

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Для начала, разложим число 64827 на простые множители. $64827 = 3^3 \cdot 7^4$. Возмозжаное число состоит из восьми цифр. Тогда может быть два варианта возмозжных чисел.

I. Состав из 4-ех семерок, 3-ех троек и одной единицы.

II. Состав из 4-ех семерок, 1-ой девятки, 1-ой тройки и двух единиц. Других групп не существует, так как для их существования нам бы потребовалась система счисления с большим основанием, в которой могли бы быть числа $27 = 9 \cdot 3$, $21 = 3 \cdot 7$ и т.д.

т.д.

I. $n_{\text{вариантов I}} = C_8^4 \cdot C_4^3 \cdot C_1^1 = 280$. Мы расставим семерки по 8-ми ячейкам, в оставшиеся расставим тройки, а остаток заполняем единицами.

II. $n_{\text{вариантов II}} = C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 - C_2^2 = 840$ Поступаем аналогично.

$$n = n_{\text{вариантов I}} + n_{\text{вариантов II}} = 1120 - \text{все варианты}$$

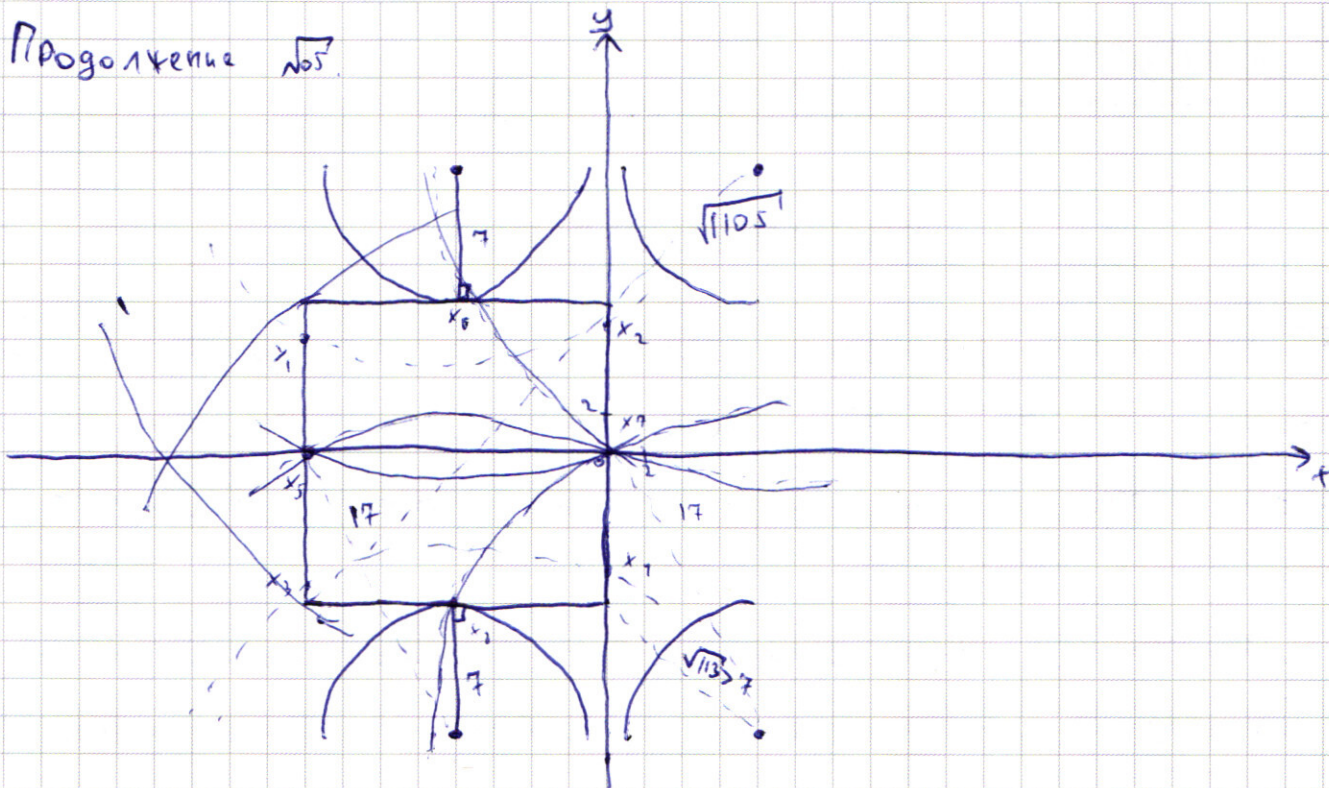
Ответ: 1120

№5. $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$ Первая функция представляет собой квадрат, образованный прямыми $x=0$, $x=-16$, $y=-8$, $y=8$.

Вторая — четыре ~~окружности~~ окружности радиуса $\sqrt{a}$ с центрами $(8; 15)$, $(-8; 15)$, $(-8; -15)$, $(8; -15)$.

Продолжение на стр. №2

Продолжение №5



$a \leq 0$: Второй функции не существует —

 $a \in [0; 49)$ - 0 решений -

$a = 49$ - два решения +

$a \in (49, 283)$ — как минимизировать χ относительно y от $y=0$ (x_1, x_2, x_3, x_4) —

$a=289$ — gba pemeit om okryzovneni cheta om $x=0$ (x_5, x_7) u gba om okryzovneni
 chetaba (x_6, x_8) —

 $GF(289; 593) - \text{как мультипликативная группа (аналогично с } GF(49; 283)) -$

$a \in (593; 801)$ — 4 решения от окружностей справа —

$Q=801$ - з'ясування (X_5 та інші з'ява) -

$a \in (801; 1105)$ — 4 решения от окружной справ

$a = 1105 - 2 \text{ pewinny}$

$a > 1105$ - Оперевити

Orbiter: $a = 49$ um $a = 1105$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2} \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \cos(\frac{\pi}{2} - 7x) + \cos 3x + \cos(\frac{\pi}{2} + 3x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos \frac{\pi}{4} \cos(7x - \frac{\pi}{4}) + 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos(7x - \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{2} - 4x) = 0$$

$$2 \cos 5x \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + 2 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) (\cos 5x + \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)) = 0$$

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos 5x + \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2 \cos(3,5x - \frac{\pi}{8}) \cos(1,5x + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \pi k$$

$$\cos(3,5x - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\cos(1,5x + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

$$3,5x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$1,5x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$3,5x - \frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{2}$$

$$1,5x = \frac{3\pi}{8} + \pi k$$

$$3,5x = \frac{5\pi}{8} + \pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi k$$

Ответ: $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$ или $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi k$ или $x = \frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$

$$\sqrt{3} \begin{cases} (-\frac{x^2}{y})^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

ОДЗ: $y < 0, x > 0$

$$\begin{cases} e^{2 \ln x \ln(-y)} = e^{2 \ln^2 x + 4 \ln x \ln(-y) + \ln^2 y} \\ (y + x + 2)^2 = 4(x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{2 \ln(-y)} = x^{2 \ln x + 4 \ln(-y)} \cdot (-y)^{\ln(-y)} \\ y^2 + 2y(x+2) + x^2 + 4x + 4 = 4x^2 + 8x + 4 \\ 2(\ln^2 x - 3 \ln x \ln(-y) + \ln^2(-y)) = 0 \\ |y + x + 2| = 2|x - 1| \end{cases}$$

Продолжение №9 стр. 4

Продолжение №3

$$\begin{cases} \ln x = \frac{3 \ln(-y) \pm \sqrt{9 \ln^2(-y) - 8 \ln^2(-y)}}{4} \\ |y+x+2| = 2|x-1| \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \ln x = \ln(-y) \\ 2 \ln x = \ln(-y) \\ |y+x+2| = 2|x-1| \end{cases} & \begin{cases} x = -y \\ x^2 = -y \\ |y+x+2| = 2|x-1| \end{cases} \end{cases}$$

I. $x = -y$: $2 = |-y-1|$ $y = 1$ или $y = -3$ $x = -1$ или $x = 3$ Учитывая ДЗ, $x = 3, y = -3$

II. $-x^2 = y$: $1 - x^2 + x + 2 = 2|x-1|$ $|-(x-2)(x+1)| = 2|x-1|$

I	возм.	-	+	+	-
II	возм.	-	-	+	+

Учитывая $x > 0$,

a) $x \in (0; 1)$: $-x^2 + x + 2 = 2 - 2x$ $x^2 - 3x = 0$ $x = 0$ $x = 3$ $\emptyset$

б) $x \in [1; 2]$: $-x^2 + x + 2 = 2x - 2$ $x^2 + x - 4 = 0$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$
 $x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ $y = \frac{\sqrt{17} - 9}{2}$

в) $x > 2$: $x^2 - x - 2 = 2x - 2$ $x^2 - 3x = 0$ $x = 0$ $x = 3$
 $x = 3$ $y = -9$

Ответ: $x = 3, y = -3$ или $x = 3, y = -9$ или
 $x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, y = \frac{\sqrt{17} - 9}{2}$

$$\sqrt{7}: \begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{29} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

При $x < 4$ очевидно, что $3^x + 4 \cdot 3^{29} > 93 + 3^{29}x - 3x$, а значит, решений нет

При $x = 4$: $\begin{cases} y > 3^4 + 4 \cdot 3^{29} \\ y \leq 3^4 + 4 \cdot 3^{29} \end{cases}$ Также нет решений

При $x \geq 5$ решения появятся и их количество будет равно

$x 3^{28} - 3x + 93 - 3^x - 4 \cdot 3^{29}$ Пусть $i = x - 4$

$i 3^{28} - 3^{4+i} + 81 - 3i$

Чтобы узнать верного значения по

Продолжение на стр. 5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

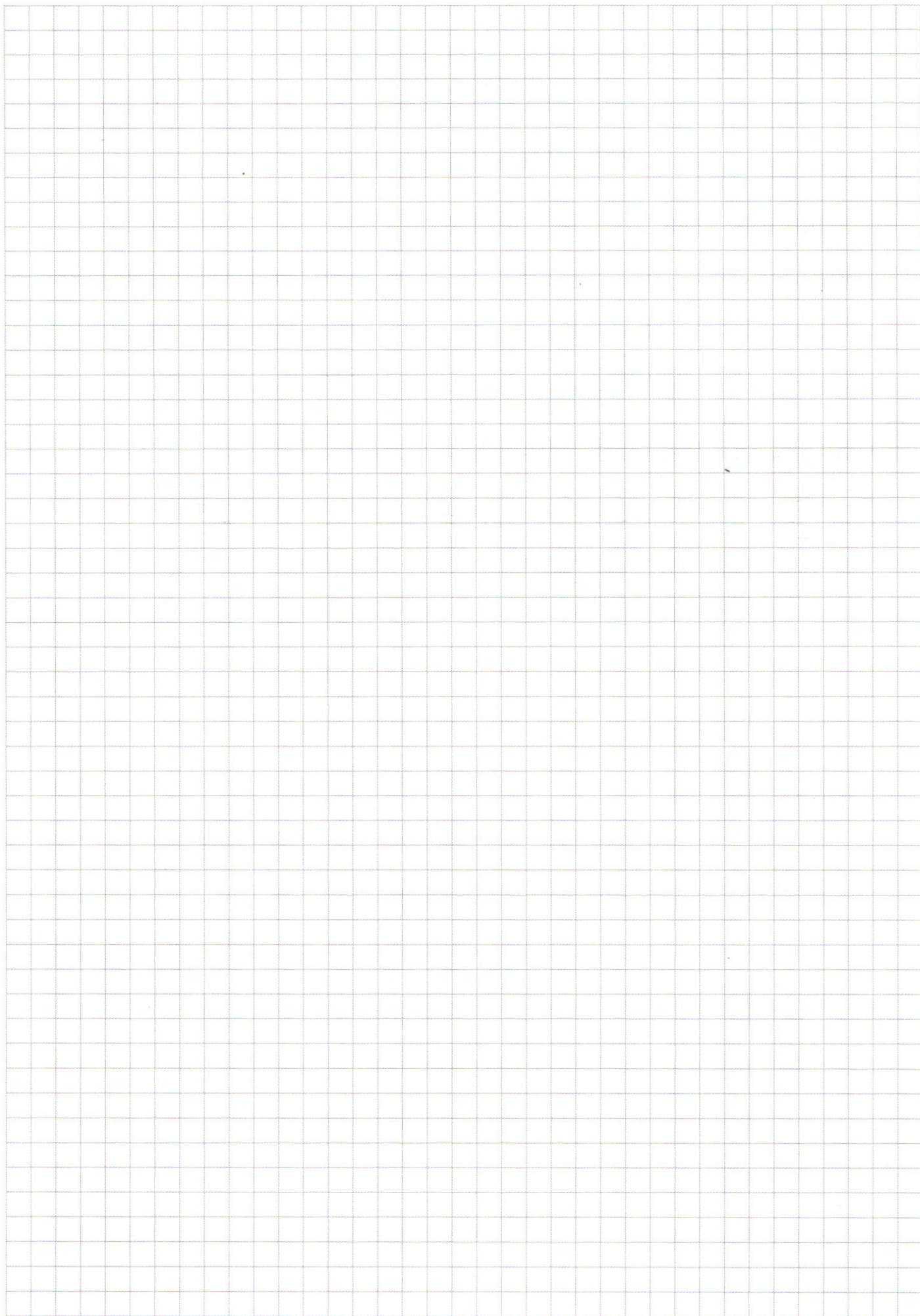
Продолжение №7

, надо узнать, при каких i количество корней положительно.
(то есть, они существуют).

$$3i(3^{27} - 1) > 3^i(3^i - 1) \quad 3^{27} - 1 > 3^i \frac{3^i - 1}{i} \quad i = 27$$

Чтобы узнать количество всех корней, надо найти сумму ряда

$$S = \sum_{i=1}^{27} (i(3^{27} - 1) - 27(3^i - 1)) = 378(3^{27} - 1) + 27^2 - \sum_{i=1}^{27} 3^{i+3} =$$
$$= 27(28 \cdot 3^{27} - 1 - \sum_{i=1}^{27} 3^i)$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{1} \quad 64827 = 21609 \cdot 3 = 7203 \cdot 3^2 = 2401 \cdot 3^3 = 3^3 \cdot 7^4$$

$$[10^1 000^1 000^1, 100^1 000^1 000^1] \quad I. \quad 7x_4, 3x_3, 1x_1$$

$$I. \quad C_8^4 \cdot C_4^3 = \frac{8! 4!}{4! 3!} = 280 \quad II. \quad 7x_4, 9x_1, 3x_1, 1x_2$$

$$77773331$$

$$8 \cdot C_7^4 = 280$$

$$71737373$$

$$C_1^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 840$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{3\pi}{12} \\ x &= \frac{11\pi}{12} \\ x &= \frac{13\pi}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{3\pi}{12} \\ x &= \frac{7\pi}{12} \\ x &= \frac{5\pi}{12} \\ x &= \frac{11\pi}{12} \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} \quad \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\frac{e^{7ix} + e^{-7ix}}{2} + \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} = \frac{e^{-3ix}(e^{10ix} + 1) + e^{-7ix}(e^{10ix} + 1)}{2} =$$

$$= \frac{(e^{10ix} + 1)(e^{2ix} + e^{-2ix})}{2e^{5ix}} = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{5\pi}{21} & x &= \frac{13\pi}{21} \\ x &= \frac{21\pi}{21} & x &= \frac{23\pi}{21} \\ x &= \frac{37\pi}{21} & x &= \frac{49\pi}{21} \\ x &= \frac{53\pi}{21} \end{aligned}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - 7x) + \cos(\frac{\pi}{2} + 3x) = 2 \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) \cos 5x = 2 \sin x \cos 5x$$

$$2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$(\sin 2x + \cos 2x)(2 \cos 5x + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)) = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \frac{e^{i(\alpha - \beta)} + e^{-i(\alpha - \beta)}}{2} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} + \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} = \frac{e^{i\alpha} e^{-i\beta} + e^{-i\alpha} e^{i\beta}}{2}$$

$$\cos(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{6\pi}{4} = \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} - -1 + -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}(\cos 7x \cos 3x + \sin 7x \sin 3x) = 0$$

$$\cos 7x + \cos(\frac{\pi}{2} - 7x) = \sqrt{2} \cos(7x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos 3x + \cos(\frac{\pi}{2} + 3x) = \sqrt{2} \cos(3x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(7x - \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$\cos \alpha (1 + \sin \beta) = \cos \beta (\sin \alpha - 1)$$

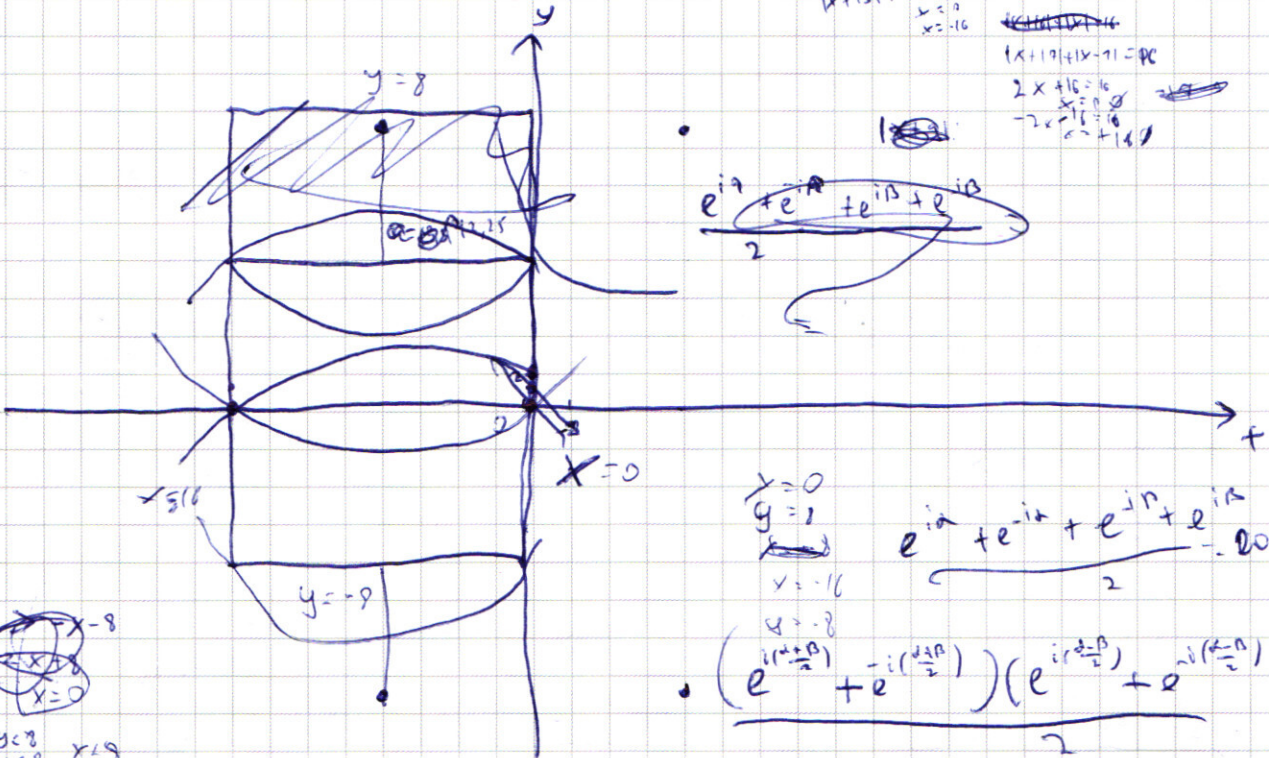
$$\sin(7x - 3x) = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = -\cos 4x$$

5. (4) $\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$

$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$
 $x=0$
 $-2y = 32$
 $y = -16$
 $|x+15| + |x+11| = 16$
 $x=0$
 $x=-16$

$|x+17| + |x-11| = 48$
 $2x+16=16$
 $x=0$
 $-2x+16=16$
 $-2x=0$
 $x=0$



$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta} + e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$x=0$
 $y=1$
 $x=-16$
 $y=-8$
 $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta} + e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos \theta$
 $\frac{(e^{i(\frac{\theta}{2})} + e^{-i(\frac{\theta}{2})})(e^{i(\frac{\theta}{2})} + e^{-i(\frac{\theta}{2})})}{2}$

$x+y=8$
 $x-y=8$
 $x=0$
 $y=8$
 $x+y=16$
 $x-y=16$
 $x=0$
 $y=16$

$\cos 7x + \sin 7x = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} - 7x)$

$\sqrt{2} \cos(7x - \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$

$\cos(4x) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$

$\sqrt{2} \cos 5x \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4} - 4x) = 0$

$2 \cos 5x \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + 2 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) \cos(\frac{\pi}{4} + 2x) = 0$

$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) (\sqrt{2} \cos 5x + \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)) = 0$

$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$x = \frac{3\pi}{8} + \pi k$

$x = -\frac{\pi}{8} + \pi k$

$\int \left(-\frac{x^7}{7}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)}$
 $y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$

$\cos 5x + \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$

$\cos(3.5x - \frac{\pi}{8}) = 0$

$\cos(1.5x + \frac{\pi}{8}) = 0$

$y^2 + 2y(x+2) + x^2 + 4x + 4 - 4x^2 + 16x - 4 = 0$

$(y + (x+2))^2 = 4(x-1)^2$

$\begin{cases} x \leq y-2 \\ x \geq 1 \end{cases}$
 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases}$

$(y+x+2)^2 = 4(x-1)^2$

$|y+x+2| = |4x-4|$
 $x > 0$
 $y < 0$

$x \in (0; 1]$

$y \leq x-2$

$y+x+2 = 4-4x$

$y = -5x-2$

$y = -5x-2$

$y = -5x-2$

$y = -5x-2$

$y = -5x-2$

$y = -5x-2$

$y = -5x-2$

$y = -5x-2$

$y = -5x-2$

$y = -5x-2$

$y = -5x-2$

$y = -5x-2$

$y = -5x-2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{3} \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2) \\ \ln(x+2) = 4(x-1) \end{cases} \quad \text{Dg 3: } x > 0, y < 0$$

I. $x \in (0; 1]$, $y \in [-x-2; 0]$

$$y + x + z = 4 - 4x$$

$$y = -5x + 2$$

~~SECRET~~

$$X \in (0, 4; 1] \quad y = -5x + 2$$

$$x^{\ln(-y)} = x^{a \ln x + b \ln(-y)} = x^{a \ln x} \cdot x^{b \ln(-y)} = e^{a \ln x \cdot \ln x} \cdot e^{b \ln(-y) \cdot \ln(-y)} = e^{a^2} \cdot e^{b^2} = e^{a^2 + b^2}$$

$$7ab = 2a^2 + 4ab + b^2$$

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$2\ln^2 x - 3\ln x \ln(5x-2) + \ln^2(5x-2) = 0$$

~~$$2 \ln^2 x - 3 \ln x (\ln(-y)) + \ln^2(-y) = 0$$~~

~~$$2 \ln^2 x - 3 \ln x \cdot \frac{1}{x} (2 - 3 \ln x)$$~~

$$\frac{3b \pm \sqrt{9b^2 - 8b^2}}{4} = \frac{3b \pm b}{4} = \left[\frac{b}{2}, \frac{2b}{4} \right]$$

$$x^2 - x - 2$$

$$(x-7)(x+7)$$

$$|- (x-2)(x+1)| = 2|x-1|$$

$$x = -4$$

$$x^2 = -4$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = -1$$

$$\ln x = \ln e^y$$

$$2 \ln x = \ln y$$

$$2 = 1 - y - 1$$

$$y = 1$$

$$y = -3$$

$$\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2 = \frac{18-2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

$$3^{\ln(9)} = 3^{2 \ln(3)}$$

$$3^{28} - 243 + 78$$

$$y > 243 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$\frac{3^3 (3^i)}{i} < 3^{27} - 1$$

$$\begin{cases} y > 729 + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 75 + 6 \cdot 3^2 \end{cases}$$

$$2 \cdot 3^{28} - 729 + 75$$

$$\sqrt{7} \quad (4 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{28})^{27 \cdot 27} \quad x \leq 4 \quad \emptyset$$

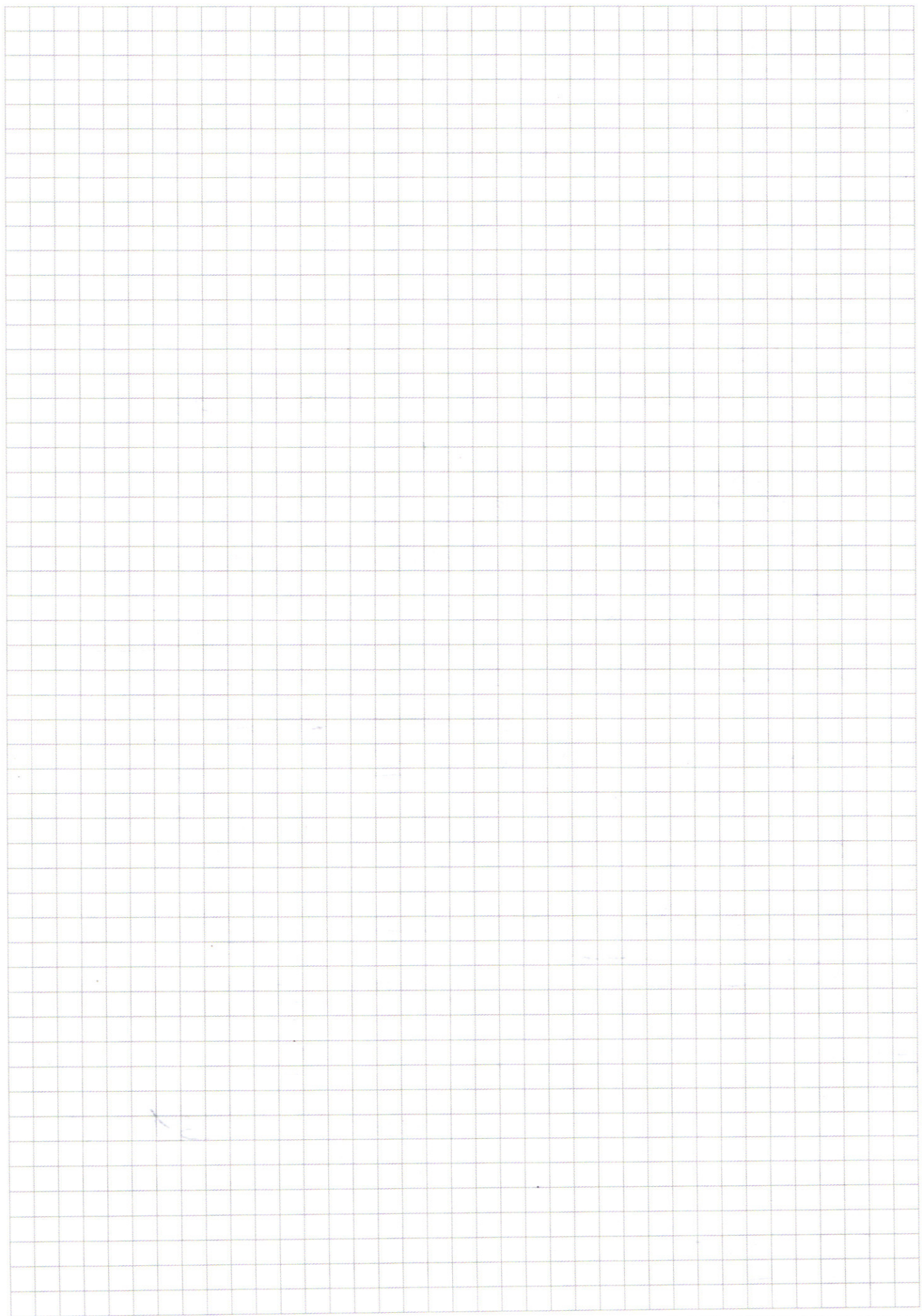
$$y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x$$

$x = 5$

$$i3^{28} - 3^{4+i} + 81 - 3i$$

$$3^i(3^{24}-1) + 3^i(1-3^i) > 0$$

$$3i(3^{27} - 1) > 3^9(1 - 3^i)$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)