x + t) = 0$$

$$D = 9 - 4t$$

$$(x^2 \cdot t^{-1})^{\ln t} = x^{2 \ln(xt^2)}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(x^3 \cdot t^{-1})^{\ln t}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. 1. $y \in [0; 8]$

$$6y + (y-15)^2 = a$$

$$(y-15)^2 = a - 6y$$

$$(y-15)^2 \rightarrow y-15 = \sqrt{a-6y}$$

$$y-15 = \sqrt{a-6y}$$

$$y = 15 - \sqrt{a-6y} \geq 0$$

$$15 \geq \sqrt{a-6y}$$

$$15 \leq \sqrt{a-6y}$$

$$y^2 + y(2x+4) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$D = (2x+4)^2 + 4(3x^2 - 12x) =$$

$$= 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x =$$

$$= 16x^2 - 32x + 16 =$$

$$= 16(x^2 - 2x + 1) = 4^2 \cdot (x-1)^2 = (4x-4)^2$$

$$y = \frac{-2x-4 + 4x-4}{2} = \frac{2x-8}{2} = x-4$$

$$y = \frac{-2x-4 - 4x+4}{2} = -3x$$

$$y = x-4$$

$$y = -3x$$

$$1. y = x - 4$$

$$x = y + 4$$

$$\left(-\frac{x^2}{x-4}\right)^{\ln(4-x)} = x^2(\ln x + 2\ln(x-4))$$

$$\left(\frac{x^2}{x-4}\right)^{\ln 4-x} = x^{2\ln x + 4\ln(x-4)}$$

$$x^{2\ln(4-x)} \cdot (4-x)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln}$$

$$\left(-\frac{x^2}{4}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln x + 4\ln y}$$

$$(-x^2)^{\ln(-y)} \cdot (-y)^{\ln(-y)} = x^{2\ln x + 4\ln y}$$

$$\frac{(4-x)^3}{x^2} =$$

$$-t = x - 4$$

$$x = 4 - t$$

$$= \frac{(4-x)^2}{x^2} \cdot (4-x)$$

$$= \left(\frac{4}{x} - 1\right)^2 \cdot (4-x)$$

при $x \neq 0$:

$$y = t$$

$$x^{2\ln t} \cdot y^{\ln t} = x^{2\ln x + 4\ln t}$$

$$x^{3\ln t - 2\ln x} \cdot t^{-\ln t} = 1$$

$$x^{\ln t^3 - \ln x^2} \cdot t^{-\ln t} = 1$$

$$x^{\ln \frac{t^3}{x^2}} \cdot t^{-\ln t} = 1$$

$$(4-t)^{\ln \frac{t^3}{(4-t)^2}} \cdot t^{-\ln t} = 1$$

$$t = 4 - 4e$$

$$\ln\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$= \frac{-2\ln 3}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-y = t: \quad \ln a + \ln b = \ln(ab)$$

$$x^{7\ln t} \cdot y^{-\ln t} = x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln t}$$

$$x^{4\ln t} \cdot x^{3\ln t} \cdot y^{-\ln t} = x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln t}$$

$$\ln t = \frac{\log 1}{\log e}$$

Заменить
 $-y = t$

Прогноз мик, $x \neq 0$:

$$x^{3\ln t - 2\ln x} \cdot y^{-\ln t} = 1$$

Но такое возможно только тогда, когда:

$$\begin{cases} x^{3\ln t - 2\ln x} = 1 & (1) \\ y^{-\ln t} = 1 & (2) \end{cases}$$

(2) Возможно при:

$$\begin{cases} \frac{t}{x} = 1 \\ -\ln t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} \frac{t}{x} > 0 \\ -\ln t = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \text{случай} \\ \text{ограничения} \end{cases}$$

При $\frac{t}{x} = 1$:

$$1 + 2x - 3x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$-3x^2 + 14x + 5 = 0$$

$$3x^2 - 14x - 5 = 0$$

$$D = 14^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 4 \cdot 7^2 + 4 \cdot 15 =$$

$$= 4(49 + 15) = 4 \cdot 64 = 2^2 \cdot 8^2 = 16^2$$

$$x = \frac{14 \pm 16}{6} = 5$$

$$x = \frac{14 - 16}{6} = -\frac{1}{3}$$

Т.е. $y = -1$, $x = 5$ или $y = -1$, $x = -\frac{1}{3}$.

Проверим: $(5^7)^{\ln 1} = (5^7)^0 = 1$ и $5^{2 \ln 5} =$

$=$ $-y > 0$ $a^x = 1$

Пусть $-y = t$. Тогда

$\Leftrightarrow x^{4 \ln t} \cdot x^{3 \ln t} \cdot t^{-\ln t} = x^{2 \ln x} \cdot x^{2 \ln x + 4 \ln t}$

Пусть $x \neq 0$: $x^{3 \ln t - 2 \ln x} \cdot t^{-\ln t} = 1$. Т.к.

$(x^3 \cdot t^{-1})^{\ln t} = (x^2)^{\ln x}$

$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

$y \geq -8$
 $y \leq 8$

$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$

1. $0 \leq x \leq 0$: $2x = 0 \Rightarrow x = 0, y \in [-8; 8]$

2. $x+y+8 - x+y-8 = 16 \Rightarrow y = 8$
 $y = 8$ $x+16 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

3. $x-y+8 + x-y+8 = 16$ $x \geq 0$
 $-2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ $x+16 \geq 0$
 $\Rightarrow x \geq 0, y = 0$

4. -

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x+y+s| + |x-y+s| = 16$$

1. $x+y+s \geq 0, x-y+s \geq 0$

$$2x+16=16 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq -s \\ y \leq s \end{cases} \Rightarrow x=0, y \in [-s; s] \quad y \geq -s$$

$$\begin{array}{r} y \geq s-x=s \\ y \leq s+x=s \\ \begin{array}{r} 10 \\ 225 \\ -64 \\ \hline 169 \end{array} \end{array}$$

2. $x+y+s \geq 0, x-y+s \leq 0$:

$$2y=16 \Leftrightarrow y=s$$

$$\begin{cases} x \geq -y-s=-16 \\ x \leq y-s=0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-16; 0]$$

$$\begin{array}{l} x \quad 0-y+s \geq 0 \quad y+s \geq 0 \\ y \leq s \quad y \geq -s \\ \Rightarrow x \in [-16; 0] \\ \cup y=s \end{array}$$

3. $x+y+s \leq 0, x-y+s \geq 0$

$$-2y \leq 16 \Leftrightarrow y=-s$$

$$\begin{cases} x \leq -s-y=0 \\ x \geq y-s=-16 \end{cases} \Rightarrow x \in [-16; 0] \cup y=-s$$

4. $x+y+s \leq 0, x-y+s \leq 0$

$$-x-x-s-x+y-s=16$$

$$-2x=32 \Rightarrow x=-16$$

$$\begin{array}{r} 15^2 \\ 529 \\ \hline 575 \end{array}$$

$$\begin{cases} y \leq -s-x=s \\ y \geq s+x=s \end{cases} \Rightarrow y \in [-s; s] \quad x=-16$$

Второе уравнение

Рассмотрим второе уравнение:

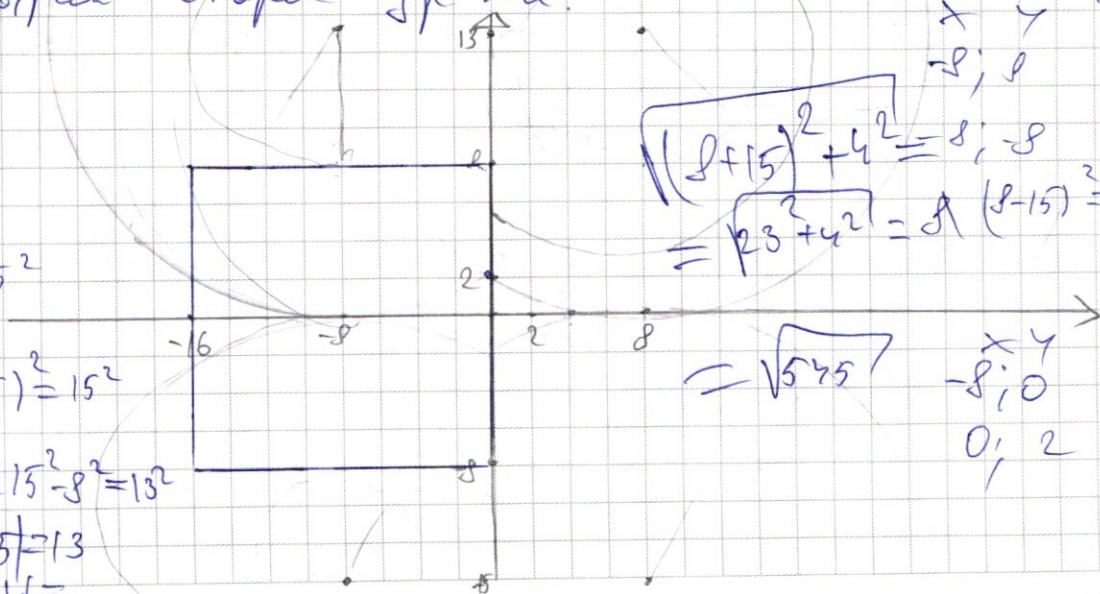
$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2} & a &= 7^2 \\ -2x &= s^2 - 16 & 2s &= 16 \end{aligned}$$

$$15^2 \quad s^2 + 13^2 = 15^2$$

$$s^2 + (y-15)^2 = 15^2$$

$$\begin{aligned} (y-15)^2 &= 15^2 - s^2 = 13^2 \\ |y-15| &= 13 \\ |y| &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (s+15)^2 + 4^2 &= s^2 - s \\ &= 23^2 + 4^2 = s^2 - s \\ &= \sqrt{575} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y &= x-4 \\ y &= -3x \\ \sqrt{4^2+15^2} &= \\ -t &= x-4 = 16+ \\ t &= 4-x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \ln(-y) \cdot \frac{1}{(-y)} &= -\ln(4-x) \\ (x \cdot t)^{\ln t} &= x^{2 \ln x + 4 \ln t} \\ 3 \ln t - 2 \ln x - \ln t &= 1 \\ \frac{3 \ln t - 2 \ln x}{t^{\ln t}} &= 1 \\ 3 \ln(4-x) - 2 \ln x &= 1 \\ 3^{-2 \ln x} &= 1 \\ 3^{-2 \ln 3} &= 1 \\ \frac{1}{3^{\ln 3}} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(-y) &= 0 + \frac{225}{16} \\ y &= -1 \\ x &= -5 \\ \lambda &= -5 \\ \lambda &= y+y \\ \lambda &= \frac{3}{4} - \frac{y}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{23} \\ - \frac{x^2}{-3x} &= \frac{x^6}{3} \\ 9x^2 \quad \Gamma &= \sqrt{9} = \sqrt{241} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^6}{3} \right)^{\ln(3x)} &= x^{2 \ln(9x^3)} \\ x^{6 \ln(3x) \cdot \frac{1}{3} - \ln(3x)} &= x^{2 \ln(9x^3)} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$64827 = 3 \cdot 21609 = 3 \cdot 7 \cdot 3087 = 3 \cdot 7^2 \cdot 441 = 3 \cdot 7^2 \cdot 9 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} 6.4827 \overline{) 3} \\ \underline{6} \\ 4 \\ \underline{3} \\ 18 \\ \underline{18} \\ 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21609 \\ \times 3 \\ \hline 64827 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -64827 \overline{) 9} \\ \underline{63} \\ -100 \\ \underline{18} \\ 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 49 \\ 9 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{) 3087} \\ \underline{28} \\ 28 \\ \underline{28} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 441 \overline{) 30} \\ \underline{81} \\ 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64.527 \overline{) 22} \\ \underline{54} \\ 108 \\ \underline{108} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ - 27 \\ \hline 2 \\ 54 \\ - 27 \\ \hline 27 \end{array}$$

723

$$64827 = 2401 \cdot 3^3 = 3^3 \cdot 49 \cdot 49 = 3^3 \cdot 7^4$$

$\Rightarrow$ Каждый код числа состоит из:

1) 69 кол и 1"

2) Tplex "3"

3) ~~с~~ лет лет "7"

$$\begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ \hline 56 \\ 56 \\ \hline + 1336 \\ 280 \\ \hline 3136 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \text{P} \cdot C_P^3 \cdot C_P^4 = \text{P} \cdot \frac{\text{P}!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{\text{P}!}{4! \cdot 4!} = \\ &= \text{P} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \text{P} \cdot \frac{7 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{3} = \\ &= \underset{\vee}{\text{P}} \cdot \underset{\vee}{7} \cdot \underset{\vee}{8} \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 = \text{P}^2 \cdot 7^2 \cdot 10 = 56^2 \cdot 10 = \underline{\underline{31360}} \end{aligned}$$

№1) Заметим, что $64827 = 3^3 \cdot 7^4$. Тогда у нас
 // 8 есть две возможности составить
 число:

1) Из одной "1", ~~одной~~ трех "3" и четырех
 "7". Из 8-ми ~~мест~~ ^{мест} место для "1" можно
 выбрать $C_8^1 = 8$ способами, место для "3" можно
 выбрать $C_7^3 = \frac{7!}{5! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 7 \cdot 8$ способами, а место
 для "7" можно выбрать $C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} =$
 $= 5 \cdot 7 \cdot 2$. Всего получаем:

$$8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 = (8 \cdot 7)^2 \cdot 10 = 31360$$

2) Из одной "3", одной "8", четырех "47"
 и двух "1". Аналогично получаем:

$$\begin{aligned} & C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^4 \cdot C_2^2 = \\ & = \frac{8!}{7!} \cdot \frac{7!}{6!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot 1 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 5 \cdot 4 \cdot 42 = 20 \cdot 42 = \\ & = 840 \text{ способов.} \end{aligned}$$

1) Одна "1", трех "3", четыре "7". Из
 8-ми свободных мест для "1" можно выбрать одно
 $C_8^1 = 8$ способами, из 7 мест место для "3"
 можно выбрать $C_7^3 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} = 5 \cdot 7$,
 из 4 мест выбрать еще 4 можно $C_4^4 = 1$
 способами. Получаем всего:

$$8 \cdot 5 \cdot 7 = 40 \cdot 7 = 280.$$

Всего получаем $280 + 840 = 1120$.

$$\begin{aligned} & \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \\ & = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x +$$

$$\sin 7x + \cos 7x - (\sin 3x - \cos 3x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$3x - \frac{\pi}{4} - 7x - \frac{\pi}{4} =$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} (\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x) = -\frac{\pi}{2} - 4x$$

$$= \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

$$\frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{4} =$$

$$3x - \frac{\pi}{4} - 7x + \frac{\pi}{4}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = t \quad \sqrt{2} \cos t = \sin(t + \frac{\pi}{4}) + \cos(t + \frac{\pi}{4})$$

$$x = t + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \cos 4x = \sin(4x + \frac{\pi}{4}) + \cos(4x + \frac{\pi}{4}) \quad \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} =$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = \sin(3x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 4x = \sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \sin(7x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 4x = -2 \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \cos 5x$$

$$\cos 5x = \cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\sin x + \cos x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$280 + 840 =$$

$$= 200 + 800 + 40 + 80$$

$$= 1000 + 120 = 1120$$

$$40 \cdot 21 =$$

$$= 10 \cdot 84 = 840$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x - \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$(\sqrt{2})^2 \cos 5x (\cos 2x - \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x - \sin 2x = 0 \\ 2 \cos 5x + \cos 2x + \sin 2x = 0 \end{cases}$$

$$\cos 5x + \cos 2x + \sin(5x + \frac{\pi}{2}) + \sin 2x = 0$$

$$\cos \frac{7}{2}x \cos \frac{3}{2}x + \sin(\frac{7}{2}x + \frac{\pi}{4}) \cos(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos \frac{7}{2}x \cos \frac{3}{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \frac{7}{2}x + \cos \frac{7}{2}x) (\sin \frac{3}{2}x + \sin \frac{3}{2}x) = 0$$

$$a \cdot b + (c + a)(d + b) = 0$$

$$a \cdot b + c \cdot d + b \cdot c + a \cdot d + a \cdot b = 0$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(\sin 2x)' = \cos 2x \cdot 2$$

$$2 \cos 5x + \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$f(x) = 2 \cos 5x + \sin 2x + \cos 2x$$

$$f'(x) = -10 \sin 5x + 2 \cos 2x - 2 \sin 2x = 0$$

$$-5 \sin 5x + \cos 2x - \sin 2x = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2\cos 5x + \sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$\cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x + \sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x (\cos 3x + 1)$$

$$\cos 2x (\cos 3x + 1) - \sin 2x (\sin 3x - 1) = 0$$

$$\cos 2x (\cos 3x + 1) + \sin 2x (1 - \sin 3x) = 0$$

Заметим, что

$$\cos 2x \leq 1$$

$$\cos 3x \geq 0$$

$$(\cos 3x + 1)^2 + (\sin 3x + 1)^2 = \cos^2 3x + 2\cos 3x + 1 + \sin^2 3x + 2\sin 3x + 1 = 2 + 2(\cos 3x + \sin 3x)$$

$$\sqrt{2 + 2(\cos 3x + \sin 3x)} (\sin 2x \sin \varphi + \cos 2x \cos \varphi) = 0$$

$$\cos 3x + 1 = \sin \varphi$$

$$1 - \sin 3x = \sin \varphi$$

$$\sqrt{\cos 3x + \sin 3x + 1} ($$

$$\sqrt{2} \sin \frac{3x}{2}$$

$$1 - \sqrt{2} < 0$$

$$\cos t = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{7}{2}x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\frac{7}{2}x = \frac{3\pi}{8} + \pi n$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{5\pi}{8} + \pi n$$

$$3x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$$

$$2\cos 5X + \cos 2X + \sin 2X = 0$$

$$2\cos 5X + 2\sin(2X)$$

$$2\cos 5X + 2\cos\left(2X - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

3-2

$$\cos 5X + \cos\left(2X - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sin 2X - \cos 2X =$$

$$\sin 2X - \cos 2X =$$

$$= \sqrt{2}(\sin 45^\circ \sin 2X - \cos 45^\circ \cos 2X) =$$

$$= \sqrt{2}\cos - \sqrt{2}(\cos 45^\circ \cos 2X - \sin 45^\circ \sin 2X) =$$

$$= -\sqrt{2}\cos\left(2X + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\sin x - \cos x =$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\cos(x)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$$

sin

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

= -

$$= \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + x\right)$$

$$\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cos$$

$$\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} =$$

$$= \frac{7}{2}x + \frac{\pi}{8}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(-\frac{x^7}{-3x}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(3x^3)} \quad 3x \cdot x^2$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln 3 + \ln x} = x^{2\ln 3 + 6\ln x}$$

$$x^{6\ln 3 + 6\ln x} \cdot 3^{-\ln 3 - \ln x} = x^{2\ln 3 + 6\ln x} \quad | : x^{2\ln 3 + 6\ln x}$$

$$x^{4\ln 3} \cdot 3^{-\ln 3 - \ln x} = 1$$

$$x^{4\ln 3}$$

$$\left(\frac{x^7}{-(-3x)}\right)^{\ln(-y)} = \left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} =$$

$$= x^{\frac{6\ln 3x}{3} - \ln(3x)}$$

$$x^{2\ln(3x^3)} = x^{2\ln(3x) + 4\ln(x)} \quad | :$$

$$x^{6\ln(3x)} \cdot 3^{-\ln(3x)} = x^{2\ln(3x)} \cdot x^{4\ln(x)} \quad | : x^{2\ln(3x)}$$

$$x^{4\ln(3x)} \cdot 3^{-\ln(3x)} = x^{4\ln(x)}$$

$$x^4 = t : t^{\ln 3 - \ln x} \cdot 3^{-\frac{1}{4}\ln(3t)} = \cancel{t^{\ln t}}$$

$$t^{\ln 3 - \ln x} \cdot 3^{-(\ln 3 - \ln x)} = t^{\ln x}$$

$$t=3$$

$$t^{\ln 3 - 2\ln x} \cdot 3 = 3^{\ln 3 + \ln x}$$

$$-\frac{x^7}{4}$$

$$x = \frac{4}{-3} \quad \frac{4^3}{-}$$

$$-\frac{x^7}{-3x} = \frac{x^6}{3}$$

$$* x = \frac{4}{3} \quad \frac{4}{9} = \frac{x}{3}$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(-4)} = x^{2\ln(9x^3)}$$

$$\left(\frac{x^7}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln(x(4-x)^2)}$$

$$y = e^a \quad (e^+)^h$$

~~$x = e \cdot b$~~