

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 15

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 110 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 61 раза, а q – вероятность того, что орёл выпадет меньше 49 раз. Найдите $p - q$.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 14x}{\cos 5x - \sin 5x} - \frac{\sin 14x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $27\sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 55 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 75$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 9, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{35}}{6}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 25$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = -|x - \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a}, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 4. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 4$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 110 + x - 5^{110}, \\ y \leq \log_5 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Для p : если орел выпадет ≥ 61 , то
решка должна выпасть $< 110 - 61 = 49$ раз $\Rightarrow$
Вероятность выпадения орла не меньше 61 раза и
выпадения решки меньше 49 раз равны, но
выпадение орла и решки равновероятны, зна-
чит ~~вер~~ $q =$ вероятности выпадения решки
меньше 49 раз. $p - q = 0$

Ответ: 0

$$3. \quad 2 \cdot \sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3^{\sqrt{4 \log_3 x}} + 55 \cdot x^{\sqrt{\log_3 x}} \leq 75$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \log_3 x \geq 0 \\ \log_x 3 \geq 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \quad x \in (1; +\infty)$$

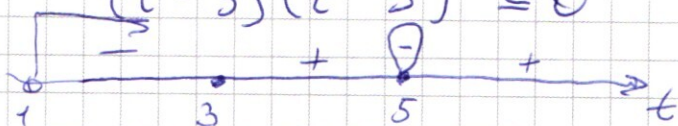
$$\begin{aligned} \text{Заметим, что } 3^{\sqrt{\log_3 x}} &= 3^{\sqrt{\log_3 x} \cdot \sqrt{\log_3 x} \cdot \sqrt{\log_x 3}} = \\ &= 3^{\log_3 x \cdot \sqrt{\log_x 3}} = x^{\sqrt{\log_x 3}} \end{aligned}$$

$$(3^{\sqrt{\log_3 x}})^3 - 13 \cdot (3^{\sqrt{\log_3 x}})^2 + 55 \cdot 3^{\sqrt{\log_3 x}} - 75 \leq 0$$

$$3^{\sqrt{\log_3 x}} = t, \quad t > 1$$

$$t^3 - 13t^2 + 55t - 75 \leq 0$$

$$(t-3)(t-5)^2 \leq 0$$

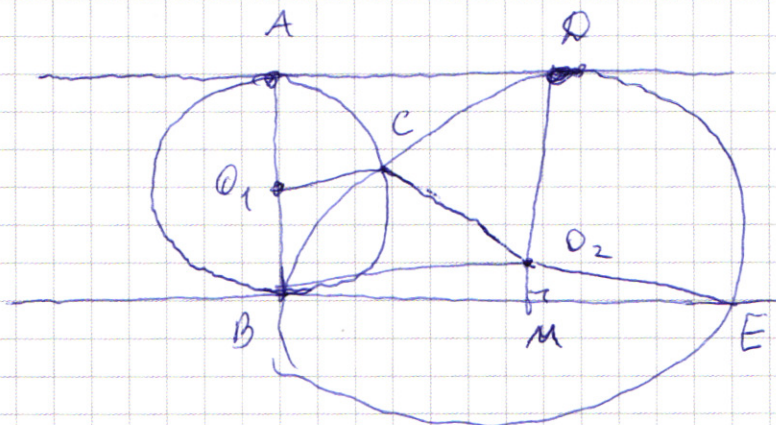


$$\begin{cases} t \leq 3 \\ t = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3^{\sqrt{\log_3 x}} \leq 3 \\ 3^{\sqrt{\log_3 x}} = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \log_3 x \leq 1 \\ \log_3 x = \log_3^2 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x = 5 \log_3 5 \end{cases} \quad \text{но еще есть ОДЗ: } x > 1$$

Ответ: $x \in (1; 3] \cup \{5 \log_3 5\}$

6.



1) $S_{BO_1CO_2} = 2 S_{BO_1O_2}$, т.к. $\angle BO_1O_2 = \angle O_1CO_2$
 $(O_1B = O_1C, O_2C = O_2B, O_1O_2 - \text{общая})$

2) $\angle BO_2E = \alpha = \angle O_2BE$
 $\triangle BO_2M: \sin \alpha = \frac{2r_1 - r_2}{r_2} = 2 \frac{r_1}{r_2} - 1$

3) $S_{BO_1O_2} = \frac{1}{2} \sin(90^\circ - \alpha) \cdot r_1 \cdot r_2 = \frac{1}{2} r_1 r_2 \cos \alpha$
 $S_{BO_2E} = \frac{1}{2} \sin(180^\circ - 2\alpha) r_2^2 = \frac{1}{2} r_2^2 \sin 2\alpha$

4) $\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{O_2BE}} = 4$; $2 \frac{S_{BO_1O_2}}{S_{O_2BE}} = 4$

$$\frac{r_1 r_2 \cos \alpha}{r_2^2 \sin 2\alpha} = 2 ; \quad \frac{r_1}{r_2} = 4 \sin \alpha, \quad \frac{r_1}{r_2} = 8 \frac{r_1}{r_2} - 4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4 \frac{r_1}{r_2} = 4$$

~~$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{4}$$~~

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{4}{4}$$

$$\delta) \sin \alpha = \cos \angle BO_2 M = 2 \frac{r_1}{r_2} - 1 = \frac{1}{4}$$

$$\angle BO_2 M = \angle BDE = \angle BDM$$

$$\triangle BDM: \cos \angle BDM = \frac{DM}{BD} = \frac{2r_1}{BD}$$

$$\cos \angle BO_2 M = 2 \cos^2 \angle BO_2 M - 1$$

$$\cos \angle BDM = \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{4}}$$

$$\frac{2r_1}{4} = \frac{2}{\sqrt{4}} \quad ; \quad r_1 = \frac{4}{\sqrt{4}} \quad ; \quad r_2 = \sqrt{4}$$

Ответ: а) $\frac{4}{4}$

$$\delta) r_1 = \frac{4}{\sqrt{4}} \quad ; \quad r_2 = \sqrt{4}$$

2. 003:

$$(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) \neq 0$$

$$\cos^2 5x - \sin^2 5x \neq 0$$

$$\cos 10x \neq 0$$

$$10x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi l}{10}$$

$$\cos 14x \cdot \cos 5x + \cos 14x \cdot \sin 5x - \sin 14x \cdot \cos 5x + \sin 14x \sin 5x = -\sqrt{2} \cdot \cos 10x$$

$$\cos 9x - \sin 9x = -\sqrt{2} \cdot \cos 10x \quad | : \sqrt{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 9x - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin 9x + \cos 10x = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} + 9x \right) + \cos 10x = 0$$

$$2 \cos \frac{\frac{\pi}{4} + 9x + 10x}{2} \cdot \cos \frac{10x - 9x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\begin{cases} 19x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{x} - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{46} + \frac{2\pi n}{19} \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \\ \end{cases}$$

$$\text{Но } x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi l}{10}$$

$$\frac{\pi}{20} + \frac{\pi l}{10} \neq \frac{3\pi}{46} + \frac{2\pi n}{19}$$

$$\text{и } \frac{\pi}{20} + \frac{\pi l}{10} \neq \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$$

$$19 + 38l \neq 15 + 40n$$

$$1 + 2l \neq 25 + 40k$$

$$38(n-l) \neq 4-2n$$

Для любого k найдётся целое $l \Rightarrow$

$$4-2n \neq 38m, m \in \mathbb{Z}$$

эта серия решений не подходит

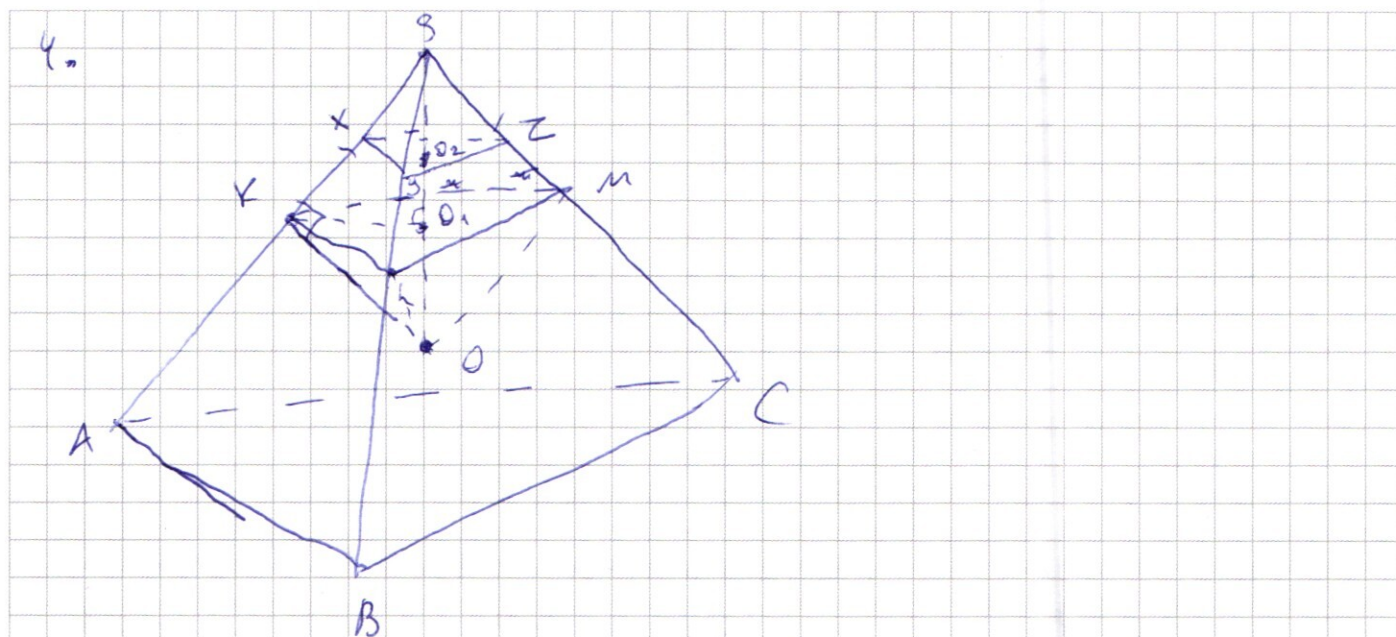
$$n \neq 2-19m \text{ или}$$

$$n \neq 19m + 2$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{3\pi}{46} + \frac{2\pi n}{19}, \text{ где } n \in \mathbb{Z} \text{ и } n$$

n нельзя представить в виде $19m + 2$, где $m \in \mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1) В пир. OKM — перпендикуляр из вер. O попадёт в центр опис. окр. ΔKLM
Вспомогат. т.к. $OK = OL = OM$

В пир. $SKLM$ — перпендикуляр из вер. S попадёт в центр опис. окр. ΔKLM
т.к. $SK = SL = SM$ как отрезки касательных к сфере.

$\Rightarrow S, O$ (центр опис. окр. ΔKLM), O — лежат на перпендикуляре к (KLM) ,
но ближайшая точка сферы к S тоже на нем лежит; значит $OS \perp (x-y-z)$ и
 $(x-y-z) \parallel (KLM)$

$$2) OS = R \sin \angle KSO = R \sqrt{1 - \frac{35}{36}} = \frac{R}{6} \quad 6R$$

$\triangle KSO$; KO_1 - высота т.к. $OS \perp (KLM)$
 $\angle K = 90^\circ$, т.к. AS касается сферы

$$KS = OS \cos \alpha = 6R \cdot \frac{\sqrt{35}}{6} = \sqrt{35} R$$

$$O_1 S = KS \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{35R}{6}$$

$$O_2 S = OS - R = 5R$$

$$\frac{S_{XYZ}}{S_{KLM}} = \left(\frac{O_2 S}{O_1 S} \right)^2 = \left(\frac{6}{7} \right)^2$$

$$S_{KLM} = 9 \cdot \frac{49}{36} = \frac{49}{4} = 12,25$$

т.к. плоскости параллельны, то выс SH лежит на SO

б) SH - высота $SH = 7R$; $R = \frac{SO}{6} = \frac{25}{6}$

$$SH = 7 \cdot \frac{25}{6}$$

$$SO_2 = 5R \quad ; \quad SH = 7R$$

$$\frac{S_{XYZ}}{S_{ABC}} = \left(\frac{5}{7} \right)^2$$

$$S_{ABC} = 9 \cdot \left(\frac{7}{5} \right)^2$$

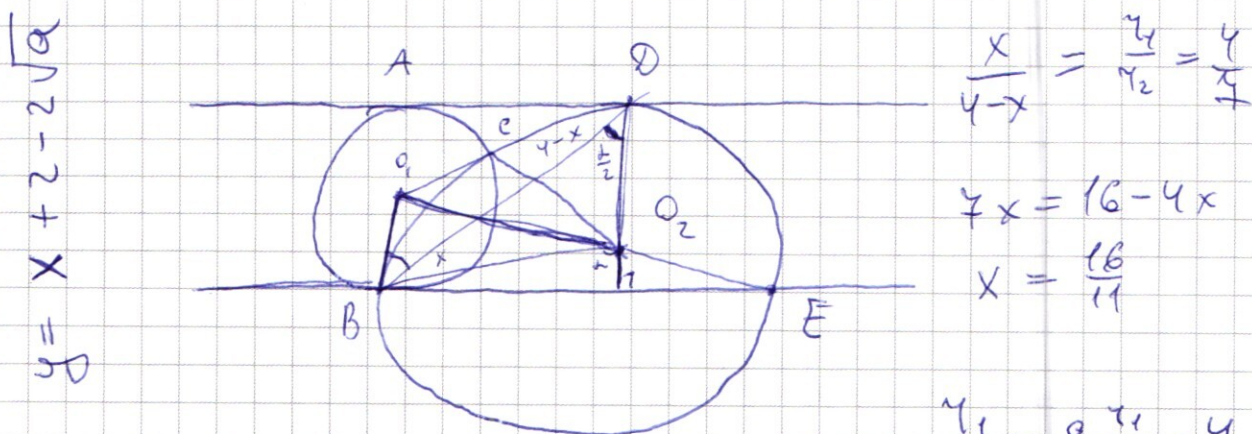
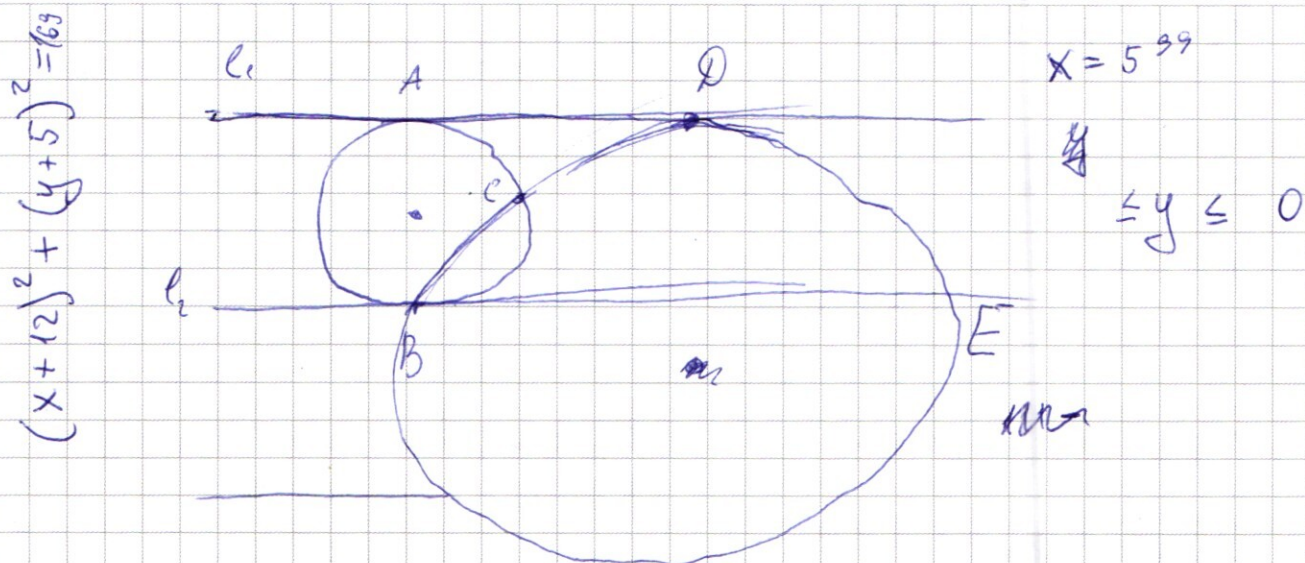
$$V_{SABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{7 \cdot \frac{25}{6} \cdot 9 \cdot \frac{49}{25}}{3 \cdot \frac{6}{2} \cdot 5^2} = \frac{4^3}{2} =$$

$$= 171,5$$

Ответ: а) 12,25

б) 171,5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\cos \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \delta}{2}} = \frac{S_{B0102}}{S_{B02E}} = 2$$

$$= \sqrt{\frac{8}{14}} = \sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{r_1 r_2 \cos 2}{r_2^2 \cdot \sin 2} = 2$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{h}{\frac{h}{2}} = \frac{2r_1 - r_2}{r_2} =$$

$$= 2 \frac{y_1}{y_2} - 1 = \frac{1}{7}$$

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 8 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} - 4$$

$$4 \frac{r_1}{r_2} = 4$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y}{y}$$

38th

$$\frac{3}{76} + \frac{2n}{18} \neq -\frac{1}{20} + \frac{k}{5}$$

$$\frac{3}{76} + \frac{2n}{18} \neq \frac{1}{20} + \frac{l}{5}$$

$$\frac{5}{4} + 2m \neq -\frac{1}{20} + \frac{k}{5}$$

$$\frac{5}{4} + 2m \neq \frac{1}{20} + \frac{l}{5}$$

$$15 + 40n \neq -19 + 76k$$

$$5 + 40n \neq 19 + 76l$$

$$25 + 40m \neq -1 + 4k$$

$$25 + 40m \neq 1 + 4l$$

$$76k - 40n \neq 39$$

$$76l - 40n \neq -14$$

$$40m - 4k \neq -26$$

$$40m - 4l \neq -24$$

$$\cancel{40(n-l)} = \cancel{34} - \cancel{36k}$$

$$38k - 20n \neq 17$$

$$38k - 20n \neq -7$$

$$20m - 2k \neq -13$$

$$\cancel{10} \cancel{20}m - \cancel{k}l \neq -6$$

$$2x + 3y = 5$$

$$2(x+y) + y = 5$$

$$y = 5 - 2(x+y) = 5 - 2l$$

$$l \neq 10m + 6$$

$$2x + 15 - 6l = 5$$

$$n \neq \frac{2-19a}{2 \cdot 21 \cdot 40}$$

$$\frac{3}{76} + \frac{2n}{18} \neq \frac{1}{20} + \frac{l}{10}$$

$$\frac{5}{4} + 2k \neq \frac{1}{20} + \frac{l}{10}$$

$$38(n-l) \neq 4 - 2n$$

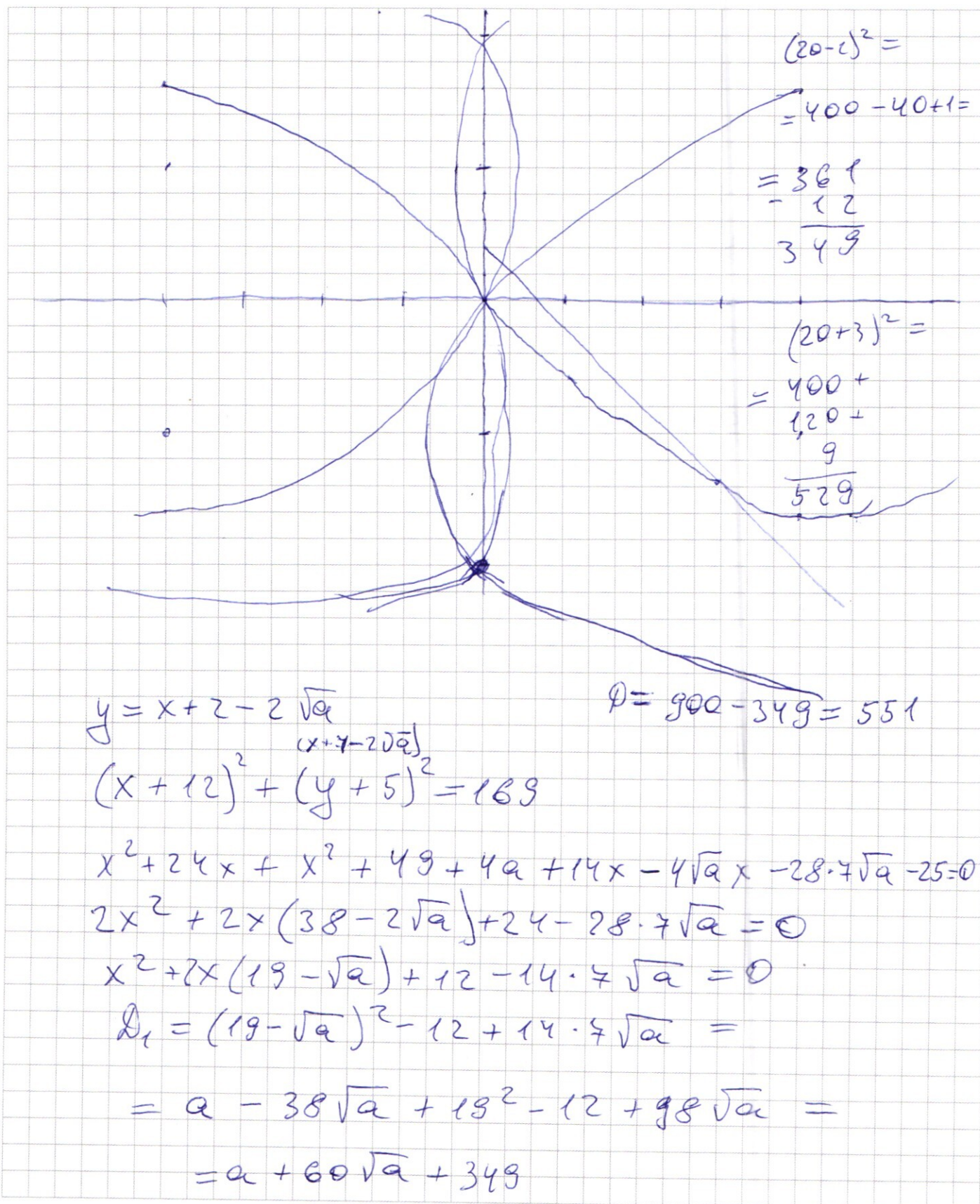
$$40k \neq -24 + 2l$$

$$15 + 40n \neq 19 + 38l$$

$$25 + 40k \neq 1 + 2l$$

$$4 - 2n \neq 38a$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cdot \cos y$$

$$p - q = p - (1 - p) = 2p - 1$$

$$p - q = 0$$

$$2. \quad \cos 14x \cos 5x + \cos 14x \cdot \sin 5x - \sin 14x \cdot \cos 5x + \sin 14x \cdot \sin 5x = \cos 9x - \sin 9x$$

$$\cos 9x - \sin 9x = -\sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos 10x$$

$$\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{10} = -\frac{\pi}{20}$$

$$\cos\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 10x = 0$$

$$\cos\left(\frac{19x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} 19x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3\pi}{46} + \frac{2\pi n}{19} \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \end{cases} \quad x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{10}$$

$$\frac{4k+1}{20} = \frac{8l+5}{4}$$

$$\begin{cases} 5x + \frac{\pi}{4} \neq \pi n \\ 5x - \frac{\pi}{4} \neq \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5} \\ x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5} \end{cases}$$

$$40l + 25 =$$

$$= 4k + 1$$

$$\cos 10x \neq 0$$

$$10x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\sqrt[3]{\log_3 x} = t$$

$$x = t^{\sqrt{\log_3 x}}$$

$$x^{\sqrt{\log_3 x}} = t^{\sqrt{\log_3 x \cdot \log_x 3}}$$

$$x^{\sqrt{\log_3 x}} = x^{\sqrt{\log_x 3} \cdot \sqrt{\log_3 x} \cdot \sqrt{\log_x 3}} = \sqrt[3]{\log_3 x}$$

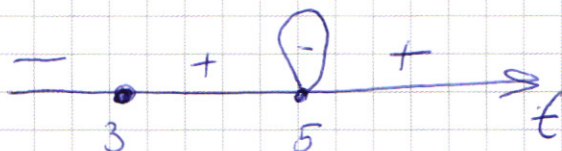
$$(3^{\sqrt{\log_3 x}})^3 - 13 \cdot (3^{\sqrt{\log_3 x}})^2 + 55 \cdot (3^{\sqrt{\log_3 x}}) - 75 \leq 0$$

$$t^3 - 13t^2 + 55t - 75 \leq 0$$

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & -13 & 55 & -75 & \\ 3 & 1 & -10 & 25 & 0 \end{array}$$

$$(t-3)(t^2-10t+25) \leq 0$$

$$(t-3)(t-5)^2 \leq 0$$



$$\begin{cases} t \leq 3 \\ t = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt[3]{\log_3 x} \leq 3 \\ \sqrt[3]{\log_3 x} = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3 x \leq 1 \\ \sqrt{\log} \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3 \\ \log_3 x = \log_3^2 5 \\ x = 5^{\log_3 5} \end{cases}$$

$$(1; 3] \cup \{5^{\log_3 5}\}$$

