

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Монету подбрасывают 70 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p – вероятность того, что орёл выпадет больше 42 раз, а q – вероятность того, что орёл выпадет не больше 28 раз. Найдите $p - q$.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$.
3. [5 баллов] Решите неравенство $8\sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1+\sqrt{4\log_2 x}} + 60 \cdot x\sqrt{\log_x 2} \leq 72$.
4. [5 баллов] а) Сфера с центром O касается боковых рёбер SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно, а также касается её основания ABC . Через точку сферы, ближайшую к точке S , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды $SABC$ этой плоскостью равна 2, а $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите площадь треугольника KLM .
б) Пусть дополнительно известно, что $SO = 9$, а плоскости KLM и ABC параллельны. Найдите объём пирамиды $SABC$.
5. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно 3. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 3$.
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{80}, \\ y \leq \log_7 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$N \uparrow$$

Т.е. выгода от покупки меньше оттока, но
заменим Р на вероятность ~~что~~ что пенка
выгода больше 42 раз, и от этого значение Р
не изменится, если ~~от~~ пенка выгода больше
42 раз, но ~~что~~ ~~что~~ ~~выгода~~ ~~менее~~ ~~(70-42) раз~~
28 раз, т.е. $70 - 42 = 28$

Значит нужно рассмотреть Р-9, а это означает
то вероятнее, что при выходе менее 28 проз
лучше вероятнее, что при выходе 28 и менее
проз. Поэтому можно сказать что разность двух
вероятностей будет равна вероятности того
что при выходе ровно 28 проз с отрицательным
знаком.

Всего 70 очков равно $\frac{C_{70}^{28}}{2^{70}}$ т.е. $\frac{1}{2^{70}}$ - вероятность что в конкретном порядке выпадут 28 очков и 42 нешки, а C_{70}^{28} - количество возможных перестановок очков и нешек вместе

Значит $P-Q = -\frac{C_{70}^{28}}{2^{70}} = -\frac{70!}{28! 42! 2^{70}}$

Darüber: $-\frac{70!}{28! 42! 2^{70}}$

N2

$$\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$$

(1)

$$(1) (\cos 4x)(\cos 3x + \sin 3x) + \sin 4x(\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2}(\cos 3x - \sin 3x)$$

$$(2) \cos 3x \neq \sin 3x$$

$$(3) \cos 3x \neq -\sin 3x$$

$$(1) \cos 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x - \sin 3x \sin 4x = \sqrt{2}(\cos 3x - \sin 3x)$$

$$\cos 7x + \sin 7x = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\sqrt{2} \cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \cos 6x$$

Если косинусы равны то либо аргументы отличаются на $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, либо ~~они~~ отличаются знаками и отличаются на $2\pi k$

$$\begin{cases} 7x - \frac{\pi}{4} = 6x + 2\pi k \\ 7x - \frac{\pi}{4} = -6x + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 13x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13} \end{cases}$$

При подстановке $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ в 3-е уравнение получим $\cos \frac{3\pi}{4} \neq \sin \frac{3\pi}{4}$
 $-\frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ - неверно, значит эта серия корней не подходит

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Условие
2) и 3)

$$\begin{cases} \cos 3x \neq \sin 3x \\ \cos 3x \neq -\sin 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 3x \neq 1 \\ \operatorname{tg} 3x \neq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n \\ 3x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3} \\ x \neq -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3} \end{cases}$$

Найдём когда $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{13}$ не удовлетворяет формуле условия

$$(*) \left[\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{13} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3} \right] \cdot 156$$

$$(**) \left[\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{13} = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3} \right] \cdot 156$$

$$(*) 3 + 24k = 13 + 52m$$

$$2(12k - 26m) = 10$$

$$4(6k - 13m) = 10 \quad \text{корней в целых числах не имеет}$$

$$(**) \quad 3 + 24k = -13 + 52n$$

$$(24k - 52n) = -16$$

$$4(6k - 13n) = -16$$

$$13n - 6k = 4$$

~~13 и 6 взаимно простые числа, значит данное уравнение имеет решение а значит вторая серия корней не удовлетворяет условию~~

Если данное уравнение имеет решение при каком-то k , то это k не должно быть включено в ответ.

$$n = \frac{4+6k}{13} \Rightarrow 4+6k \Rightarrow 6k+1 \neq 13 \Rightarrow 6k+13 \neq 4$$

Ansatz:
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{52} + \frac{2\pi k}{13} \\ 6k \neq 13n - 4 \end{cases}, k, n \in \mathbb{Z}$$

27

Haughton ~~non~~ katus X ~~negotii~~ cuscilla ne uille
remesse.

$$\begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{\circ} \\ y \leq 109.7x \end{cases} \Rightarrow \text{Number line diagram for } y \Rightarrow$$

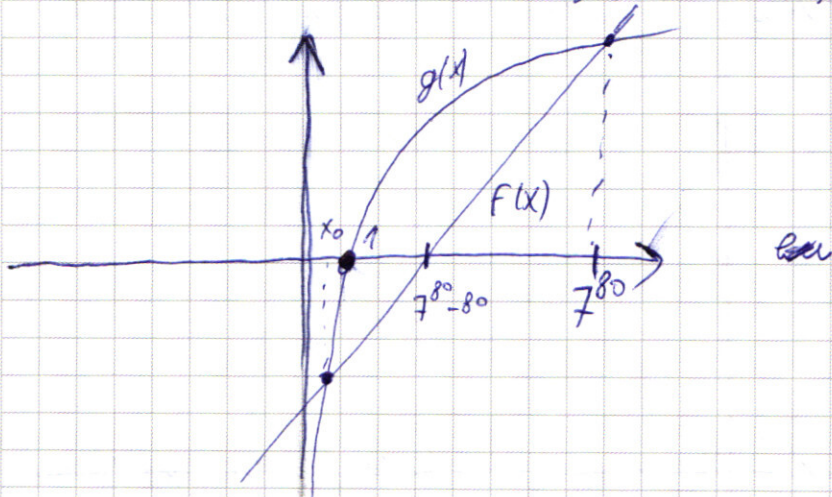
$\Rightarrow$ Körper ne Bugden sein $80+x-7^{80} > 10\frac{1}{2}x$

Zahlenreihe um $80 + x - 7 \xrightarrow{80} \text{log um } x = 7^{80}$

$$80 + 7^{80} - 7^{80} = 1677^{80}, \text{ значит } x = 7^{80} - \text{корень}$$

уравнения $80 + x - 7^{80}$, из графиков функций

$$f(x) = 80 + x - 7^{80} \quad \text{u} \quad g(x) = 10g_2x$$



Пусть, если при $x > 7^{80}$ $f(x) > g(x) \Rightarrow$ при $x > 7^{80}$
 не выполнят все условия равенств, т.к. $g(1) = 0$, а
 $f(1) < 0$, ~~то функция может быть симметрична относительно~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a_+ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

$a_+ f(0) = 80 - 7^{80}$ то второй корень y имеет на ~~интервале~~ интервале от 0 до 1 (исходя из непрерывности функции)

значит система будет иметь ~~два~~ решения при $1 \leq x \leq 7^{80}$

Теперь зафиксируем x и найдем какое количество целых y будут удовлетворять условию.

$$\frac{80+x-7^{80}}{7} \leq y \leq \log_7 x$$

т.к. $y \in \mathbb{Z}$ то если мы заменим $\log_7 x$ на $[\log_7 x]$ где $[t]$ - целая часть числа t , то количество решений не изменится

$$\frac{80+x-7^{80}}{7} \leq y \leq [\log_7 x] \quad - \text{теперь обе границы - целые числа, а значит}$$

количество решений это $[\log_7 x] - 80 - x + 7^{80} + 1$ при

~~фиксированном x , учитывая что $1 \leq x \leq 7^{80}$~~

~~находим сумму:~~

при фиксированном x , просуммируем это значение по всем допустимым x ,

$$\sum_{x=1}^{7^{80}} ([\log_7 x] - 80 - x + 7^{80}) = \sum_{x=1}^{7^{80}} ([\log_7 \frac{x}{7^{79}}] - x + 7^{80}).$$

$$\left[\log_7 \frac{x}{7^{79}} \right] = \left[\log_7 x - 79 \right] = \left[\log_7 x \right] - 79 \text{ значение лог можно заменить}$$

целым на целое

Оценим: $\sum_{x=1}^{7^{80}} \left[\log_7 \left(\frac{x}{7^{79}} \right) \right] = x - 7^{80}$

№ 3

$$8^{\sqrt{\log_2 x}} - 7 \cdot 2^{1 + \sqrt{\log_2 x}} + 60x^{\sqrt{\log_2 2}} \leq 72$$

~~Теорема~~ Преобразуем $x^{\sqrt{\log_2 2}} = (x^{\log_2 2})^{\frac{1}{\sqrt{\log_2 2}}} = 2^{\frac{1}{\sqrt{\log_2 2}}} = 2^{\sqrt{\log_2 x}}$

Сделаем замену $t = 2^{\sqrt{\log_2 x}}$

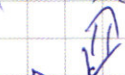
т.к. $\sqrt{\log_2 x} \geq 0$ то значением $t \geq 1$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \log_2 x \geq 0 \\ \log_2 2 \geq 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$$

$$t^3 - 14t^2 + 60t - 72 \geq 0$$

$$(t-2)(t-6)^2 \geq 0$$



$$\begin{cases} t \geq 2 \\ t = 6 \end{cases} \Rightarrow t \geq 2$$

$$2^{\sqrt{\log_2 x}} \geq 2^1$$

$$2^t \text{ МА} \Rightarrow \sqrt{\log_2 x} \geq 1$$

$\rightarrow \log_2 x \geq 1 \Rightarrow x \geq 2$

уменьшая ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 2 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2$

Оценим: $x \geq 2$

№ 5

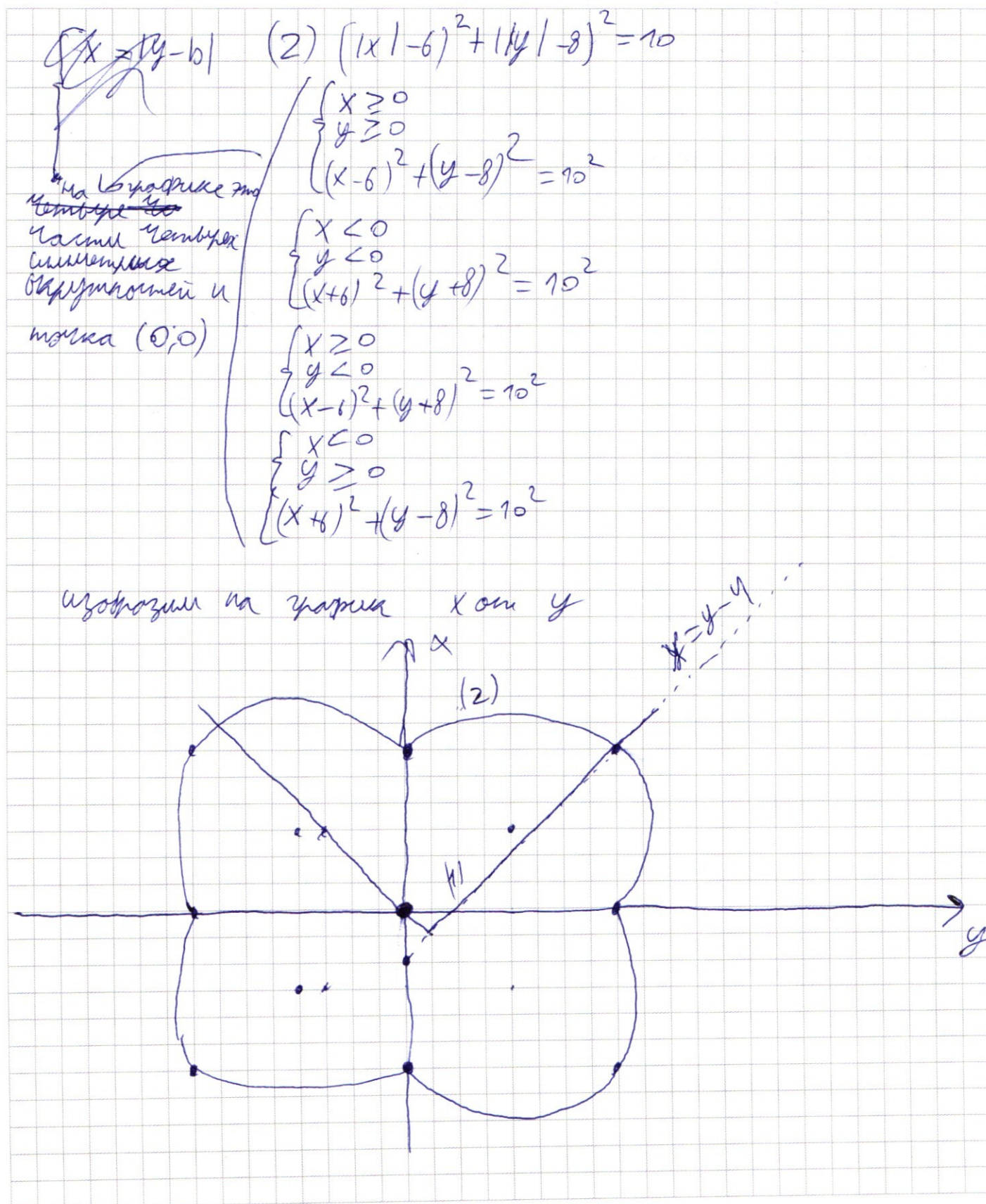
$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - y \\ (|x| - 6) + (|y| - 8)^2 = 10^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{a} = b, \quad b \geq 0$$

$$\begin{cases} x = |y - b| + b - y & (1) \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 10 & (2) \end{cases}$$

Внимательно зададимся вопросом.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



(1) $x = |y - b| + b - 4$ - график модуля со сдвигом вершины. Точкам вершин лежит на прямой $x = y - 4$, пунктиром изображены же на графике при $b \geq 0$, то есть линия только часть прямой. Если вершина расположена внутри окружности, то из графика видно, что тогда будет два пересечения с окружностью, а если находимся снаружи, то корней вообще не будет, значит график модуля должен проходить через точку $(0; 0)$ и тогда будет решение

подставим $x = 0$ и $y = 0$ в (2)

$$0 = |b| + b - 4, \text{ т.к. } b \geq 0 \quad 2b = 4 \quad b = 2$$

$$|a| = b = 2$$

$$a = 4$$

Ответ: $a = 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\uparrow 80 + x - 7^{80} \geq \log_7 x \uparrow$$

$$x = 7^{80}$$

$$80 + 0 \geq 80$$

$$\sum_{x=1}^{7^{80}} \frac{1}{x}$$

$$x^{\sqrt{\log_2 x}} = \left| x^{\log_{1/2} \frac{1}{\sqrt{\log_{1/2} x}}} \right| = 2^{\sqrt{\log_2 x}}$$

$$2^{\sqrt{\log_2 x}} = t \quad t \geq 1$$

$$t^3 - 14t^2 + 60t - 72 \geq 0$$

$$\cancel{8} - \cancel{56} + \cancel{120} - \cancel{72}$$

$$\begin{array}{r} t^3 - 14t^2 + 60t - 72 \mid t-2 \\ -t^3 + 2t^2 \\ \hline -12t^2 + 60t \\ -12t^2 + 24t \\ \hline 36t - 72 \end{array}$$

$$(t-2)(t-6)^2 \geq 0$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} t \geq 2 \\ t = 6 \end{cases}$$

$$2^{\sqrt{\log_2 x}} \geq 2$$

$$\sqrt{\log_2 x} \geq 1$$

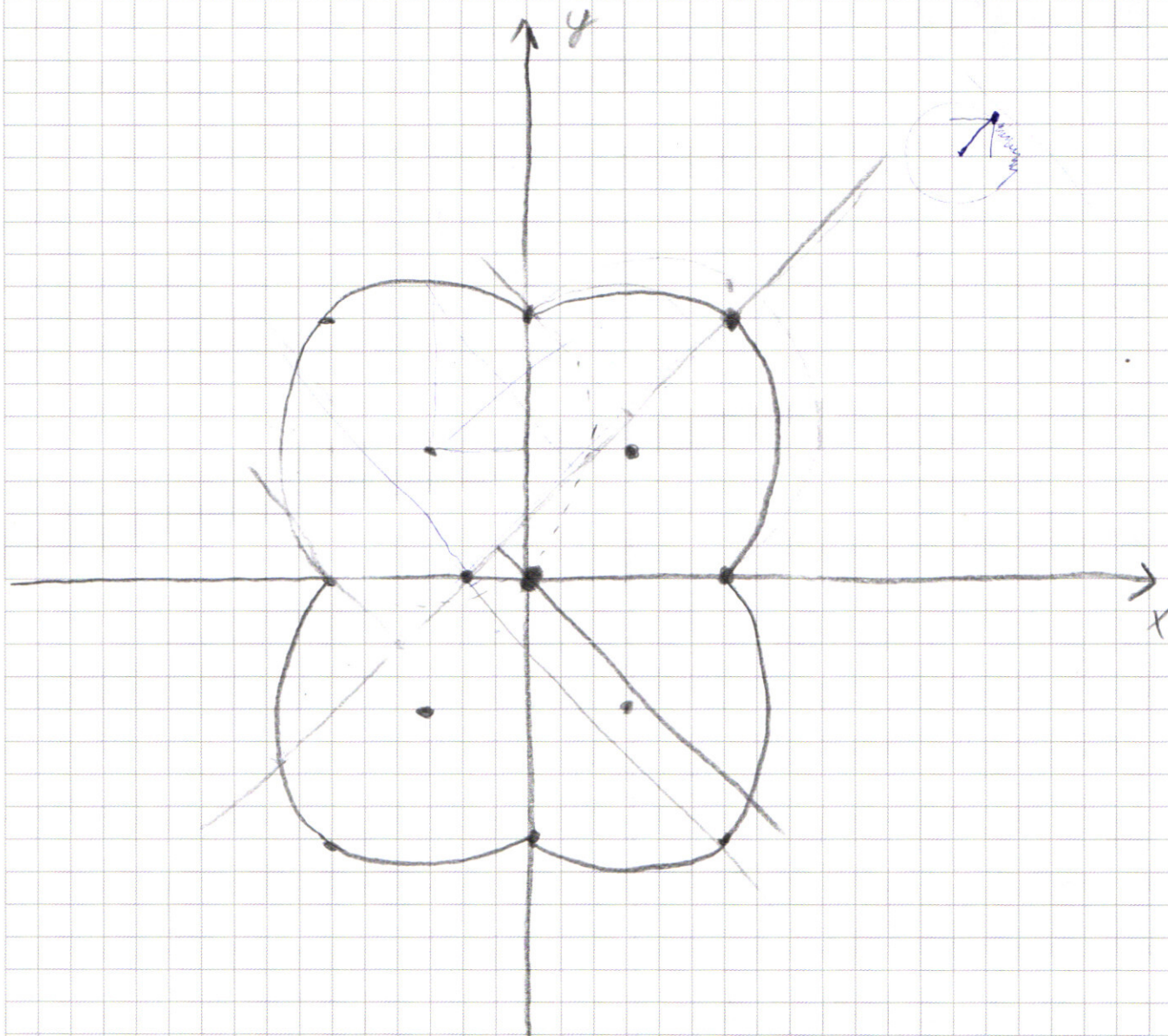
$$\boxed{x \geq 2}$$

$$2^{\sqrt{\log_2 x}} = 6$$

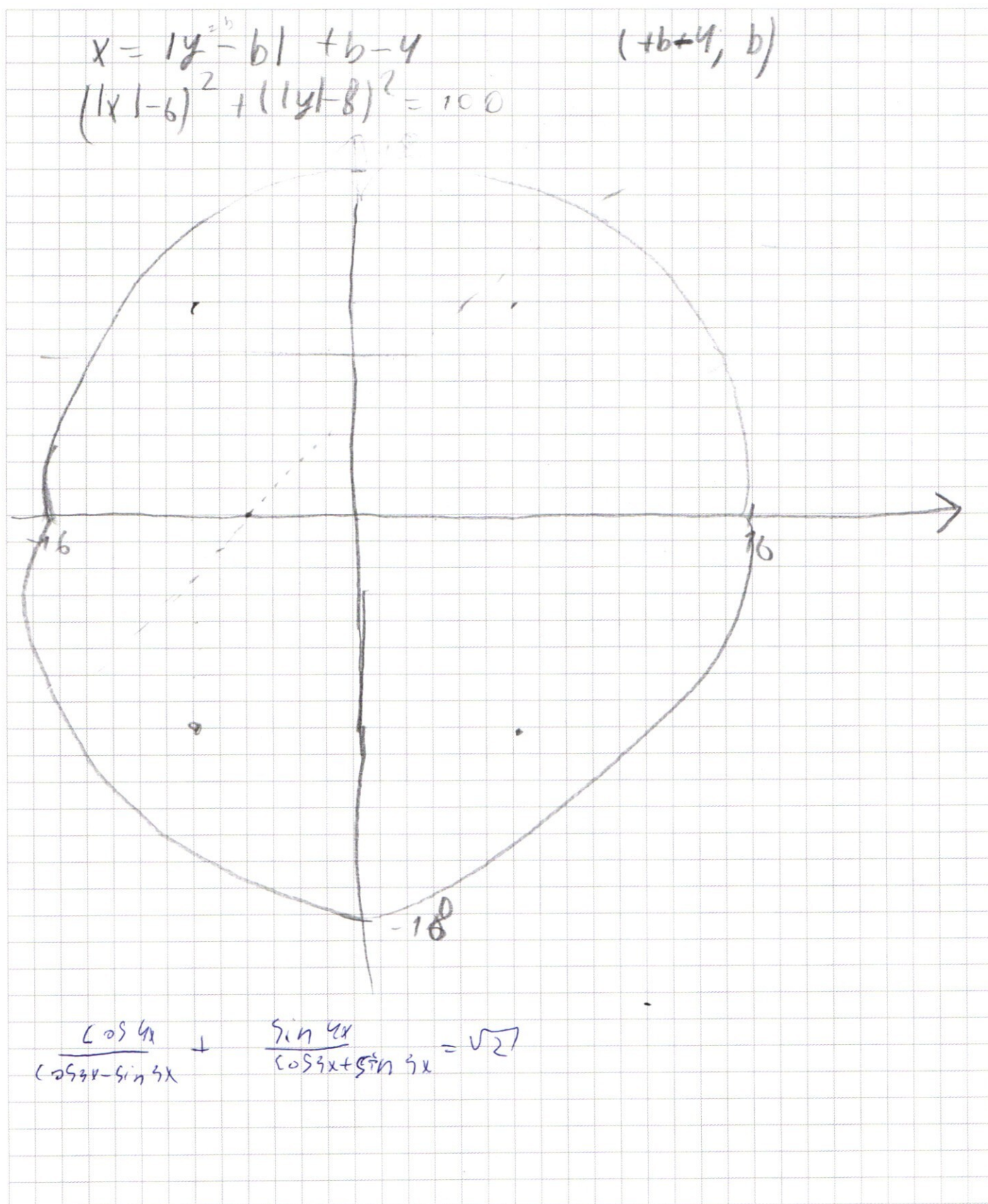
$$\sqrt{\log_2 x} = \log_2 6$$

$$\log_2 x = \log_2^2 6$$

$$x = 6^{\log_2 6} > 2$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{aligned} \cos 3x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) &= \sin\left(\frac{3x - (\frac{\pi}{2} - 3x)}{2}\right) \\ \cos(3x) + \cos\left(3x - \frac{3\pi}{2}\right) &= 2 \cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \\ &= \sqrt{2} \cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\cos 4x}{\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\sin 4x}{\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)} = 2$$

$$\frac{\cos 4x \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin 4x \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)} = 2$$

$$4x = a + b$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = a - b$$

$$2a = 7x - \frac{\pi}{4}$$

$$b = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}$$

$$a = \frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8}$$

sin

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin$$

$$\frac{-1}{-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} + \frac{0}{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\begin{aligned} \cos 4x \cos 3x + \cos 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x &= \\ = \sqrt{2} (\cos^2 3x - \sin^2 3x) &= \sqrt{2} \cos 6x \end{aligned}$$

$$\cos 7x + \sin 7x = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\sqrt{2} \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos 6x$$

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 6x$$

$$\begin{cases} 7x - \frac{\pi}{4} = 6x + 2\pi k & x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 7x - \frac{\pi}{4} = -6x + 2\pi k & x = \frac{\pi}{4.13} + 2\pi k \end{cases}$$



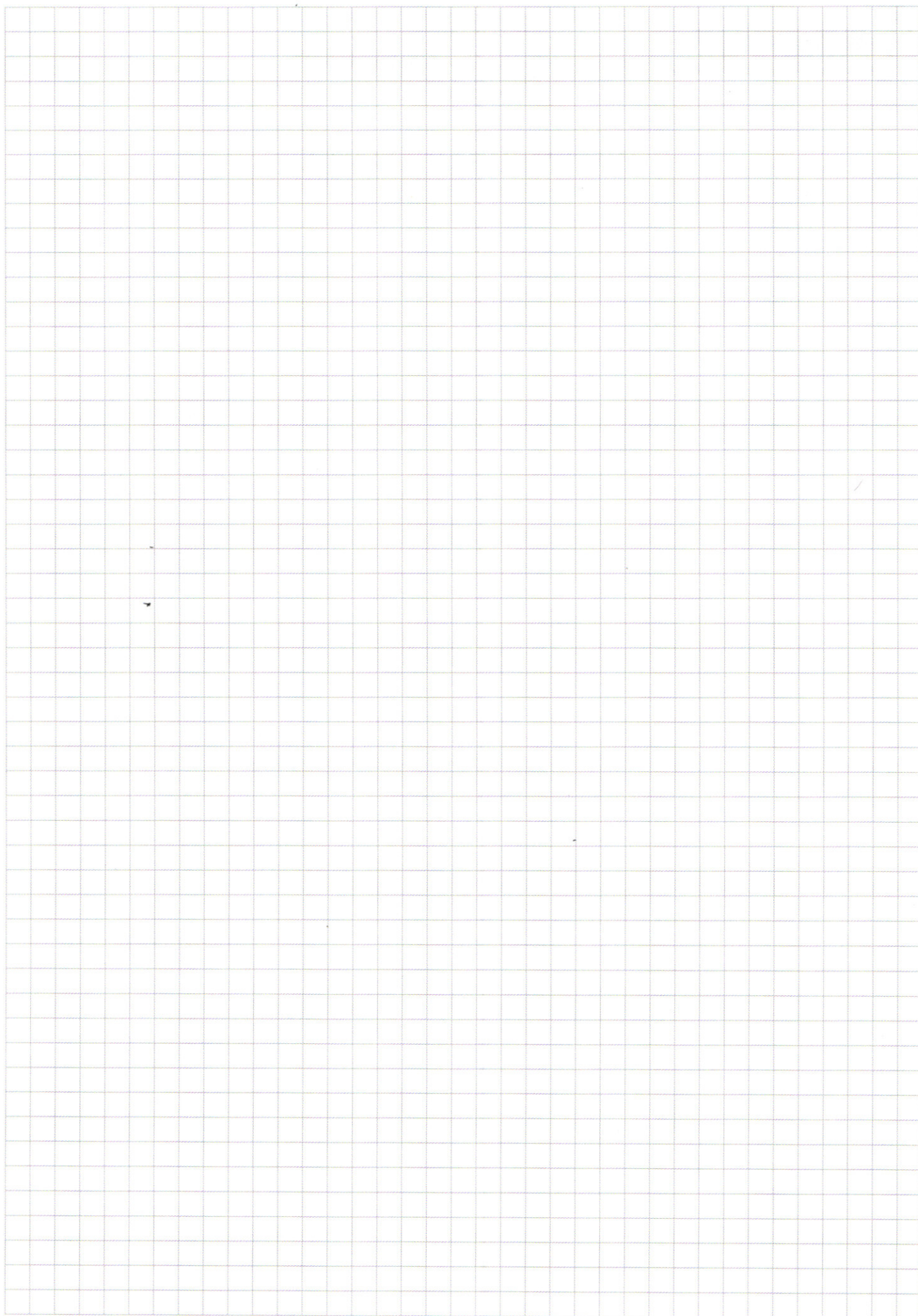
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

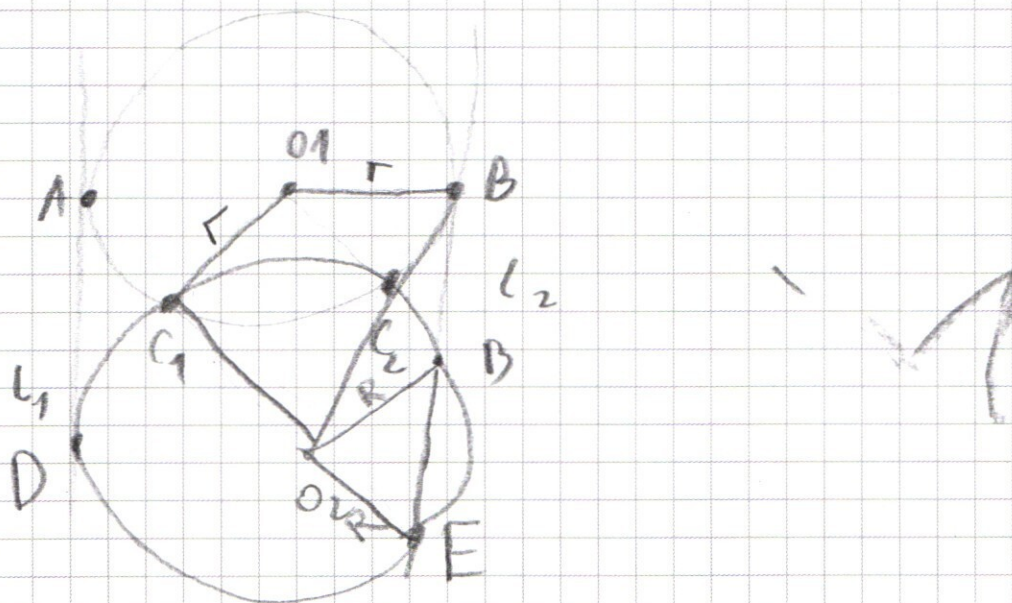
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

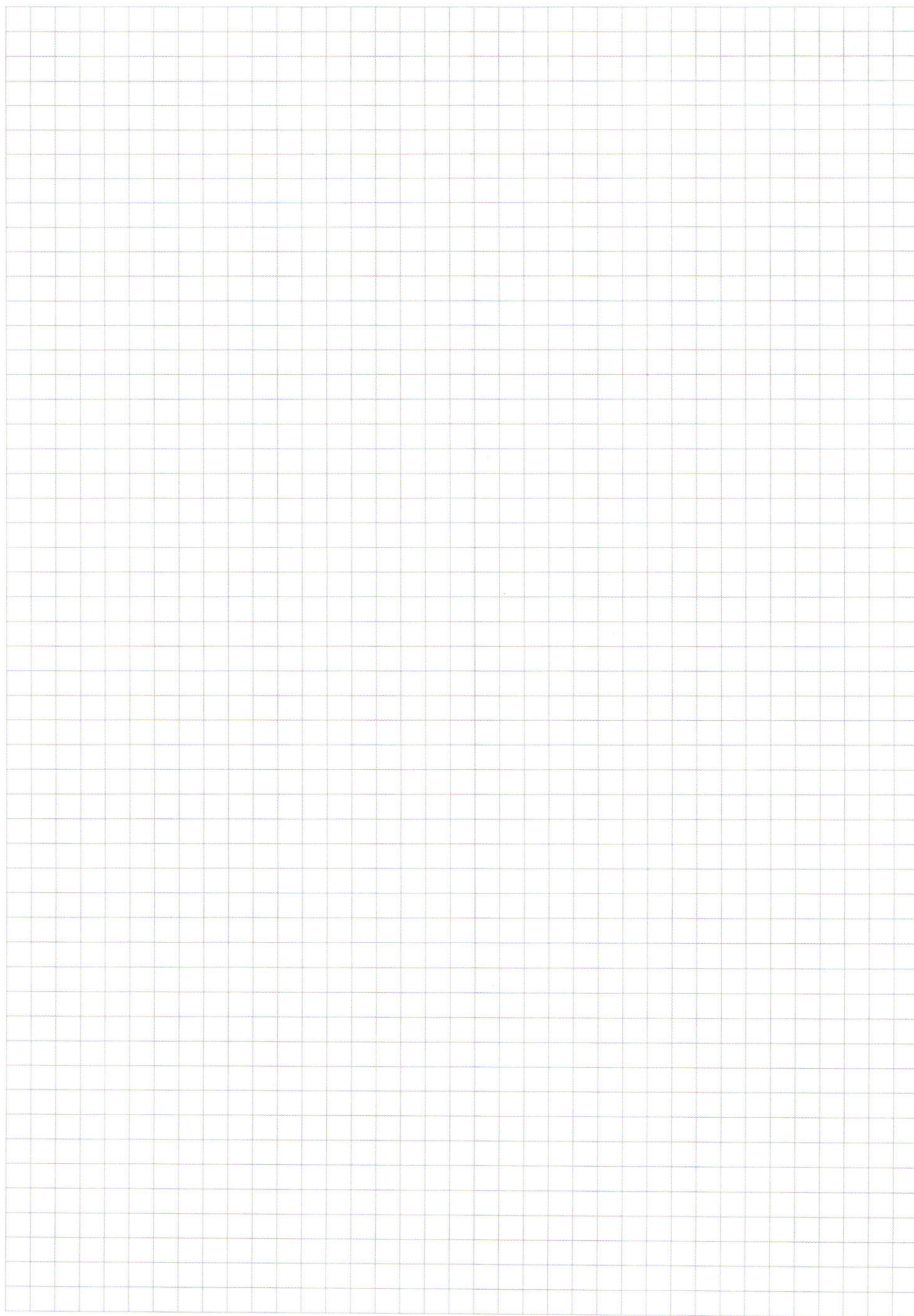


< 28

≤ 28

-28

$\begin{array}{r} 28 \\ 10 \\ \hline 20 \end{array}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)