

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5. $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & ① \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & ② \end{cases}$

I) $(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$ -

Если $a=0$, то график данной ф-ции - 4 точки: $(8; 15), (-8; 15), (-8; -15), (8; -15)$

Если $a < 0$, то нет решений

Если $a > 0$, то график - 4 окружности с радиусом $r = \sqrt{a}$ и центрами в точках $(8; 15), (-8; 15), (-8; -15), (8; -15)$.

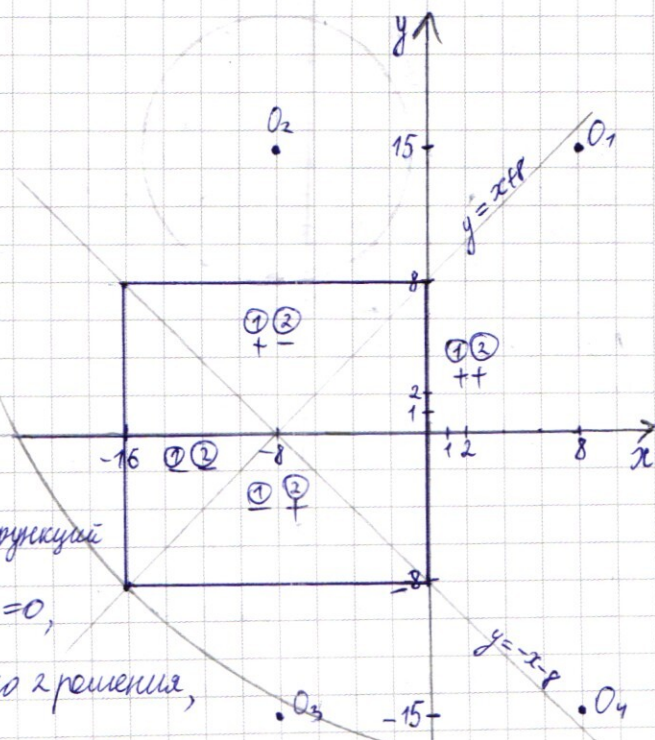
II) $\begin{cases} |x+y+8| = 16 & ① \\ |x-y+8| = 16 & ② \end{cases}$

Нули подмодульных выражений:

$\begin{cases} x+y+8=0 \\ x-y+8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x-8 \\ y=x+8 \end{cases}$

$\begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \\ x+y+8+x-y+8=16 \\ x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 < 0 \\ x+y+8-x-y-8=16 \\ x+y+8 < 0 \\ x-y+8 \geq 0 \\ -x-y-8+x-y+8=16 \\ x+y+8 < 0 \\ x-y+8 < 0 \\ -x-y-8-x-y-8=16 \end{cases}$

$\begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \\ x=0 \\ x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 < 0 \\ y=8 \\ x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \\ y=-8 \\ x+y+8 < 0 \\ x-y+8 < 0 \\ x=-16 \end{cases}$



Заметим, что множество графики всех функций

симметричны относительно прямой $y=0$,

а значит чтобы система имела ровно 2 решения,

нужно чтобы она имела только одно решение для $y \geq 0$

Найдем случаи 2: когда окр. $(O_2; \sqrt{a})$ касается прямой $y=8$ и

когда окр. $(O_1; \sqrt{a})$ пересекается с квадратом в точке $(-16; -8)$ (случай когда $(O_1; \sqrt{a})$ пересекается в точке $(0; 8)$ не подходит, поскольку в этом случае окр. $(O_2; \sqrt{a})$ пере-

секает квадрат в двух точках)

$$1. (|-8| - 8)^2 + (|8| - 15)^2 = a$$

$$0^2 + (-7)^2 = a$$

$$a = 49$$

$$2. (|-16|-8)^2 + (|-8|-15)^2 = a$$

$$8^2 + (-7)^2 = a$$

$$64 + 49 = a$$

$a = 113$

Amber: 49; 113

№ 1. Разложите 64827 на простые множители!

64	827	7							
<u>63</u>		<u>9264</u>	<u>7</u>						
18		<u>7</u>	<u>1323</u>	<u>7</u>					
<u>14</u>	<u>22</u>		<u>7</u>	<u>189</u>	<u>7</u>				
42	<u>21</u>		62	<u>14</u>	<u>27</u>	3			
<u>42</u>	16		56	49	<u>27</u>	9	3		
7	<u>14</u>		23	<u>49</u>	0	<u>9</u>	<u>3</u>	3	
<u>7</u>	24		<u>63</u>	0		0	<u>3</u>	1	
0	<u>21</u>		0			0	0		
	0								

$64827 = 7^4 \cdot 3^3$, значит в записи 8-ми значного числа будут присутствовать цифры 3, 7, 1, 9.

Это может быть кадр: 13337777 

⑤ 1377779

① Если 1 билет на I месте, то, а 3 на II месте, то вариантов:

13733777	13773377	13977337	13777733-1	13357777
13737377	13773737-3	13777373		13373777
13737737	13773773			13377377
13737773	13773773			13377773
13737773	13773773			

Всего: 15

Если 1 на I месте, 3 на III месте, то $4+3+2+1=10$ вар.
3 на IV месте, то $3+2+1=6$ вар.
3 на V месте, то $2+1=3$ вар.
3 на VI месте, то $1=1$ вар.

Итого где 1 ка I вместе: $15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35$

Для 1 на любой другой листе будет тоже самое кол-во вариантов,
поэтому $35 \cdot 8 = 280$

② Если 9 будет на I месте, 3 на II, а 1 на III, то
 $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ вар. если 3 на II.
 Для 3 на любом месте со II по VIII будет тоже по 5 вариантам.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

35. $\frac{7}{105}$ вар. Для 9 на любом месте будет $\frac{105}{8}$ вар.

Итого: $280 + 840 = 1120$ вариантов

Ответ: 1120

3. $\begin{cases} (-\frac{x^7}{y})^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$ ОДЗ: $\begin{cases} -y > 0 \\ xy^2 > 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$

Упростим уравнение: $y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$

$$y^2 + 6xy + 9x^2 - 4xy - 12x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(y + 3x)^2 - 4x(y + 3x) + 4(y + 3x) = 0$$

$$(y + 3x)(y + 3x - 4x + 4) = 0$$

$$(y + 3x)(y - x + 4) = 0$$

$$\begin{cases} y + 3x = 0 \\ y - x + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x < 4 \end{cases} \Rightarrow$ ОДЗ: $\begin{cases} y < 0 \\ 0 < x < 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = -3x \\ (-\frac{x^7}{y})^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x \\ (-\frac{x^7}{-3x})^{\ln 3x} = x^2 \ln 9x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x \\ (\frac{x^6}{3})^{\ln 3x} = x^2 \ln 9x^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x \\ x^6 \ln 3x = x^2 \cdot 3 \ln 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x \\ x^4 \ln 3x = 3 \ln 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x \\ x^4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x \\ x^4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x \\ x = \sqrt[4]{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3\sqrt[4]{3} \\ x = \sqrt[4]{3} \end{cases}$$

Ответ: $(\sqrt[4]{3}, -2\sqrt[4]{3}); (\sqrt[4]{3}, -9\sqrt[4]{3})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 3} \\ 6 \\ \underline{6} \\ 0 \\ 0 \\ \underline{18} \\ 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 7} \\ 63 \quad \overline{) 62617} \\ 18 \quad 7 \quad 17323 \\ 14 \quad 7 \quad 7 \\ 42 \quad 22 \quad 62 \\ 42 \quad 21 \quad 56 \\ \quad 2 \quad 16 \quad 56 \\ \quad \quad 14 \quad 63 \\ \quad \quad 21 \quad 63 \end{array}$$

[illegible]

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\frac{1}{2} \sin(7x+3x) \sin(7x-3x) + \frac{1}{2} \sin(7x+3x) \cos(7x+3x)$$

$$\sin 10x (\sin 4x + \cos 4x) + 2\sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\frac{1}{2} \ln 4x (\ln 10x + \cos 10x) + 2\sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sinh 4x \sinh \left(10x + \frac{\pi}{4} \right) + 2\sqrt{2} \cosh 4x = 0$$

$$\sin 4x \sin(70x + \frac{\pi}{6}) + 4 \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 2x \cos 2x \sin\left(10x + \frac{\pi}{4}\right) - 4 + 8 \cos^2 2x = 0$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2)$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \quad x = \frac{4 - y}{2}$$

$$(y^2 + 2xy + x^2) - 4x^2 + 12x + 4y \Rightarrow$$

$$(y + 3x)^2 = 4(3x + y)$$

$$y^2 + 6xy + 9x^2 - 4xy - 12x^2 + 4(3x + y) = 0$$

$$y^2 + 6xy + 9x^2 - 12x^2 - 4xy + 4(3x+y) = 0$$

$$(y+3x)^2 - 4x(3x+y) + 4(3x+y) = 0 \quad \begin{matrix} 2 \ln x & 4 \ln(4-x) \\ 2 \ln x & 2 \end{matrix}$$

$$(y+3x)(y+3x-4x+4) = 0$$

$$(y+3x)(y-x+4)=0$$

$$\left(\frac{1+x}{1+3x} \right)^{2 \ln(3x)} = x^{2 \ln(3x^3)} \left(\frac{x}{x-4} \right)^{\ln(4-x)} = x^{2 \ln(3x^3)} \cdot x^{\ln(4-x)} = x^{2 \ln(3x^3) + \ln(4-x)}$$

$54321 = 15 \cdot \ln 3x$
 $10631 \cdot \frac{x}{3} = x^{2 \ln 3x^3} \cdot 3^{\ln 3x}$
 $\frac{35}{x} \cdot \frac{543}{1066} = x^{\ln 3^3 x^6} = x^{\ln 9^2 x^6} \cdot 3^{\ln 3x}$

$$\frac{1}{2} \ln \cos(x^2 y) \quad \begin{array}{r} 17 \ 23 \ 77 \ 71 \\ 77 \ 73 \ 33 \ 77 \\ 17 \ 74 \ 33 \ 73 \end{array} \quad \begin{array}{r} + \ 8 \ 8 \\ 3 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \ln(x+y) &= \ln x \cos y + \ln y \cos x \\ \ln(x-y) &= \ln x \cos y - \ln y \cos x \end{aligned}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+ \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \sqrt{47+338+9}$$

$$(\sin x \cos y - \sin y \cos x) = \sin^2 x \cos^2 y - \sin^2 y \cos^2 x$$

$$= \cos^2 y - \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2y}{2} - \frac{1 + \cos 2x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cos 2y - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\sqrt{2} / 2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot \sqrt{2} / 2$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 20^\circ + \cos 20^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = \sqrt{2}$$

2. $\frac{1}{2} \sqrt{10} \times (\infty) \sqrt{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$

1234 1373 3777 4 $\frac{I}{II} \frac{III}{IV} - 5$

125 1373 3777 2 $\frac{I}{II} \frac{III}{IV} - 4$

126	15 + 23 + 4	3	- II	3
726	13 777 337	2	- III	2
727	12 777 733	1	- IV	1

4 III 456 5 = 15 II 1 - I X8kan. 60

$$\frac{1}{11} - 15$$

$\frac{5+1}{2} = 3$

21

1	(55)	4321 10	3210	
1	(20)	3210	213	1 1
1	(5)	13213	11	1002520

$$(x-1)^2 \frac{14}{14} \begin{pmatrix} 90 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 - I = \sqrt{14} \cdot 360$$

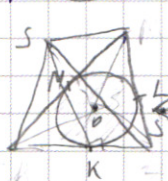
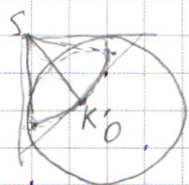
$$\ln(4-x) = \ln(x(x+3)) = \ln x + \ln(x+3)$$

$= x^2 \ln(1+x)$
 $\ln 2$
 n - количество раз
 m - повторений в цикле

$$x^3 + \ln x^6 \rightarrow x^{\ln 9^3 + \ln x^6} \quad \frac{m!}{(k-m)!(k-m)!}$$

$$\frac{9^3 \ln x^6}{x^6} - \frac{x \ln 9^2 \ln x^4}{2 \ln 9} = \frac{3 \ln 3 \ln x}{\ln 3x} \cdot 3$$

$$x^2(x^{3n+1} - x^{n+1}) = 3^{2n+1}$$



$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$(x+8)^2 + (y-15)^2 = a$$

$$r = \sqrt{a} \quad a \geq 0$$

$$7 = \sqrt{a}$$

$$1) a = 49$$



$$\frac{9}{16} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{SA}{SB} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3d}{SB}$$

$$4x = 3x + 6r$$

$$x = 6r = 3d$$

$$SA = 3d = 6r$$

$$SB = 4d = 8r$$

$$I) x+y+8 \geq 0 \quad y \geq -x-8$$

$$II) x-y+8 \geq 0 \quad y \leq x+8$$

$$1) x+y+8+x-y+8=16$$

$$1) 2x=0 \Rightarrow x=0$$

$$2) x+y+8-x+y+8=16$$

$$3) x-y+8-x+y+8=16$$

$$2x+32=0$$

$$x=-16$$

$$4) -x-y+8+x-y+8=16$$

$$-2y-16$$

$$y=-8$$

$$1) x=0 \quad 3) x=-16$$

$$2) y=8 \quad 4) y=-8$$

$$2y=16$$

$$y=8$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3d}{SB}$$

$$\frac{6r}{SA+AT} = \frac{AT}{r} = \frac{ST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

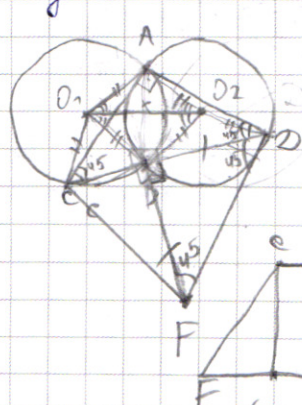
$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$

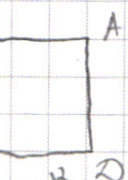
$$AT = \frac{NST}{AT}$$

$$AT = \frac{NST}{AT}$$



$$AB = 45$$

$$2+90-2+90+90+90$$



$$AD = 17\sqrt{2}$$

$$CD = AC\sqrt{2}$$

$$(CB+BD) = AC\sqrt{2}$$

$$BD = AC\sqrt{2} - CB$$

$$(FD-AC)^2 + AC^2 = CF^2$$

$$FD = BD\sqrt{2}$$

$$FD^2 = 2FDAC + 2AC^2$$

$$2BD^2 - 2\sqrt{2}BDAC + 2AC^2$$

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2$$

$$15 \text{ km} + 12 \text{ km} = 15 \text{ km} + 12 \text{ km} + 4 \text{ km}$$

$$y \leq (3^{28} - 3)x + 93$$

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$\frac{ST}{AT+SK} = ?$$

$$\frac{ST}{ST+ST} = \frac{ST^2}{8ST^2}$$



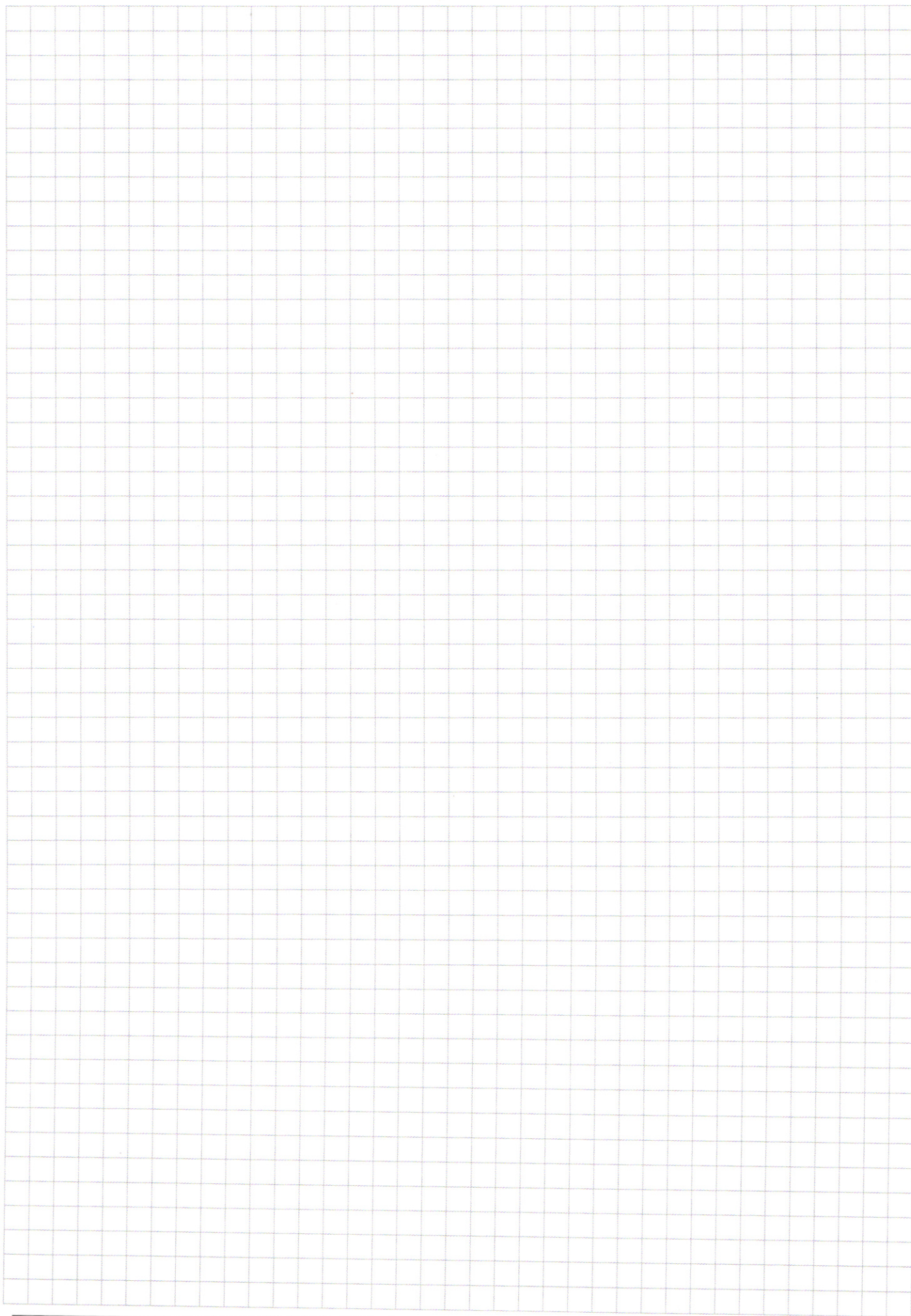
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



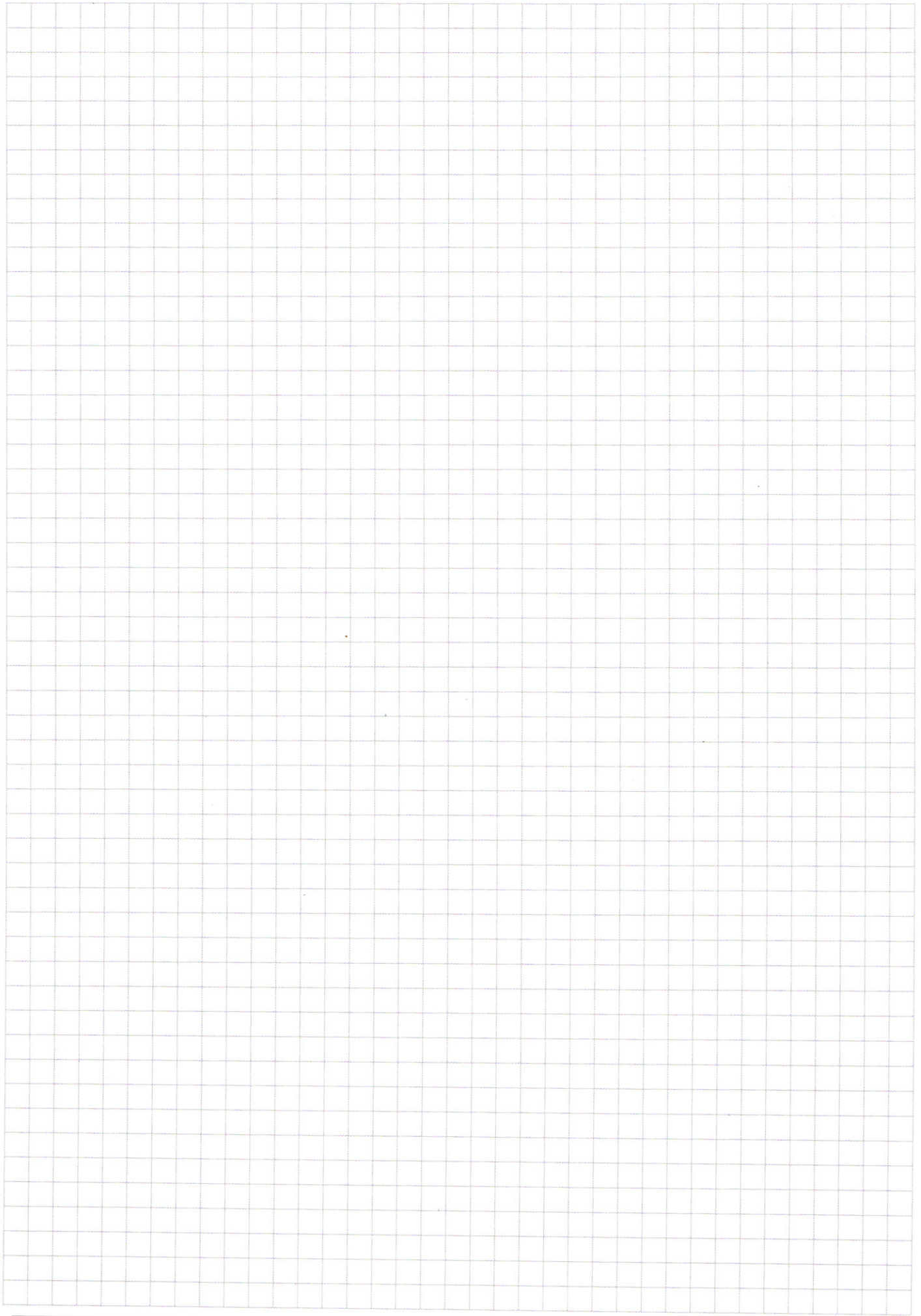
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)